УДК 539.3

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИЙ НЕОСЕСИММЕТРИЧНЫЙ УДАР ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТЕЛА ПО СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ

Д. Г. Бирюков, И. Г. Кадомцев

Ростовский государственный университет, 344090 Ростов-на-Дону
E-mail: diminna@mail.ru

Изложен способ расчета сферической оболочки при неосесимметричном ударе массивного тела. Использованы безмоментные уравнения движения оболочки, решение которых получено с помощью преобразования Лапласа и асимптотического метода разложения искомых величин по малому параметру. Контактная сила взаимодействия $P(t)$ определялась на основе упругопластической модели местного смятия для параболического ударника. Результаты решения представлены в виде графиков. Достоверность полученных результатов подтверждается хорошим совпадением решения с предельными случаями — осесимметричным ударом и ударом по полупространству.

Ключевые слова: контактная задача, упругопластический удар, параболическое тело, сферическая оболочка.

Рассмотрим неосесимметричный нормальный удар массивного тела по круговому сектору сферической оболочки, шарнирно опертой по контуру. Общие перемещения оболочки считаем упругими, а местные, в зоне контакта тела с оболочкой, — упругопластическими. В начальный момент времени оболочка находится в покое, а тело обладает скоростью V_0, которая много меньше скорости упругих волн в оболочке. Это позволяет пренебречь инерцией местного смятия в области контакта. В результате зависимость местного смятия α от контактной силы P можно определять так же, как и в статической задаче.

Направим координатные линии по меридиану φ и параллели θ. Удар происходит в точке $(\varphi_1, 0)$ телом массы m с упругими постоянными E_2, ν_2, пластической постоянной k_2 и радиусом кривизны в точке контакта R_2. Угол раствора купола оболочки — φ_0.

Если обозначить нормальное перемещение оболочки в точке контакта через w, а перемещение падающего тела — через s, то имеет место зависимость [1]

$$s = w + \alpha. \tag{1}$$

Перемещение ударника s определяем из дифференциального уравнения движения тела $m\ddot{s} = -P(t)$, интегрируя которое с учетом начальных условий $s_0 = 0$, $\dot{s}_0 = V_0$, получаем

$$s(t) = V_0 t - \frac{1}{m} \int\limits_0^t \int\limits_0^{t_1} P(t_2)\, dt_1\, dt_2. \tag{2}$$

Перемещение оболочки под действием силы $P(t)$ определим из безмоментных уравнений движения сферической оболочки, которые имеют вид [2]

$$\begin{gathered}
(N_\varphi \sin\varphi)_{,\varphi} + N_{\varphi\theta,\theta} - N_\theta \cos\varphi = \rho h R_1 \ddot{u}_\varphi \sin\varphi,\\
(N_{\varphi\theta} \sin\varphi)_{,\varphi} + N_{\theta,\theta} + N_{\varphi\theta} \cos\varphi = \rho h R_1 \ddot{u}_\theta \sin\varphi,\\
N_\varphi + N_\theta = -\rho h R_1 \ddot{w} + q_3 R_1,
\end{gathered} \tag{3}$$

где

$$N_\varphi = E_1 h((1-\nu_1^2)R_1)^{-1}(u_{\varphi,\varphi} + w + \nu_1(u_\varphi \operatorname{ctg}\varphi + u_{\theta,\theta}\sin^{-1}\varphi + w)),$$

$$N_\theta = E_1 h((1-\nu_1^2)R_1)^{-1}(u_\varphi \operatorname{ctg}\varphi + u_{\theta,\theta}\sin^{-1}\varphi + w + \nu_1(u_{\varphi,\varphi} + w)),$$

$$N_{\varphi\theta} = E_1 h(2(1+\nu_1)R_1)^{-1}(u_{\theta,\varphi} - u_\theta \operatorname{ctg}\varphi + u_{\varphi,\theta}\sin^{-1}\varphi).$$

Здесь ρ — плотность материала; h, R_1 — толщина и радиус оболочки; q_3 — нагрузка; E_1, ν_1 — упругие постоянные оболочки. Пластическую постоянную оболочки обозначим k_1.

Принимаются граничные условия

$$u_\varphi\big|_{\varphi=\varphi_0} = 0, \qquad w\big|_{\varphi=\varphi_0} = 0. \tag{4}$$

Введем следующие безразмерные величины:

$$v = \frac{u_\varphi}{R_1}, \qquad u = \frac{u_\theta}{R_1}, \qquad w = \frac{w}{R_1}, \qquad \tau = \frac{tc}{R_1}, \qquad c^2 = \frac{E_1}{(1-\nu_1^2)\rho}.$$

Тогда после исключения усилий N_φ, N_θ, $N_{\varphi\theta}$ система (3) примет вид

$$v_{,\varphi\varphi}\sin\varphi + 0{,}5(1-\nu_1)v_{,\theta\theta}\sin^{-1}\varphi + 0{,}5(1+\nu_1)u_{,\theta\varphi} + v_{,\varphi}\cos\varphi -$$
$$- (\operatorname{ctg}\varphi\cos\varphi + \nu_1\sin\varphi)v - 0{,}5(3-\nu_1)u_{,\theta}\operatorname{ctg}\varphi + (1+\nu_1)w_{,\varphi}\sin\varphi = v_{,\tau\tau}\sin\varphi,$$

$$0{,}5(1-\nu_1)u_{,\varphi\varphi}\sin\varphi + u_{,\theta\theta}\sin^{-1}\varphi + 0{,}5(1+\nu_1)v_{,\theta\varphi} + 0{,}5(1-\nu_1)u_{,\varphi}\cos\varphi +$$
$$+ 0{,}5(1-\nu_1)(\sin\varphi - \operatorname{ctg}\varphi\cos\varphi)u + 0{,}5(3-\nu_1)v_{,\theta}\operatorname{ctg}\varphi + (1+\nu_1)w_{,\theta} = u_{,\tau\tau}\sin\varphi,$$

$$(1+\nu_1)(v_{,\varphi} + v\operatorname{ctg}\varphi + 2w + u_{,\theta}\sin^{-1}\varphi) = -w_{,\tau\tau} + q,$$

где $q = (1-\nu_1^2)(E_1 h)^{-1}R_1 q_3$.

Сделаем замену $V = v\sin\varphi$, $U = u\sin\varphi$:

$$V_{,\varphi\varphi} + 0{,}5(1-\nu_1)V_{,\theta\theta}\sin^{-2}\varphi + 0{,}5(1+\nu_1)U_{,\theta\varphi}\sin^{-1}\varphi - V_{,\varphi}\operatorname{ctg}\varphi +$$
$$+ (1-\nu_1)V - 2U_{,\theta}\cos\varphi\sin^{-2}\varphi + (1+\nu_1)w_{,\varphi}\sin\varphi = V_{,\tau\tau},$$

$$0{,}5(1-\nu_1)U_{,\varphi\varphi} + U_{,\theta\theta}\sin^{-2}\varphi + 0{,}5(1+\nu_1)V_{,\theta\varphi}\sin^{-1}\varphi - 0{,}5(1-\nu_1)U_{,\varphi}\operatorname{ctg}\varphi +$$
$$+ (1-\nu_1)U + (1-\nu_1)V_{,\theta}\cos\varphi\sin^{-2}\varphi + (1+\nu_1)w_{,\theta} = U_{,\tau\tau},$$

$$(1+\nu_1)(V_{,\varphi}\sin^{-1}\varphi + 2w + U_{,\theta}\sin^{-2}\varphi) = -w_{,\tau\tau} + q.$$

Применяя преобразование Лапласа по времени t и обозначив изображения V, U, w и q через V^*, U^*, w^* и q^* соответственно, получим

$$V^*_{,\varphi\varphi} + 0{,}5(1-\nu_1)V^*_{,\theta\theta}\sin^{-2}\varphi + 0{,}5(1+\nu_1)U^*_{,\theta\varphi}\sin^{-1}\varphi -$$
$$- V^*_{,\varphi}\operatorname{ctg}\varphi + (1-\nu_1-p^2)V^* - 2U^*_{,\theta}\cos\varphi\sin^{-2}\varphi + (1+\nu_1)w^*_{,\varphi}\sin\varphi = 0,$$

$$0{,}5(1-\nu_1)U^*_{,\varphi\varphi} + U^*_{,\theta\theta}\sin^{-2}\varphi + 0{,}5(1+\nu_1)V^*_{,\theta\varphi}\sin^{-1}\varphi - 0{,}5(1-\nu_1)U^*_{,\varphi}\operatorname{ctg}\varphi + \tag{5}$$
$$+ (1-\nu_1-p^2)U^* + (1-\nu_1)V^*_{,\theta}\cos\varphi\sin^{-2}\varphi + (1+\nu_1)w^*_{,\theta} = 0,$$

$$(1+\nu_1)(V^*_{,\varphi}\sin^{-1}\varphi + (2 + p^2(1+\nu_1)^{-1})w^* + U^*_{,\theta}\sin^{-2}\varphi) = q^*.$$

Из третьего уравнения находим выражение для $U^*_{,\theta}$:

$$U^*_{,\theta} = (q^* - (1+\nu_1)V^*_{,\varphi}\sin^{-1}\varphi - (2(1+\nu_1) + p^2)w^*)(1+\nu_1)^{-1}\sin^{-2}\varphi.$$

Подставим $U^*_{,\theta}$ в (5), предварительно продифференцировав второе уравнение по θ. В результате система примет следующий вид:

$$\begin{gathered}0{,}5(1-\nu_1)V^*_{,\varphi\varphi}+0{,}5(1-\nu_1)V^*_{,\theta\theta}\sin^{-2}\varphi+0{,}5(1-\nu_1)V^*_{,\varphi}\operatorname{ctg}\varphi+(1-\nu_1-p^2)V^*-\\ -0{,}5p^2w^*_{,\varphi}\sin\varphi+(1-\nu_1)(2+p^2(1+\nu_1)^{-1})w^*\cos\varphi+\\ +0{,}5q^*_{,\varphi}\sin\varphi-(1-\nu_1)(1+\nu_1)^{-1}q^*\cos\varphi=0,\\ -0{,}5(1-\nu_1^2)V^*_{,\varphi\varphi\varphi}\sin\varphi-0{,}5(1-\nu_1^2)V^*_{,\theta\theta\varphi}\sin^{-1}\varphi+(1-\nu_1^2)V^*_{,\theta\theta}\operatorname{ctg}\varphi-\\ -0{,}5(1-\nu_1^2)V^*_{,\varphi\varphi}\cos\varphi+((1+\nu_1)p^2\sin\varphi+0{,}5(1-\nu_1^2)(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)\sin^{-1}\varphi)V^*_{,\varphi}-\\ -0{,}5(1-\nu_1)(2(1+\nu_1)+p^2)w^*_{,\varphi\varphi}\sin^2\varphi+((1+\nu_1)^2-(2(1+\nu_1)+p^2))w^*_{,\theta\theta}-\\ -1{,}5(1-\nu_1)(2(1+\nu_1)+p^2)w^*_{,\varphi}\sin\varphi\cos\varphi+p^2(2(1+\nu_1)+p^2)w^*\sin^2\varphi+\\ +0{,}5(1-\nu_1)q^*_{,\varphi\varphi}\sin^2\varphi+q^*_{,\theta\theta}+1{,}5(1-\nu_1)q^*_{,\varphi}\sin\varphi\cos\varphi-p^2q^*\sin^2\varphi=0.\end{gathered}\tag{6}$$

Решение (6) ищем в виде рядов по полиномам Лежандра, которые удовлетворяют граничным условиям (4):

$$w^*=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}w_{2n+1m}P_{2n+1}(\cos\delta_1\varphi)\cos m\theta,$$

$$V^*=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}V_{2n+1m}P_{2n+1}(\cos\delta_1\varphi)\cos m\theta,\qquad \delta_1=\pi/(2\varphi_0).$$

Нагрузку $q(t,\varphi,\theta)$ от сосредоточенной силы $P(t)\delta(\varphi-\varphi_1)\delta(\theta-0)$ также раскладываем в ряд по полиномам Лежандра:

$$q=\frac{P(t)}{2\pi R_1^2(1-\cos\varphi_0)}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(4n+3)P_{2n+1}(\cos\delta_1\varphi_1)P_{2n+1}(\cos\delta_1\varphi)\cos m\theta,$$

$$q^*=\frac{P^*(p)}{2\pi R_1^2(1-\cos\varphi_0)}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(4n+3)P_{2n+1}(\cos\delta_1\varphi_1)P_{2n+1}(\cos\delta_1\varphi)\cos m\theta.$$

Подставив разложения w^*, V^* и q^* в (6) и используя свойство ортогональности системы косинусов на отрезке $[-\pi,\pi]$, получим

$$\begin{gathered}0{,}5(1-\nu_1)\sum_{n=0}^{\infty}V_{2n+1m}P_{2n+1,\varphi\varphi}-0{,}5(1-\nu_1)m^2\sin^{-2}\varphi\sum_{n=0}^{\infty}V_{2n+1m}P_{2n+1}+\\ +0{,}5(1-\nu_1)\operatorname{ctg}\varphi\sum_{n=0}^{\infty}V_{2n+1m}P_{2n+1,\varphi}+(1-\nu_1-p^2)\sum_{n=0}^{\infty}V_{2n+1m}P_{2n+1}-\\ -0{,}5p^2\sin\varphi\sum_{n=0}^{\infty}w_{2n+1m}P_{2n+1,\varphi}+(1-\nu_1)(2+p^2(1+\nu_1)^{-1})\cos\varphi\sum_{n=0}^{\infty}w_{2n+1m}P_{2n+1}+\\ +0{,}5C\sin\varphi\sum_{n=0}^{\infty}(4n+3)P_{2n+1}(\cos\delta_1\varphi_1)P_{2n+1,\varphi}-\\ -(1-\nu_1)(1+\nu_1)^{-1}C\cos\varphi\sum_{n=0}^{\infty}(4n+3)P_{2n+1}(\cos\delta_1\varphi_1)P_{2n+1}=0,\end{gathered}$$

$$
\begin{gathered}
-0{,}5(1-\nu_1^2)\sin\varphi\sum_{n=0}^{\infty}V_{2n+1m}P_{2n+1,\varphi\varphi\varphi}+0{,}5(1-\nu_1^2)m^2\sin^{-1}\varphi\sum_{n=0}^{\infty}V_{2n+1m}P_{2n+1,\varphi}-\\
-(1-\nu_1^2)m^2\operatorname{ctg}\varphi\sum_{n=0}^{\infty}V_{2n+1m}P_{2n+1}-0{,}5(1-\nu_1^2)\cos\varphi\sum_{n=0}^{\infty}V_{2n+1m}P_{2n+1,\varphi\varphi}+\\
+((1+\nu_1)p^2\sin\varphi+0{,}5(1-\nu_1^2)(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)\sin^{-1}\varphi)\sum_{n=0}^{\infty}V_{2n+1m}P_{2n+1,\varphi}-\\
-0{,}5(1-\nu_1)(2(1+\nu_1)+p^2)\sin^2\varphi\sum_{n=0}^{\infty}w_{2n+1m}P_{2n+1,\varphi\varphi}+\\
+((1+\nu_1)^2-(2(1+\nu_1)+p^2))m^2\sum_{n=0}^{\infty}w_{2n+1m}P_{2n+1}-\\
-1{,}5(1-\nu_1)(2(1+\nu_1)+p^2)\sin\varphi\cos\varphi\sum_{n=0}^{\infty}w_{2n+1m}P_{2n+1,\varphi}+\\
+p^2\sin^2\varphi(2(1+\nu_1)+p^2)\sum_{n=0}^{\infty}w_{2n+1m}P_{2n+1}+\\
+0{,}5(1-\nu_1)C\sin^2\varphi\sum_{n=0}^{\infty}(4n+3)P_{2n+1}(\cos\delta_1\varphi_1)P_{2n+1,\varphi\varphi}-\\
-m^2C\sum_{n=0}^{\infty}(4n+3)P_{2n+1}(\cos\delta_1\varphi_1)P_{2n+1}+\\
+1{,}5(1-\nu_1)C\sin\varphi\cos\varphi\sum_{n=0}^{\infty}(4n+3)P_{2n+1}(\cos\delta_1\varphi_1)P_{2n+1,\varphi}-\\
-p^2C\sin^2\varphi\sum_{n=0}^{\infty}(4n+3)P_{2n+1}(\cos\delta_1\varphi_1)P_{2n+1}=0.
\end{gathered}
\tag{7}
$$

Здесь $C=P^*(p)(2\pi R_1^2(1-\cos\varphi_0))^{-1}$, $P_{2n+1}=P_{2n+1}(\cos\delta_1\varphi)$.

Коэффициенты V_{2n+1m}, w_{2n+1m} находим с помощью метода малого параметра $\varepsilon=p^{-2}$. Отметим, что с помощью этого метода Н. А. Кильчевский исследовал удар по произвольной бесконечной оболочке без учета граничных условий и получил ряд качественных результатов [3]. Представим искомые величины в виде

$$
\begin{gathered}
V_{2n+1m}(p)=V^0_{2n+1m}\varepsilon^0+V^1_{2n+1m}\varepsilon^1+V^2_{2n+1m}\varepsilon^2+O(\varepsilon^3),\\
w_{2n+1m}(p)=w^0_{2n+1m}\varepsilon^0+w^1_{2n+1m}\varepsilon^1+w^2_{2n+1m}\varepsilon^2+O(\varepsilon^3).
\end{gathered}
$$

Подставляя эти разложения в систему (7) и собирая коэффициенты при одинаковых степенях ε, находим V^i_{2n+1m}, w^i_{2n+1m}, $i=0,1,2$. Для w_{2n+1m} получаем

$$
w_{2n+1m}(p)=C(4n+3)P_{2n+1}(\cos\delta_1\varphi_1)(p^{-2}-2(1+\nu_1)p^{-4})+O(\varepsilon^3).
$$

После применения обратного преобразования Лапласа для перемещения оболочки w, учитывая первые три члена разложения по $(\tau-\tau_1)$, имеем

$$
w(\varphi,\theta,\tau)=\frac{1-\nu_1^2}{2\pi hE_1R_1(1-\cos\varphi_0)}\int_0^{\tau}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(4n+3)P(\tau_1)\Big((\tau-\tau_1)-\frac{2}{3!}\,(1+\nu_1)(\tau-\tau_1)^3\Big)\times
$$
$$
\times P_{2n+1}(\cos\delta_1\varphi_1)P_{2n+1}(\cos\delta_1\varphi)\cos m\theta\,d\tau_1. \tag{8}
$$

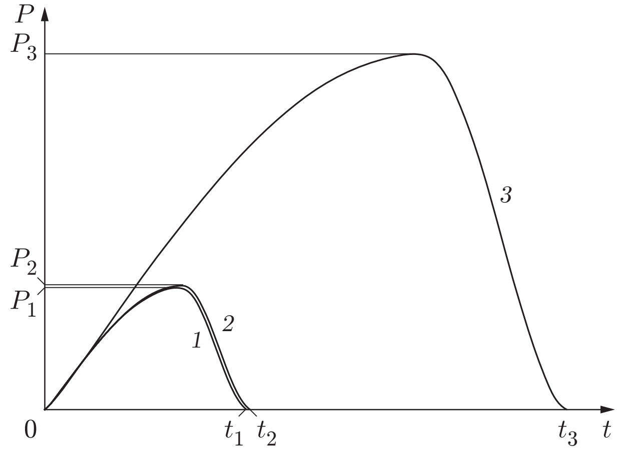

Рис. 1. Зависимости $P(t)$ при $\varphi_1 = 0{,}001$ рад:
$P_1 = 18{,}5$ кН; $P_2 = 18{,}9$ кН; $P_3 = 54{,}4$ кН; $t_1 = 4{,}165 \cdot 10^{-5}$ с; $t_2 = 4{,}266 \cdot 10^{-5}$ с; $t_3 = 10{,}767 \cdot 10^{-4}$ с

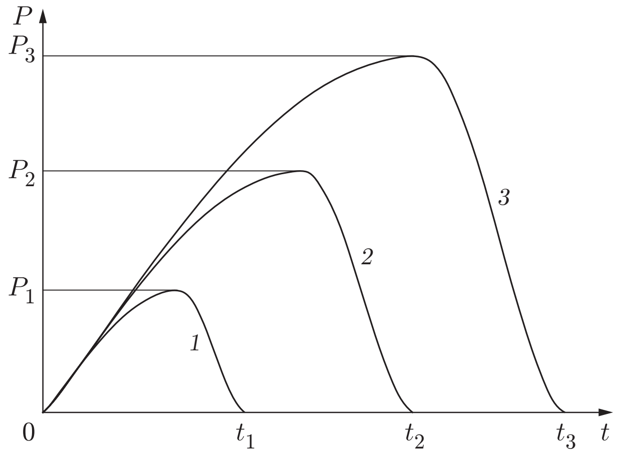

Рис. 2

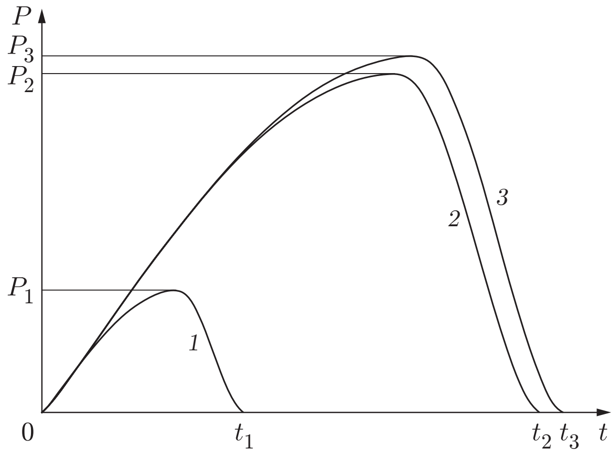

Рис. 3

Рис. 2. Зависимости $P(t)$ при $\varphi_1 = 0{,}01$ рад:
$P_1 = 18{,}5$ кН; $P_2 = 36{,}7$ кН; $P_3 = 54{,}4$ кН; $t_1 = 4{,}165 \cdot 10^{-5}$ с; $t_2 = 7{,}720 \cdot 10^{-5}$ с; $t_3 = 10{,}767 \cdot 10^{-4}$ с

Рис. 3. Зависимости $P(t)$ при $\varphi_1 = 0{,}1$ рад:
$P_1 = 18{,}5$ кН; $P_2 = 51{,}6$ кН; $P_3 = 54{,}4$ кН; $t_1 = 4{,}165 \cdot 10^{-5}$ с; $t_2 = 10{,}361 \cdot 10^{-4}$ с; $t_3 = 10{,}767 \cdot 10^{-4}$ с

Для α используем упругопластическую модель [4]:

$$\alpha = \begin{cases} bP^{2/3}, & dP/dt > 0,\ P_{\max} < P_1, \\ b_f P^{2/3} + \alpha_p(P_{\max}), & dP/dt < 0,\ P_{\max} > P_1, \\ (1+\beta)c_1 P^{1/2} + (1-\beta)Pd, & dP/dt > 0,\ P_{\max} > P_1, \end{cases} \tag{9}$$

где $b = (9/(16E^2R))^{1/3}$; $E = E_1E_2((1-\nu_1^2)E_2 + (1-\nu_2^2)E_1)^{-1}$; $R^{-1} = R_2^{-1} - R_1^{-1}$; $P_1 = \chi^3(3R/(4E))^2$; $\chi = \pi k\lambda$; k — наименьшая из двух пластических констант соударяющихся тел; $\lambda = 5{,}7$; $b_f = R_f^{-1/3}(3/(4E))^{2/3}$; $R_f = (4/3)EP_{\max}^{1/2}\chi^{-3/2}$; $\alpha_p(P_{\max}) = (1-\beta)P_{\max}(2\chi R_p)^{-1}$; $R_p^{-1} = R^{-1} - R_f^{-1}$; $\beta = 0{,}33$; $c_1 = 3\chi^{1/2}(8E)^{-1}$; $d = (2\chi R)^{-1}$.

Подставив (2), (8) и (9) в (1), приходим к нелинейному интегральному уравнению относительно $P(t)$, которое решается по итерационной схеме Тимошенко [1, 5].

Результаты численного решения рассмотренной задачи приведены на рис. 1–3 в виде графиков зависимости $P(t)$ для следующих значений параметров задачи: $R_1 = 1$ м, $h =$

0,01 м, $\varphi_0 = 90°$, $R_2 = 0{,}02$ м, $m = 0{,}25$ кг, материал — сталь. Скорость $V_0 = 10$ м/с. Кривая *1* на рисунках соответствует осесимметричному удару, *2* — неосесимметричному удару, *3* — удару по полупространству.

Из графиков видно, что при стремлении угла удара φ_1 к нулю сила взаимодействия $P(t)$ в неосесимметричном случае приближается к значению $P(t)$ в осесимметричном случае. И наоборот, при стремлении φ_1 к φ_0 происходит сближение графиков, соответствующих неосесимметричному случаю и случаю удара по полупространству. Физический смысл заключается в том, что при приближении точки удара к месту закрепления оболочка ведет себя более жестко.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Тимошенко С. П.** Прочность и колебания элементов конструкций. М.: Наука, 1975.
2. **Гольденвейзер А. Л.** Теория упругих тонких оболочек. М.: Гостехиздат, 1953.
3. **Кильчевский Н. А.** Динамическое контактное сжатие твердых тел. Удар. Киев: Наук. думка, 1976.
4. **Александров В. М., Кадомцев И. Г., Царюк Л. Б.** Осесимметричные контактные задачи для упругопластических тел // Трение и износ. 1984. Т. 1, № 1. С. 16–26.
5. **Бирюков Д. Г., Кадомцев И. Г.** Динамический упругопластический контакт ударника и сферической оболочки // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 5. С. 171–175.

Поступила в редакцию 1/III 2004 г.,
в окончательном варианте — 22/VI 2004 г.