ПМТФ, № 6, 1974

УДК 532.135

УСТОЙЧИВОСТЬ СЛОЯ УПРУГОВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ ПОДОГРЕВЕ СНИЗУ

Ф. А. Гарифуллин

(Казань)

Полимеризация метилметакрилата сопровождается выделением тепла, которое вызывает перегрев реакционной массы в производстве органического стекла. Распределение температуры в полимеризующемся слое усложняется конвекцией, которая нарушает начальное температурное поле. Поэтому наряду с напряжением вдоль листа возникают местные внутренние напряжения, которые проявляются при эксплуатации.

Качество изделия и интенсификация процесса полимеризации зависят от критического градиента температуры, который определяет порог устойчивости слоя полимеризующегося метилметакрилата.

В работе рассмотрена задача Рэлея — Джеффри для слабой упруговязкой жидкости, описываемой интегральным реологическим конститутивным соотношением. Определены критические значения числа Рэлея стационарной и колебательной неустойчивостей для свободных и идеально теплопроводных жестких границ.

1. Рассмотрим задачу Рэлея — Джеффри для упруговязкой жидкости, описываемой моделью [1] и названной там жидкостью B'

$$T^{ik} = -\pi g^{ik} + \tau^{ik} \tag{1.1}$$

$$\tau^{ik} = 2 \int_{-\infty}^{t} \psi(t-t') \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \frac{\partial x^k}{\partial x'^n} e^{mr}(x', t')\, dt' \tag{1.2}$$

$$\psi(t-t') = \int_{0}^{\infty} \frac{N(\tau)}{\tau} e^{(t'-t)/\tau}\, d\tau \tag{1.3}$$

где e^{mr} — тензор скоростей деформации, T^{ik} — тензор напряжения, π — изотропное давление, g^{ik} — сопряженный метрический тензор фиксированной координатной системы x^i, $N(\tau)$ — функция распределения времен релаксации, $x'^i = x'^i(x^i, t, t')$ — неподвижная лагранжева система координат (функция смещения), t — настоящее время, $t > t'$. Уравнение (1.2) можно рассматривать как уравнение для сред, поведение которых при малых скоростях можно характеризовать спектром времен релаксации. Жидкость B' проявляет положительный эффект Вейссенберга при сдвиге между вращающимися цилиндрами и имеет распределение нормальных напряжений, аналогичное найденному в [2]. Кроме того, величины $N(\tau)$ определялись для некоторых реальных материалов [3].

Недостатком модели жидкости B' в виде (1.2) является ее непригодность для описания неньютоновской вязкости. В рассматриваемой задаче скорости деформации малы, поэтому можно пренебречь аномалией вязкости. Кроме обобщения «контравариантного» типа имеется жидкость A', являющаяся «ковариантным» аналогом.

2. Уравнения возмущенного состояния в приближении Буссинеска записываются в виде

(2.1) $$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \pi'}{\partial z_i} + \lambda_i \alpha g \theta + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$$

(2.2) $$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \varkappa \Delta\right)\theta = \beta u_i \lambda_i$$

(2.3) $$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

где $\lambda_i = (0, 0, 1)$, β — отрицательный градиент температуры, $\varkappa$ — коэффициент температуропроводности жидкости, π', θ, u_i — возмущения давления, температуры и скорости, ρ — плотность жидкости, α — коэффициент теплового расширения, g — ускорение силы тяжести, τ_{ij} — тензор напряжения вследствие возмущенного движения.

Компоненты возмущения и температуры запишутся в форме

(2.4) $$u_j(x_i) = u_j^0(x_3)\exp[i(a_1x_1 + a_2x_2) + pt]$$

(2.5) $$\theta(x_i) = \theta^\circ(x_3)\exp[i(a_1x_1 + a_2x_2) + pt]$$

Здесь a_1, a_2 — волновые числа, p — комплексный декремент.

Функции смещения возмущенного движения имеют вид

(2.6) $$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + \alpha(x_i, x_i', t, t') \\ x_2' &= x_2 + \zeta(x_i, x_i', t, t') \\ x_3' &= x_3 + \gamma(x_i, x_i', t, t') \end{aligned}$$

где α, ζ, γ удовлетворяют начальным условиям

(2.7) $$\alpha|_{t=t'} = 0, \quad \zeta|_{t=t'} = 0, \quad \gamma|_{t=t'} = 0$$

Для определения x_i' имеется система уравнений

(2.8) $$\frac{\partial x_i'}{\partial t} + u_j\frac{\partial x_i'}{\partial x_j} = 0$$

Если ограничить рассмотрение жидкостями, имеющими «короткую» память, можно записать

(2.9) $$x_i' = x_i - (t - t')u_i$$

После определения компонент тензора напряжения возмущенного движения из (1.2) и исключения π', следуя [4], придем к амплитудным уравнениям

(2.10) $$(D^2 - \gamma^2)[\sigma \mathrm{Pr}^{-1} - (1 - \sigma\Gamma)(D^2 - \gamma^2)]W = R\gamma^2 T$$

(2.11) $$[\sigma - (D^2 - \gamma^2)]T = W$$

При этом используются следующие безразмерные переменные:

(2.12) $$(x, y, z) = \left(\frac{x_1}{d}, \frac{x_2}{d}, \frac{x_3}{d}\right), \quad \mathrm{Pr} = \frac{\eta_0}{\rho\varkappa}$$

$$R = \frac{\alpha g \beta d^4 \rho}{\eta_0 \varkappa}, \quad \tau = \frac{\varkappa t}{d^2}, \quad W = \frac{u_3 d}{\varkappa}$$

$$T = \frac{\theta}{\beta d}, \quad \sigma = \frac{pd^2}{\varkappa}, \quad D = \frac{\partial}{\partial z}$$

$$a_i^* = a_i d, \quad \gamma^2 = a_1^{*2} + a_2^{*2}$$

где Pr — число Прандтля, R — число Рэлея, d — толщина слоя жидкости, $\Gamma = \varkappa\eta_0^{-1} d^{-2}\int\limits_0^\infty \tau N(\tau)\,d\tau$ — параметр упругости, η_0 — ньютоновская вязкость.

3. В зависимости от свойств жидкости возникает монотонная или колебательная неустойчивость. Для ньютоновской жидкости установлено, что всегда соблюдается «принцип монотонности возмущений» и порог устойчивости определяется при нулевом значении декремента. Наличие упругости в неньютоновских упруговязких средах нарушает этот принцип. Следуя [5], в рассматриваемом случае можно показать, что

$$\operatorname{Im}\sigma\left\{\int\limits_0^1 |F|^2\,dz + R\gamma^2\int\limits_0^1 (|DM|^2 + \gamma^2|W|^2)\,dz - R\Pr\gamma^2\Gamma\int\limits_0^1 |J|^2\,dz\right\} = 0 \tag{3.1}$$

$$J = (D^2-\gamma^2)W, \quad F = [\sigma\Pr^{-1} - (1-\sigma\Gamma)(D^2-\gamma^2)]J$$

Интеграл (3.1) не является знакоопределенным и для $R > 0$ возмущения монотонны только при малых значениях Γ.

4. Рассмотрим решение задачи для двух свободных границ. В этом случае граничные условия запишутся в виде

$$T = W = D^2W = 0 \quad (z = 0,\ 1) \tag{4.1}$$

Решение, удовлетворяющее (4.1), запишется в форме

$$W = W_0 \sin n\pi z \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots) \tag{4.2}$$

где W_0 — постоянная.

Уравнения декрементов для основной моды неустойчивости получаются из (2.10), (2.11)

$$\sigma^2 + \sigma^2\varkappa^2\left(1 + \frac{\Pr}{1-\Gamma\Pr x^2}\right) + \frac{\Pr x^4}{(1-\Gamma\Pr x^2)} - \frac{R\Pr x^2}{x^2(1-\Gamma\Pr x^2)} = 0 \tag{4.3}$$

$$x^2 = \pi^2 + \gamma^2$$

Для случая ньютоновской жидкости, когда $\Gamma = 0$, значения критического числа Рэлея и волнового числа совпадают с известными значениями. Поведение декрементов для этого случая подробно обсуждено в [4].

Полагая на границе устойчивости $\operatorname{Re}\sigma = 0$, обозначив $\sigma = i\omega_+$, можно получить условия возникновения колебательной неустойчивости. Из (4.3) получается безразмерная частота нейтральных колебаний

$$\omega_+^2 = -\frac{\gamma^2}{x^2}[R_*^{(s)} - R] \tag{4.4}$$

где $R_*^{(s)} = x^6/\gamma^2$ — критическое число Рэлея для стационарной неустойчивости. Поскольку частота нейтральных колебаний — величина вещественная, то равенство (4.4) справедливо только при $R > R_*^{(s)}$. Колебательная неустойчивость наступает позже, и, следовательно, порог устойчивости определяется $R_*^{(s)}$.

5. Решение задачи с двумя жесткими границами в элементарном виде получить не удается. Для решения этой задачи предложены различные методы. Здесь аналогично [6] используется метод Галеркина. Сместив начало координат в середину слоя, для идеально теплопроводных границ запишем граничные условия

$$T = W = DW = 0 \qquad (z = \pm{}^1/_2) \tag{5.1}$$

Решения (2.10) и (2.11) разыскиваются в виде

$$W(z) = \sum_{m=1}^{M} a_m W_m(z) \tag{5.2}$$

$$T(z) = \sum_{m=1}^{M} b_m T_m(z) \tag{5.3}$$

где a_m и b_m — неизвестные коэффициенты. Базисные функции $W_m(z)$ и $T_m(z)$ должны удовлетворять граничным условиям (5.1). Здесь рассматриваются только четные решения, как наиболее неустойчивые.

В качестве базисных функций выбираются [7]

$$W_m(z) = \frac{\operatorname{ch}(\mu_m z)}{\operatorname{ch}\mu_m/2} - \frac{\cos(\mu_m z)}{\cos\mu_m/2} \tag{5.4}$$

$$T_m(z) = A_m \cos(2m-1)\pi z \tag{5.5}$$

где μ_m — положительные корни уравнения

$$\operatorname{th}\frac{\mu}{2} + \operatorname{tg}\frac{\mu}{2} = 0 \tag{5.6}$$

Амплитудный коэффициент A_m выбирается из условия нормировки. Выполнив преобразования, придем к системе уравнений относительно неизвестных коэффициентов a_m

$$\sum_{m=1}^{M} a_m\left[E_{mn} + Rc_4\sum_{i=1}^{M}\frac{F_{im}F_{in}}{J_{ii}}\right] = 0 \tag{5.7}$$

Это приводит к алгебраическим уравнениям степени M для R

$$\left\| E_{mn} + Rc_4\sum_{i=1}^{M}\frac{F_{im}F_{in}}{J_{ii}}\right\| = 0 \tag{5.8}$$

Здесь приняты обозначения

$$\begin{gathered} E_{mn} = c_1[D^4W_m,\ W_n] - c_2[D^2M_m,\ W_n] + c_3[W_m,\ W_n] \\ F_{mn} = [T_m,\ W_n],\quad J_{mn} = [D^2T_m,\ T_n] - [T_m,\ T_n]c_5 \\ c_1 = (1-\sigma\Gamma),\quad c_2 = \sigma\mathrm{Pr}^{-1} + 2(1-\sigma\Gamma)\gamma^2 \\ c_3 = \sigma\mathrm{Pr}^{-1}\gamma^2 + (1-\sigma\Gamma)\gamma^4 \\ c_4 = \gamma^2,\quad c_5 = \gamma^2 + \sigma,\quad [U, V] = \int_{-0.5}^{+0.5} UV\,dz \end{gathered} \tag{5.9}$$

Определение критического значения числа Рэлея производилось численно на ЭВМ «Наири» для первого и второго приближений. В изученном диапазоне параметров возникновение колебательной неустойчивости не обнаружено. Критические числа Рэлея, определенные в предположении колебательной неустойчивости, велики. Данные вычислений приведены в табл. 1. Проверка критического числа Рэлея для $\Gamma = 0$ показала полное совпадение значений с [5].

6. Зная конкретный вид функции $N(\tau)$, можно прийти к зависимостям, справедливым для различных моделей.

Ньютоновская жидкость [5]

$$N(\tau) = \eta_0\,\delta(\tau) \tag{6.1}$$

Максвелловская жидкость [8]

(6.2) $N(\tau) = \eta_0 \delta(\tau - \lambda_1)$

(6.3) $\Gamma = \lambda_1 \varkappa / d^2$

Жидкость Олдройда (тип B) [6]

(6.4) $N(\tau) = \eta_0 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \delta(\tau) + \eta_0 \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1} \delta(\tau - \lambda_1)$

(6.5) $\Gamma = \frac{\lambda_1 \varkappa}{d^2}\left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)$

где λ_1 — время релаксации, λ_2 — время ретардации, $\delta(\tau)$ — дельта-функция Дирака.

Линейная вязкоупругая жидкость [9]

(6.6) $(1 - \sigma\Gamma) = \frac{1}{\eta_0}\int\limits_0^\infty N(\tau) e^{-p\tau} d\tau = \frac{\eta(p)}{\eta_0}$

При $p = 0$, $\eta_0 = \eta(0)$ — наибольшая ньютоновская вязкость.

Если $p = i\omega$, то $\eta(i\omega) = \eta'(\omega) - i\eta''(\omega)$ является комплексной вязкостью, определенной в линейной теории вязкоупругости.

Существует связь между жидкостью «второго порядка» и жидкостью B' [10].

Запишем уравнение, описывающее жидкость второго порядка [11]

(6.7) $T_{ij} = -\pi\delta_{ij} + \varphi_1 e_{ij} + \varphi_2 a_{ij} + \varphi_3 e_{ik} e_{kj}$

(6.8) $a_{ij} = \frac{De_{ij}}{Dt} + e_{ik}\frac{\partial v_k}{\partial x_j} + e_{kj}\frac{\partial v_k}{\partial x_i}$

где δ_{ij} — символ Кронекера, φ_i — вискозиметрические функции.

Формальный ряд решений (2.8) относительно функции смещения есть

(6.9) $x_i' = \sum\limits_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}(t' - t)^n \frac{D^n x_i}{Dt^n}$

и представляет собой разложение в ряд Тейлора по обратному времени.

Аналогично можно записать

(6.10) $e_{ij}(x', t') = \sum\limits_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}(t' - t)^n \frac{D^n e_{ij}(x, t)}{Dt^n}$

Таблица 1

Γ	Pr	γ_*	$R_* \cdot 10^{-5}$
0.001	10	33.01	12.608
	100	31.62	10.646
	0.1	46.77	50.000
0.005	1.0	19.71	1.697
	10	14.48	0.535
	100	13.86	0.455
	0.1	32.98	12.556
	1.0	13.71	0.438
0.01	10	9.98	0.145
	100	9.54	0.126
	0.1	23.18	3.167
	1.0	9.34	0.117
0.02	10	6.67	0.045
	100	6.38	0.0404
	0.1	14.37	0.519
	1.0	5.01	0.025
0.05	10	3.35	0.0174
	100	3.20	0.0171
	0.1	9.74	0.134
	1.0	1.93	0.022
	10	0.62	0.139
	100	0.39	0.333

Использование (6.9) и (6.10) позволяет получить из (1.2) с учетом членов первого порядка малости соотношение

(6.11) $T_{ik} = -\pi\delta_{ik} + \int\limits_{-\infty}^{t} \psi(t - t')[e_{ik} + (t' - t) a_{ik}] dt' + \ldots$

Таким образом

$$T_{ik} = -\pi\delta_{ik} + \varphi_1 e_{ik} + \varphi_2 a_{ik} + \ldots \tag{6.12}$$

$$\varphi_1 = \int_{-\infty}^{t} \psi(t - t')\, dt' \tag{6.13}$$

$$\varphi_2 = \int_{-\infty}^{t} (t' - t)\, \psi(t - t')\, dt' \tag{6.14}$$

Использование (1.3) приводит к выражениям

$$\eta_0 = \varphi_1 = \int_0^{\infty} N(\tau)\, d\tau \tag{6.15}$$

$$\varphi_2 = -\int_0^{\infty} \tau N(\tau)\, d\tau \tag{6.16}$$

$$\Gamma = -\varphi_2 \varkappa \,/\, \eta_0 d^2 \tag{6.17}$$

Приведение уравнения (2.10) к известному виду для случаев максвелловской жидкости и жидкости Олдройда (типа B) возможно при условии, если пренебречь членом $(\sigma\Gamma)^2$. При получении исходного уравнения (2.10) учитываются только линейные члены в разложении выражения, появляющегося в компонентах тензоров напряжения

$$\eta = \int_0^{\infty} \frac{N(\tau)}{1 + p\tau}\, d\tau \tag{6.18}$$

Это соответствует жидкости со слабой упругостью, когда $N(\tau)$ быстро убывает. Как показано в [6], если упругость жидкости меньше критического значения, принцип монотонности возмущения справедлив. Замена (6.18) выражением для комплексной вязкости обнаруживает характерные черты упруговязких жидкостей [9]. В этом случае задача решалась для двух жестких границ и реализовалась на ЭВМ «Одра-1204». Данные для критических параметров приведены в табл. 2. Принималось, что безразмерные величины удовлетворяют соотношениям $\hat\lambda_{+1}\omega_{+} = \lambda_1\omega$, $\hat\lambda_{+1} = \lambda_1 (\varkappa \,/\, d^2)$ [9].

Таблица 2

Pr	λ_{+1}	R_*			γ_*			ω_{+*}		
		[8]	[9]	из (5.8)	[8]	[9]	из (5.8)	[8]	[9]	из (5.8)
1.0	0.1	877.8	894.9	893.1	4.917	4.869	4.9	15.07	14.92	14.95
1.0	1.0	51.58	51.28	51.18	3.696	3.621	3.6	6.061	6.061	6.031
10	0.1	230.0	235.2	234.6	7.309	7.198	7.3	76.68	75.64	76.6
10	1.0	7.496	7.521	7.507	4.72	4.658	4.7	20.77	20.71	20.74
100	0.1	130.1	133.9	133.8	11.96	11.75	11.7	385.8	376.8	377.0
100	1.0	2.203	2.237	2.232	7.297	7.145	7.2	83.45	82.24	82.73
1000	0.1	108.0	112.0	111.2	20.46	19.99	20.1	2052.0	2006	2017
1000	1.0	1.289	1.329	1.322	12.76	11.74	11.8	418.8	389.0	390.9

Наличие времени релаксации уменьшает устойчивость, а время ретардации стабилизирует слой. Авторы [8] считали конститутивное уравнение Максвелла достаточным, чтобы обнаруживать основные эффекты влияния вязкоупругости на тепловую неустойчивость. Существует резкое отличие в поведении максвелловской и олдройдовской жидкостей [6].

Таким образом, адекватность принятой реологической модели является существенной для обнаружения возникновения колебательной неустойчивости.

Хотя теоретически колебательная неустойчивость возможна, как показано в упомянутых работах, ее нельзя наблюдать экспериментально [12]. Предполагая стационарную неустойчивость, удалось экспериментально определить наибольшую ньютоновскую вязкость, являющуюся фундаментальной реологической характеристикой жидкости [13–16].

В табл. 3 приводятся данные о возникновении конвективной неустойчивости для различных моделей упруговязких жидкостей при подогреве снизу.

Таблица 3

Модель жидкости	Вид граничных условий		Источник
	обе границы свободные	обе границы жесткие	
Жидкость В	—	стационарная	[17]
Олдройда	колебательная	колебательная	[6, 12]
Жидкость Максвелла	колебательная	колебательная	[8, 9]
Жидкость «второго порядка»	—	стационарная	[18–20]
Интегральная модель	—	стационарная	[19, 20]

В данной работе не рассмотрены жидкости с нелинейной вязкостью. Это свойство жидкости является дестабилизирующим фактором [14–16]. Одновременный учет упругости и нелинейной вязкости не исследован.

Автор благодарит А. Г. Усманова за внимание к работе.

Поступила 22 I 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Walters K.* Non-Newtonian effects in some elastico-viscous liquids whose behaviour at small rates of shear is characterized by a general linear equation of state. Quart. J. Mech. Appl. Math., 1962, vol. 15, No. 1.
2. *Roberts J. E.* Pressure distribution in liquids in laminar shearing motion and comparision with predictions from various theories. Proc. 2nd Internat. Congress Rheol. Oxford, 1953. London, Butterworths Sci. Publ., 1954.
3. *Walters K.* Use of idealized relaxation spectra in the interpretation of experimental results concerning polymer solutions. J. Appl. Phys., 1961, vol. 32, No. 10.
4. *Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М., «Наука», 1972.
5. *Chandrasekhar S.* Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Oxford, Clarendon Press., 1961.
6. *Takashima M.* Thermal instability in a viscoelastic fluid layer. I. J. Phys. Soc. Japan, 1972, vol. 33, No. 2.
7. *Reid W. H., Harris D. L.* Some further results on the Benard problem. Phys. Fluids, 1958, vol. 1, No. 2.
8. *Vest C. M., Arpaci V. S.* Overstability of a viscoelastic fluid layer heated from below. J. Fluid Mech., 1969, vol. 36, pt. 3.
9. *Sokolov M., Tanner R. I.* Convective stability of a general viscoelastic fluid heated from below. Phys. Fluids, 1972, vol. 15, No. 4.
10. *Mook D. T., Graebel W. P.* Stability of plane Poiseuille flows of viscoelastic liquids: An asymptotic solution. J. Hydronaut., 1971, vol. 5, No. 1.
11. *Markovitz H., Coleman B. D.* Incompressible second — order fluids. In: Adv. Appl. Mech., vol. 8. New York — London, Acad.Press., 1964.
12. *Green T.* Oscillating convection in an elasticoviscous liquid. Phys. Fluids, 1968, vol. 11, No. 7.

13. *Liang S. F., Acrivos A.* Experiments on buoyancy driven convection in non-Newtonian fluid. Rheol. Acta, 1970, vol. 9, No. 3.
14. *Ozoe H., Churchill S. W.* Hydrodynamic stability and natural convection in Ostwalde — de Waele and Ellis fluids: the development of a numerical solution. A. I. Ch. E. Journal, 1972, vol. 18, No. 6.
15. *Ozoe H., Churchill S. W.* Hydrodynamic stability and natural convection in Newtonian and non — Newtonian fluids heated from below. A. I. Ch. E. Sympos., 1972, vol. 69, No. 131.
16. *Tien C., Tsuei H. S., Sun Z. S.* Thermal instability of a horizontal layer of non-Newtonian fluid, heated from below. Internat. J. Heat Mass Transfer, 1969, vol. 12, No. 9.
17. *Herbert D. M.* On the stability of visco-elastic liquids in heated plane Couette flow. J. Fluid Mech., 1963, vol. 17, pt 3.
18. *Müller U.* Das Stabilitatsverhalten einer ebenen Couette — Stromung in einer geheizten nichtlinear viskosen Flussigkeit. Acta Mech., 1968, vol. 6, No. 1.
19. *McIntire L. V. Schowalter W. R.* Stability of viscoelastic fluids: plane Couette flow with superposed temperature gradient. Trans. Soc. Rheol., 1970, vol. 14, No. 4.
20. *McIntire L. V., Schowalter W. R.* Hydrodynamic stability of viscoelastic fluids: Importance of fluid model, overstability and form of disturbance. A. I. Ch. E. Journal, 1972, vol. 18, No. 1.