

О ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ МОДЫ $m=1$ ПРИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ПЛАЗМЕННОГО ШНУРА

В. Н. Белоозеров, В. В. Жуков, М. Г. Никулин

(Москва)

Рассматривается параметрическое возбуждение длинноволновых магнитогидродинамических колебаний типа $m = 1$ в цилиндрическом плазменном проводнике с переменным продольным током высокой частоты. Плазменный цилиндр помещен в постоянное продольное магнитное поле и окружен проводящим кожухом. Задача решается на модели гибкого шнура в предположении идеальной проводимости плазмы и кожуха. Для исследования устойчивости уравнения с периодическими коэффициентами, описывающего колебания шнура, используется метод Хилла. Приводятся результаты расчета на ЭВМ инкрементов неустойчивости колебаний в четырех первых резонансных зонах для различных значений параметров системы.

При использовании переменного тока высокой частоты для динамической стабилизации плазменного цилиндра в продольном магнитном поле может происходить, как показано в [1], параметрическое возбуждение магнитогидродинамических собственных колебаний цилиндра, характеризуемых азимутальным волновым числом $m = 1$. В работе [2] определены границы двух первых зон параметрического возбуждения моды $m = 1$ и получено аналитическое выражение для максимального инкремента нарастания коротковолновых колебаний ($ka \gg 1$, k — волновое число возмущения, a — радиус цилиндра). Представляет интерес более детальное исследование данной неустойчивости в диапазоне длинноволновых возмущений ($ka \lesssim 1$), которые должны возбуждаться в условиях эксперимента (например, [3, 4]). Эта задача решается в предлагаемой работе. Здесь проведен численный расчет инкрементов неустойчивости колебаний типа $m = 1$ с большими длинами волн, возбуждаемых в цилиндрическом плазменном проводнике высокочастотным продольным током. В отличие от [1, 2] учитывается влияние проводящего кожуха, окружающего плазменный цилиндр. Задача решается на модели гибкого шнура в предположении идеальной проводимости плазмы и кожуха. Для исследования устойчивости уравнения с периодическими коэффициентами, описывающего колебания шнура, используется метод Хилла [5]. Рассматриваются различные возможные режимы работы системы.

1. Постановка задачи. Пусть по поверхности цилиндрического плазменного проводника течет высокочастотный продольный ток $I = I_0 \cos \omega t$. Проводник помещен в постоянное продольное магнитное поле, равное B_e снаружи и B_i внутри плазмы, и окружен проводящим кожухом радиуса b . Давление плазмы p уравнивается средним по времени давлением магнитного поля

$$8\pi p = B_e^2 - B_i^2 + \langle B_a^2 \rangle \quad (1.1)$$

Здесь $B_a = B_{a0} \cos \omega t = 2I / ca$ — азимутальное поле тока I на поверхности шнура, угловые скобки означают усреднение по времени.

Исследование устойчивости данной системы относительно магнито-гидродинамических возмущений типа $m = 1$, при которых поверхность проводника описывается уравнением

$$r = a + \xi_1(t) \exp(ikz \pm i\theta) \quad (\xi_1 \ll a) \quad (1.2)$$

удобно проводить на модели гибкого шнура. При этом в магнитостатическом приближении вычисляется поперечная относительно оси z погонная сила F , действующая на возмущенный проводник, и затем рассматривается уравнение поперечного движения элемента длины проводника с погонной массой M

$$M d^2 \xi_1 / dt^2 = F \quad (1.3)$$

в котором уже явно учитывается зависимость магнитного поля, входящего в F , от времени. Сравнение с результатами строгого магнитогиродинамического анализа (правда, для случая статических полей) показывает, что данная модель достаточно хорошо описывает рассматриваемую систему, если плазма считается несжимаемой, а возмущения — длинноволновыми.

В рассматриваемом случае сила F может быть найдена по формулам работы [6] и имеет вид

$$F = -\frac{1}{4} [\alpha_e^\circ (ka B_e \pm B_a)^2 + \alpha_i (ka)^2 B_i^2 - B_a^2] \xi_1 \quad (1.4)$$

Здесь

$$\alpha_e^\circ = \frac{\alpha_e + \alpha_i \delta}{1 - \delta}, \quad \alpha_e = -\frac{K_1(ka)}{ka K_1'(ka)}$$

$$\alpha_i = \frac{I_1(ka)}{ka I_1'(ka)}, \quad \delta = \frac{K_1'(ka) I_1'(kb)}{I_1'(ka) K_1'(kb)}$$

$K_1(x)$, $I_1(x)$ — модифицированные функции Бесселя, штрих означает дифференцирование по аргументу. В отсутствие кожуха $\delta = 0$ и (1.4) переходит в соответствующее выражение из работы [2].

Вследствие принятой выше синусоидальной зависимости тока I от времени уравнение (1.3) является уравнением с периодическими коэффициентами. Подстановкой $\omega t = 2\tau$ оно приводится к стандартной форме уравнения Хилла [5] с тремя членами

$$d^2 \xi_1 / d\tau^2 + (\theta_0 + 2\theta_1 \cos 2\tau + 2\theta_2 \cos 4\tau) \xi_1 = 0 \quad (1.5)$$

Здесь

$$\theta_0 = 4(\omega_s/\omega)^2 [(ka)^2 (\alpha_e^\circ + \alpha_i h_i^2) + \frac{1}{2} (\alpha_e^\circ - 1) h_a^2]$$

$$\theta_1 = \pm 4(\omega_s/\omega)^2 ka \alpha_e^\circ h_a, \quad \theta_2 = 2(\omega_s/\omega)^2 (\alpha_e^\circ - 1) h_a^2$$

$$\omega_s = v_s/a, \quad v_s = B_e / \sqrt{4\pi\rho} \quad (\rho — \text{плотность плазмы})$$

$$h_i = B_i/B_e, \quad h_a = B_{a0}/B_e$$

Отметим, что ввиду (1.1) скорость v_s в типичных экспериментальных условиях, когда $\langle B_a^2 \rangle \ll B_e$, близка к скорости магнитного звука в плазме.

Коэффициенты уравнения (1.5) в области $ka \ll (a/b)h_a$, где существенно влияние кожуха, значительно отличаются от коэффициентов аналогичного уравнения из работы [2]. В частности, $\theta_2 \gg \theta_1$, так что при исследовании устойчивости нельзя пренебрегать членом с θ_2 в (1.5), как это делалось в [2].

Общее решение уравнения (1.5) записывается в виде [5]

$$\xi_1(\tau) = C_1 e^{\mu_1 \tau} \varphi_1(\tau) + C_2 e^{-\mu_1 \tau} \varphi_2(\tau)$$

где $\varphi_1(\tau)$, $\varphi_2(\tau)$ — периодические функции. Комплексный характеристический показатель μ , следуя методу Хилла [5], можно найти из уравнения

$$\sin^2(1/2\pi i\mu) = \Delta \sin^2(1/2\pi \sqrt{\theta_0}) \quad (1.6)$$

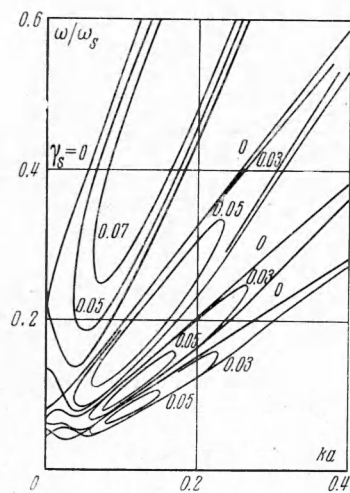
содержащего бесконечный определитель $\Delta \equiv [A_{m,n}]$, элементы которого, отсчитываемые от центрального, равны

$$A_{m,m} = 1, \quad A_{m,n} = \frac{\theta_{|m-n|}}{\theta_0 - 4m^2} \quad (m \neq n)$$

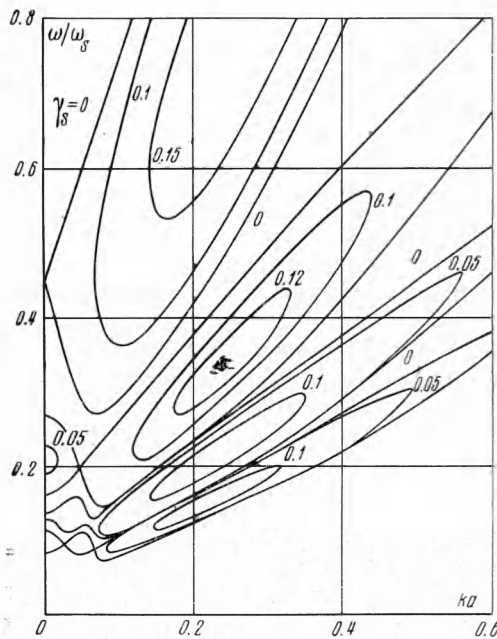
Для уравнения (1.5) $\theta_i \equiv 0$ при $i > 2$. Инкремент неустойчивости γ , очевидно, равен $(\omega/2) \operatorname{Re} \mu$. Используя (1.6), нетрудно показать, что для n -й резонансной зоны γ определяется уравнением

$$\operatorname{ch}(2\pi\gamma/\omega) = (-1)^n (1 - 2\Delta \sin^2(1/2\pi \sqrt{\theta_0})) \quad (1.7)$$

Решение уравнения (1.7) для n , изменяющегося от 1 до 4, и различных значений параметров h_a , h_i , b/a проводилось при помощи ЭВМ. Ранг определителя $[A_{m,n}]$ выбирался равным 11, что позволило обеспечить достаточную степень точности вычислений. Для каждой группы параметров на плоскости переменных ka , ω/ω_s определялись линии равных значений безразмерного инкремента $\gamma_s = \gamma/\omega_s$. Переменные ka , ω/ω_s изменялись в пределах $0 \leq ka, \omega/\omega_s \leq 1$. Этот диапазон наиболее интересен с практической



Фиг. 1

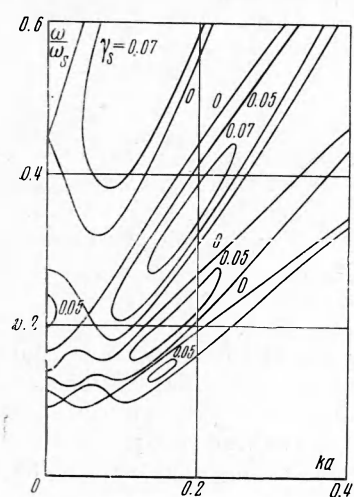


Фиг. 2

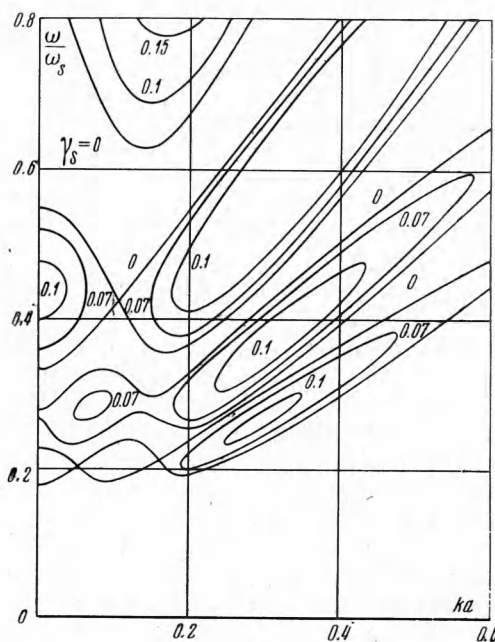
точки зрения, так как, во-первых, длинноволновые возмущения обладают наибольшим инкрементом неустойчивости [2], и, во-вторых, частота ω_s в типичных экспериментальных условиях по порядку величины равна $(0.5 \div 1) \cdot 10^8 \text{ сек}^{-1}$, тогда как ω обычно не превышает 10^7 сек^{-1} .

2. Обсуждение результатов. Результаты вычислений представлены на фиг. 1—5. На фиг. 1—4 построены линии равного инкремента для высокочастотного z -пинча ($h_i = 1$) со следующими параметрами: $h_a = 0.25$, $b/a = 2.5$ — фиг. 1; $h_a = 0.5$, $b/a = 2.5$ — фиг. 2; $h_a = 0.25$, $b/a = 1.5$ — фиг. 3; $h_a = 0.5$, $b/a = 1.5$ — фиг. 4. На фиг. 5 построены ли-

нии равного инкремента для системы типа θ -пинч ($h_i = 0$) с параметрами $h_a = 0.25$, $b/a = 5$. Наибольшее из указанных на графиках значений инкремента γ_s в каждой резонансной зоне близко к максимальному инкременту в данной зоне. Для реального шнура, имеющего конечную длину L ,



Фиг. 3

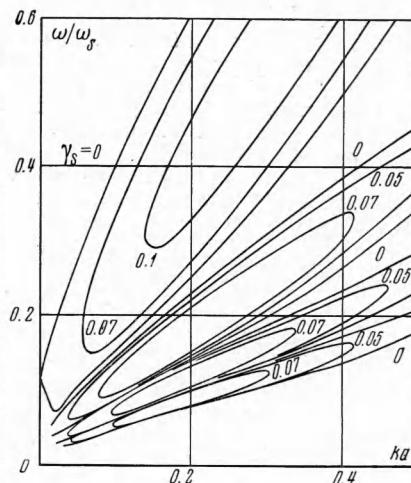


Фиг. 4

зоны возбуждения разбиваются на ряд вертикальных отрезков, соответствующих дискретным значениям безразмерного волнового числа

$$ka_j^* = (2\pi a/L)j \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

Обратим внимание на некоторые характерные особенности исследуемой неустойчивости, отражаемые диаграммами фиг. 1—5. Отметим прежде всего, что рассчитанные инкременты γ_s не превышают максимального инкремента неустойчивости моды $m = 1$ в случае $I = I_0 = \text{const}$ (мода Шафранова — Крускала), который достигается при $ka \approx h_a$ и в безразмерном виде равен $\gamma_{sk} \approx \gamma_s$. Существенное влияние на параметрическое возбуждение моды $m = 1$ оказывает проводящий кожух, увеличивающий жесткость токонесущего шнура по отношению к длинноволновым изгибам и смещениям. Наиболее важный результат этого влияния состоит в том, что в области $ka < (a/b)h_a$ резонансные зоны смещаются в сторону более высоких частот приблизительно пропорционально $(b/a)h_a$. В частности, появляется возможность раскачки возмущений с $k = 0$ (смещения шнура как целого), по отношению к которым шнур без кожуха был нейтрально устойчив. В присутствии кожуха меняется и форма резонансных зон, на которых появляются искажения в виде пе-



Фиг. 5

ретьяжек. Последний эффект обусловлен взаимодействием гармоник модуляции с частотами ω и 2ω , которые, как показывают расчеты, имеют при $ka \lesssim (a/b)^2 h_a$ равные по порядку величины амплитуды θ_1 и θ_2 .

Наибольшую опасность для устойчивости шнура представляет первая резонансная зона. Основное колебание в этой зоне имеет частоту $\omega/2$ (в n -й резонансной зоне максимальной амплитудой обладает колебание с частотой $n\omega/2$). Предельное значение $(\omega/\omega_s)_{\min}$, ниже которого не опускается первая зона, приближенно дается выражением

$$\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right)_{\min} \approx \frac{\sqrt{2} h_a}{\sqrt{(b/a)^2 - 1}}$$

Таким образом, при достаточно близком кожухе на частотах $\omega \ll \omega_s$ можно избежать раскачки наиболее быстро нарастающих колебаний с частотой $\omega/2$. Возбуждаемые в других зонах колебания с частотами $n\omega/2$ имеют значительно меньшие инкременты. Подъем резонансных зон происходит и при увеличении параметра h_a , однако в этом случае резонансные зоны расширяются и возрастают инкременты неустойчивости.

Отметим также, что для систем типа z -пинч ($h_i = 1$, фиг. 1—4) параметрическое возбуждение колебаний с заданным волновым числом k происходит при более высоких относительных частотах ω/ω_s по сравнению с системами типа θ -пинч ($h_i = 0$, фиг. 5). Этот эффект обусловлен увеличением жесткости шнура за счет захваченного плазмой поля B_i .

В заключение авторы благодарят М. Л. Левина за полезные обсуждения работы.

Поступила 28 XII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Н и к у л и н М. Г. Динамическая стабилизация плазменного шнура в продольном магнитном поле. Ж. техн. физ., 1969, т. 39, вып. 12.
2. Н и к у л и н М. Г. О параметрическом возбуждении винтовой неустойчивости θ -пинча высокочастотным продольным током. ПМТФ, 1970, № 2.
3. R i b e F. L., R i e s e n f e l d W. B. Unstable, transverse—displacement mode of a bumpy plasma column and its possible stabilization. Phys. Fluids, 1968, vol. 11, No. 9.
4. В а с и л е в с к и й М. А., Р о й ф е И. М., С е р е д е н к о Е. В. Исследование устойчивости тороидального плазменного шнура с высокочастотным током в продольном магнитном поле. Международная конференция по удержанию плазмы в замкнутых системах, Дубна, 1969; Сб. аннот. докл., М., 1969.
5. У и т т е к е р Э. Т., В а т с о н Дж. Н. Курс современного анализа, ч. 2. М., Физматгиз, 1963.
6. Ш а ф р а н о в В. Д. Об устойчивости цилиндрического газового проводника в магнитном поле. Атомная энергия, 1956, № 5.