Решение этого уравнения следует искать в интервале $\alpha < \beta_0 \leqslant 1$, в котором оно имеет единственный действительный корень.

Для жестко-пластического тела легко получить, что $\beta_0^* = 1$, т. е. потери устойчивости сферы из жестко-пластического материала не происходит.

За проявленное внимание и ряд ценных замечаний искренне благодарен А. Ю. Ишлинскому.

Поступила 22 IX 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Лейбензон Л. С. О применении гармонических функций к вопросу об устойчивости сферической и цилиндрической оболочек. Собр. трудов, т. 1. Изд-во АН СССР, 1951.
2. Ишлинский А. Ю. Рассмотрение вопросов об устойчивости равновесия упругих тел с точки зрения математической теории упругости. Укр. матем. ж., 1954, т. 6, № 2.
3. Новожилов В. В. Теория упругости, Судпромгиз, 1958.
4. Соколовский В. В. Теория пластичности, Гостехтеоретиздат, 1950.
5. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости, Гостехтеоретиздат, 1955.

О НЕУСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ БЕЗМОМЕНТНЫХ ОБОЛОЧЕК

В. И. Розенблюм

(Ленинград)

Интегрирование уравнений ползучести тонкостенных оболочек обычно связано со значительными трудностями. С другой стороны, явления ползучести характеризуются значительным разбросом и не всегда могут быть точно описаны существующими феноменологическими теориями. В этих условиях возрастает значение приближенных методов анализа, например, расчета по безмоментной теории. Как отмечено в [1], ползучесть благоприятствует реализации безмоментного напряженного состояния оболочки.

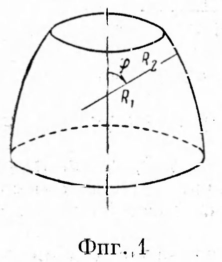
Напряженное состояние безмоментной оболочки не будет зависеть от свойств материала, если краевые условия приводят к статически определимой задаче. Благодаря «внутренней» статической определимости безмоментной оболочки решение упрощается также и для таких вариантов закрепления краев, когда раздельное определение напряженного и деформированного состояний невозможно.

Ниже рассматривается статически неопределимая осесимметрично нагруженная оболочка вращения, для которой задача неустановившейся ползучести приводится к нормальной системе обыкновенных нелинейных уравнений и в ряде случаев может быть решена в квадратурах.

1. Общее решение уравнений статики безмоментной теории осесимметрично нагруженной оболочки вращения (фиг. 1) может быть представлено в виде [2]

$$\sigma_1 = \sigma_1^\circ + \sigma_1^*, \qquad \sigma_2 = \sigma_2^\circ + \sigma_2^*, \qquad \tau = \tau^\circ + \tau^* \tag{1.1}$$

Здесь σ_1, σ_2, τ — меридиональное, окружное и касательное напряжения, σ_1^*, σ_2^*, τ^* — частное решение, отвечающее заданным нагрузкам, σ_1°, σ_2°, τ° — общее решение однородных уравнений



Фиг. 1

$$\sigma_1^* = -\frac{1}{hr\sin\varphi}\int_{\varphi_0}^{\varphi} (q_1\cos\varphi - q_n\sin\varphi)\, rR_1\, d\varphi$$

$$\sigma_2^* = -\frac{R_2}{R_1}\sigma_1^* + \frac{R_2}{h}q_n, \qquad \tau^* = -\frac{1}{r^2h}\int_{\varphi_0}^{\varphi} q_2 r^2 R_1\, d\varphi \tag{1.2}$$

$$\sigma_1^\circ = \frac{M}{r\sin\varphi}, \qquad \sigma_2^\circ = -\frac{R_2}{R_1}\cdot\frac{M}{r\sin\varphi}, \qquad \tau^\circ = \frac{N}{r^2} \tag{1.3}$$

Постоянные интегрирования M, N в случае ползучести следует считать произвольными функциями времени, определяемыми из краевых условий.

Скорости деформации $\dot\varepsilon_1$, $\dot\varepsilon_2$, $\dot\gamma$, отвечающие напряжениям (1.1), будем определять по уравнениям теории ползучести Л. М. Качанова [1]

$$\dot\varepsilon_1 = \xi_1' + \xi_1'', \qquad \dot\varepsilon_2 = \xi_2' + \xi_2'', \qquad \dot\gamma = \eta' + \eta'' \tag{1.4}$$

Здесь ξ_1', ξ_2', η' — упругие составляющие, ξ_1'', ξ_2'', η'' — скорости деформации ползучести

$$\xi_1' = \frac{1}{E}\frac{\partial}{\partial t}(\sigma_1 - \nu\sigma_2), \qquad \xi_2' = \frac{1}{E}\frac{\partial}{\partial t}(\sigma_2 - \nu\sigma_1), \qquad \eta' = \frac{1}{G}\frac{\partial\tau}{\partial t} \tag{1.5}$$

$$\xi_1'' = B_1(t)(\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 + 3\tau^2)^{\frac{m-1}{2}}\left(\sigma_1 - \frac{1}{2}\sigma_2\right)$$

$$\xi_2'' = B_1(t)(\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 + 3\tau^2)^{\frac{m-1}{2}}\left(\sigma_2 - \frac{1}{2}\sigma_1\right) \tag{1.6}$$

$$\eta'' = 3B_1(t)(\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 + 3\tau^2)^{\frac{m-1}{2}}\tau$$

Пусть нагрузки q_1, q_2, q_n не зависят от времени; тогда

$$\xi_1' = \frac{R_1 + \nu R_2}{ER_1 r\sin\varphi}\frac{dM}{dt}, \qquad \xi_2' = -\frac{R_2 + \nu R_1}{ER_1 r\sin\varphi}\frac{dM}{dt}, \qquad \eta' = \frac{1}{Gr^2}\frac{dN}{dt}$$

Компоненты скорости u, v, w, отвечающие скоростям деформации

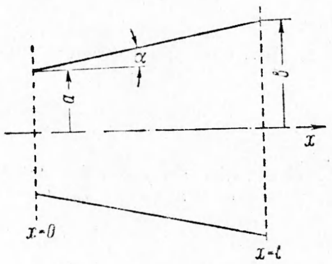
$$\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{w}{R_1} = \dot{\varepsilon}_1, \qquad \frac{1}{r}(u\cos\varphi + w\sin\varphi) = \dot{\varepsilon}_2, \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(vr) = \dot{\gamma} \tag{1.7}$$

определяются квадратурами

$$\frac{u}{\sin\varphi} = \frac{u_0(t)}{\sin\varphi_0} + \int_{\varphi_0}^{\varphi}(\dot{\varepsilon}_1 R_1 - \dot{\varepsilon}_2 R_2)\frac{d\varphi}{\sin\varphi}$$

$$v = \frac{r_0}{r}v_0(t) + \frac{1}{r}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\dot{\gamma} r R_1\, d\varphi \tag{1.8}$$

$$w = \dot{\varepsilon}_2 R_2 - u\operatorname{ctg}\varphi$$



Фиг. 2

где $u_0(t)$, $v_0(t)$ — произвольные функции времени.

Функция M (или N) обращается в постоянную, если на одном из краев задано не зависящее от времени усилие T_1 (или S). Пусть края $\varphi = \varphi_0$, $\varphi = \varphi_1$ закреплены ($u = v = 0$). Тогда для определения M, N получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}(\xi_1'' R_1 - \xi_2'' R_2)\frac{d\varphi}{\sin\varphi} = -\frac{1}{E}\frac{dM}{dt}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}(R_1^2 + 2\nu R_1 R_2 + R_2^2)\frac{d\varphi}{R_1 r\sin^2\varphi}$$

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\eta'' r R_1\, d\varphi = -\frac{1}{G}\frac{dN}{dt}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\frac{R_1}{r}\, d\varphi \tag{1.9}$$

При этом начальные значения функций M, N определяются соответствующим упругим решением. Если, например, кручение отсутствует ($\tau = \dot{\gamma} = 0$), то первое уравнение (1.9) интегрируется в квадратурах. Аналогично могут быть рассмотрены другие варианты краевых условий.

2. Рассмотрим задачу о ползучести конической трубы (фиг. 2), часто встречающуюся в технических приложениях. Края оболочки закреплены

$$u = 0, \quad \text{при } x = 0,\ x = l \tag{2.1}$$

Безмоментное решение для конуса при равномерном внутреннем давлении p:

$$\sigma_1 = \frac{pr}{2h\cos\alpha} + \frac{M(t)}{rh}, \qquad \sigma_2 = \frac{pr}{h\cos\alpha}, \qquad \tau = 0 \tag{2.2}$$

При этом

$$\dot{\varepsilon}_1 = B_1(t)\left(\frac{3}{4}\frac{p^2r^2}{h^2\cos^2\alpha} + \frac{M^2}{r^2h^2}\right)^{\frac{m-1}{2}}\frac{M}{rh} + \frac{1}{Erh}\cdot\frac{dM}{dt} \tag{2.3}$$

Согласно (1.9), дифференциальное уравнение для M будет

$$\frac{dM}{dt} = -kB_1(t)M\psi(M) \tag{2.4}$$

где

$$\psi(M) = \int_a^b \left(\frac{3}{4} \frac{p^2 r^2}{\cos^2 \alpha} + \frac{M^2}{r^2} \right)^{\frac{m-1}{2}} \frac{dr}{r}, \qquad k = \frac{E}{h^{m-1} \ln(b/a)} \tag{2.5}$$

В начальном упругом состоянии

$$M = M_0 = -\frac{1-2\nu}{4} \frac{p}{\cos\alpha} \frac{b^2 - a^2}{\ln b/a} \tag{2.6}$$

В установившемся состоянии $M = 0$. При $\nu = 1/2$ постоянная M_0 также обращается в нуль, поэтому перераспределение напряжений будет иметь место, если $\nu \neq 1/2$. В этом случае

$$\int_{M_0}^{M} \frac{dM}{M\psi(M)} = -k\Omega_1(t), \qquad \Omega_1(t) = \int_0^t B_1(t)\,dt \tag{2.7}$$

Например, при $m = 1$ (линейная ползучесть) находим, интегрируя (2.7)

$$M = M_0 e^{-E\Omega_1(t)}$$

при $m = 3$

$$\frac{M^2(3p^2a^2b^2 + 4M_0^2\cos^2\alpha)}{M_0^2(3p^2a^2b^2 + 4M^2\cos^2\alpha)} = \exp\left\{-\frac{E}{h^2 \ln b/a} \frac{3p^2(b^2 - a^2)}{4\cos^2\alpha} \Omega_1(t)\right\}$$

Нетрудно рассмотреть аналогичную задачу при наличии кручения и ряд других.

Поступила 29 XI 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. К а ч а н о в Л. М. Теория ползучести. Физматгиз, 1960.
2. Н о в о ж и л о в В. В. Теория тонких оболочек. Судпромгиз, 1951.

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ ПО ТЕОРИИ УПРОЧНЕНИЯ

А. П. Кузнецов, Л. М. Куршин
(Новосибирск)

Приводится решение некоторых задач устойчивости пластин оболочек в условиях ползучести при использовании уравнения состояния в виде

$$\Phi(\sigma_i, p_i, \dot{p}_i) = 0$$

Предполагается, что при пространственном напряженном состоянии справедлива теория деформаций. Таким образом, в уравнении состояния σ_i — интенсивность напряжений, а $p_i = \varepsilon_i - \sigma_i/E$, где ε_i — интенсивность деформаций.

§ 1. Устойчивость длинной пластины при сдвиге. Уравнение устойчивости пластины в рассматриваемой постановке дано в работе [1]

$$\frac{3}{4}\left(A - \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\right) PPw + \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \triangle\triangle w + \frac{9\sigma_i}{(2h)^2} Pw = 0 \tag{1.1}$$

Оператор P имеет вид

$$P = \alpha_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \alpha_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2\alpha_{12} \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} \qquad \left(\alpha_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i}\right)$$

Символ A — интегральный оператор в уравнении

$$\delta\sigma_i = A\delta\varepsilon_i \tag{1.2}$$

эквивалентном уравнению состояния в вариациях

$$(E\lambda - \mu)\,\delta\sigma_i - \nu\delta\dot{\sigma}_i + E(\mu\delta\varepsilon_i + \nu\delta\dot{\varepsilon}_i) = 0 \tag{1.3}$$

где

$$\lambda = \partial\Phi/\partial\sigma, \qquad \mu = \partial\Phi/\partial p, \qquad \nu = \partial\Phi/\partial\dot{p}$$

Рассмотрим задачу устойчивости бесконечно длинной пластины шириной b при сдвиге.