УДК 532.516

ВЛИЯНИЕ ВЯЗКОСТИ НА ДИНАМИКУ ВОЗМУЩЕНИЙ ПУЗЫРЯ В ЖИДКОСТИ

О. В. Воинов

Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики
им. С. А. Христиановича, 625000 Тюмень
E-mail: o.v.voinov@mtu-net.ru

Рассматривается динамика пузыря в жидкости малой вязкости. Определяется уравнение динамики малых возмущений с учетом влияния вязкости.

Ключевые слова: пузырь, вязкость, возмущение, уравнение динамики.

Рассмотрим пузырь переменного радиуса в жидкости малой вязкости. Предположим, что форма поверхности пузыря S близка к сферической. Целью данной работы является получение уравнения динамики возмущений поверхности.

Введем сферическую систему координат (r, θ, φ) с началом в центре сферы. Выражение для радиуса поверхности пузыря r_0 включает малое возмущение, пропорциональное сферической гармонике Y_n:

$$r_0(\theta, \varphi, t) = R(t) + r_1(t) + a(t) Y_n(\theta, \varphi), \qquad a \ll R. \tag{1}$$

Здесь R — радиус сферы эквивалентного объема; a — амплитуда возмущения; интеграл от Y_n^2 по единичной сфере принят равным единице. В дальнейшем аргумент t у функций R, r_1, a опущен. Из выражения для объема пузыря $V = (4/3)\pi R^3$ следует, что значение переменной $r_1 = -a^2/(4\pi R)$.

Невозмущенное поле скоростей является потенциальным. Предположим, что возмущение поля скоростей вокруг пузыря близко к потенциальному. Это возможно, если произведение кинематической вязкости ν и характерного времени τ мало: $\nu\tau \ll l^2$ ($l = \pi R/n$ — характерное расстояние).

Потенциал скорости $\boldsymbol{v} = \nabla\Phi$ определяется из решения задачи Неймана

$$\Delta\Phi = 0, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial r_0}{\partial t}\, n_r, \qquad \Phi \to 0, \quad r \to \infty$$

в приближенном виде

$$\Phi = -\dot{R}\,\frac{R^2}{r} - \frac{1}{n+1}\Big(\dot{a} + 2\dot{R}\,\frac{a}{R}\Big)\Big(\frac{R}{r}\Big)^{n+1} R Y_n. \tag{2}$$

Здесь коэффициент при $1/r$ справедлив с точностью до малых $\dot{R}a^3/R^2$, $\dot{a}a^2/R$.

Для описания динамики возмущений используем энергетический подход, аналогичный подходу [1], применяемому для описания динамики системы пузырей в жидкости малой вязкости. Обобщенные силы в уравнениях Лагранжа можно выразить через скорость диссипации E энергии в потенциальном поле скоростей:

$$\frac{d}{dt}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i}, \qquad i = 1, 2. \tag{3}$$

Обобщенными координатами являются $q_1 = a$ и $q_2 = R$. Функция Лагранжа равна $L = T_f - \sigma S$ (T_f — кинетическая энергия жидкости; σ — поверхностное натяжение). Кинетическая энергия и скорость диссипации определяются формулами

$$T_f = -\rho \int\limits_S \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n}\, dS, \qquad E = 2\mu \int\limits_\Omega \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}\, d\Omega, \qquad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\Big), \tag{4}$$

где ρ — плотность жидкости; μ — динамическая вязкость; Ω — область, занятая жидкостью; по повторяющимся индексам проводится суммирование. Интеграл в формуле для E приводится к поверхностному интегралу

$$E = -\mu \int\limits_S \frac{\partial v^2}{\partial n}\, dS. \tag{5}$$

При вычислении интегралов используем приближенные выражения для компонент нормали к поверхности пузыря

$$n_r = 1 - \frac{1}{2}\,(n_\theta^2 + n_\varphi^2), \qquad n_\theta = -\frac{a}{R}\, Y'_\theta, \qquad n_\varphi = -\frac{a}{R\sin\theta}\, Y'_\varphi. \tag{6}$$

Здесь $Y = Y_n$. Площадь элемента поверхности равна

$$dS = r_0^2(1 + (n_\theta^2 + n_\varphi^2)/2)\sin\theta\, d\varphi\, d\theta.$$

Далее используются также значения следующих интегралов по единичной сфере S':

$$\int\limits_{S'} Y^2\, dS' = 1, \qquad \int\limits_{S'} \Big(Y_\theta'^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}\, Y_\varphi'^2\Big)\, dS' = n(n+1).$$

Второй интеграл необходим при вычислении скорости диссипации энергии E.

Из (1), (2), (4) найдем кинетическую энергию с учетом главных слагаемых по малым амплитуде a и скорости $\dot a$:

$$T_f = 2\pi\rho R^3\dot R^2 + \rho\,\frac{R^3}{2}\,\frac{\dot a^2}{n+1} - \rho\,\frac{n-1}{n+1}\,(a^2\dot R^2 R + a\dot a\dot R R^2) + \ldots . \tag{7}$$

Потенциальная энергия (поверхностная свободная энергия) определяется по формуле

$$\sigma S \approx 4\pi R^2\sigma + (n-1)(n-2)\sigma a^2/2. \tag{8}$$

Для вычисления E требуется бóльший объем преобразований, чем для вычисления кинетической энергии T, поэтому приведем только промежуточные выражения:

$$v^2 = \dot R^2\,\frac{R^4}{r^4} + 2\dot R u\Big(\frac{R}{r}\Big)^{n+4} Y + u^2\Big(\frac{R}{r}\Big)^{2n+4}\Big(Y^2 + \frac{1}{(n+1)^2}\Big(Y_\theta'^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}\, Y_\varphi'^2\Big)\Big);$$

$$\begin{gathered} -\frac{\partial v^2}{\partial r} = 4\,\frac{\dot R^2}{R}\Big(1 - 5\varepsilon Y + 15\varepsilon^2 Y^2 - 5\,\frac{r_1}{R}\Big) + \frac{2\dot R u}{R}\,(n+4)(Y - \varepsilon Y^2(n+5)) + \\ + \frac{2u^2}{R}\,(n+2)\Big(Y^2 + \frac{1}{(n+1)^2}\Big(Y_\theta'^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}\, Y_\varphi'^2\Big)\Big) \qquad \text{при} \quad r = r_0 \quad \Big(\varepsilon = \frac{a}{R}\Big), \end{gathered} \tag{9}$$

$$-\frac{1}{R}\,\frac{\partial v^2}{\partial\theta} = -\frac{2\dot R u}{R}\, Y'_\theta, \qquad -\frac{1}{R\sin\theta}\,\frac{\partial v^2}{\partial\varphi} = -\frac{2\dot R u}{R\sin\theta}\, Y'_\varphi \qquad \text{при} \quad r = r_0.$$

Здесь $u = \dot a + 2a\dot R/R$. Каждую формулу в (9) умножим на соответствующую компоненту нормали (6) и сложим, чтобы получить $-\partial v^2/\partial n$. Вычисляя интеграл (5), получим приближенное выражение для скорости диссипации энергии

$$E = 16\pi\mu\dot{R}^2 R + 2\mu[(n+2)(2n+1)\dot{a}^2 R + 2(n+2)(n-1)a\dot{a}\dot{R} - \\ - 2(n-1)(2n+1)a^2\dot{R}^2 R^{-1}]/(n+1). \quad (10)$$

С учетом (7), (8), (10) из уравнений Лагранжа (3) получим следующее уравнение для амплитуды гармонического возмущения $a = a_n$:

$$R\ddot{a}_n + 3\dot{R}\dot{a}_n + [(n^2-1)(n+2)\sigma/(\rho R^2) - (n-1)\ddot{R}]a_n = \\ = -2\nu(n+2)[(2n+1)R\dot{a}_n + (n-1)\dot{R}a_n]/R^2. \quad (11)$$

В случае если вязкость равна нулю ($\nu = 0$), правая часть динамического уравнения (11), представляющая собой вклад вязкости в динамику возмущения пузыря, равна нулю и уравнение (11) совпадает с уравнением работы [2].

Уравнение (11) представляет собой скорректированное уравнение (2) из работы [3], в котором дополнительное слагаемое является лишним.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Головин А. М.** Уравнения Лагранжа для системы пузырей в жидкости малой вязкости // ПМТФ. 1967. № 6. С. 20–27.
2. **Plesset M. S., Mitchell T. P.** On the stability of the spherical shape of vapour cavity in a liquid // Quart. Appl. Math. 1956. V. 13, N 4. P. 419–430.
3. **Воинов О. В.** Условия разрушения сферического газового пузыря в жидкости при нелинейных пульсациях // Докл. АН. 2008. Т. 422, № 6. С. 750–754.

Поступила в редакцию 18/VI 2009 г.