Теплофизика и аэромеханика, 2009, том 16, № 3

УДК 532.5.013.4:537.84

Критерий линейной устойчивости установившихся винтовых магнитогидродинамических течений идеальной жидкости*

Ю.Г. Губарев

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Новосибирский государственный университет

E-mail: gubarev@hydro.nsc.ru

Изучается линейная задача устойчивости одного подкласса стационарных винтовых течений однородной по плотности невязкой несжимаемой идеально проводящей жидкости в магнитном поле. Прямым методом Ляпунова получены необходимое и достаточное условие теоретической (на полубесконечных интервалах времени) устойчивости, а также достаточные условия практической (на конечных временных промежутках) неустойчивости данных течений по отношению к малым винтовым же возмущениям. В случае, когда критерий теоретической устойчивости нарушен, а достаточные условия практической неустойчивости, наоборот, справедливы, построена априорная экспоненциальная оценка снизу роста рассматриваемых малых возмущений, при этом инкремент содержащейся в ней экспоненты является произвольной положительной постоянной величиной.

Ключевые слова: идеальная жидкость, магнитное поле, установившиеся течения, прямой метод Ляпунова, критерий устойчивости, условия неустойчивости, априорная оценка.

ВВЕДЕНИЕ

В ходе исследования различных природных явлений и осуществления тех или иных технологических процессов важную роль играет проблема не столько теоретической (на полубесконечных интервалах времени), сколько практической их устойчивости, т. е. устойчивости на конечных временных промежутках [1]. Дело в том, что природные явления и технологические процессы, будучи теоретически устойчивыми, практически могут оказаться неустойчивыми, либо, напротив, будучи теоретически неустойчивыми, могут, тем не менее, оказаться устойчивыми практически [2].

---

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 07–01–00585а) и Федерального агентства по образованию Минобрнауки РФ (проект № 2.1.1/4591).

Однако проблема практической устойчивости разного рода природных явлений и технологических процессов до сих пор так и не имеет удовлетворительного решения [1, 2]. Более того, на сегодняшний день должным образом не изучен даже вопрос о взаимосвязи теоретической и практической устойчивости.

В предлагаемой статье развивается новая оригинальная методика [3, 4] рассмотрения линейных задач устойчивости для широкого круга математических моделей гидродинамического типа, которая позволяет получать результаты как по теоретической, так и по практической устойчивости стационарных течений жидкостей, газов и плазмы относительно малых возмущений. Суть этой методики заключается в конструировании на регулярной основе функционалов Ляпунова, обладающих способностью нарастать со временем в силу тех или других смешанных задач, решения которых описывают эволюцию малых возмущений исследуемых установившихся течений жидкостей, газов и плазмы. Посредством настоящего алгоритма построения растущих во времени функционалов Ляпунова удается обнаруживать достаточные условия и теоретической, и практической линейной неустойчивости, конструировать априорные экспоненциальные нижние оценки и доказывать существование начальных данных для нарастающих со временем малых возмущений.

В дальнейшем из энергетических соображений сначала будет найдено достаточное условие теоретической устойчивости изучаемых стационарных винтовых магнитогидродинамических (МГД) течений по отношению к малым возмущениям той же симметрии. После этого, уже при помощи упомянутой выше оригинальной методики построения растущих во времени функционалов Ляпунова, данное условие теоретической устойчивости будет обращено, и для неустойчивых рассматриваемых установившихся течений будут обнаружены достаточные условия практической линейной неустойчивости, а также сконструирована априорная экспоненциальная оценка снизу нарастания со временем малых винтовых возмущений.

1. ФОРМУЛИРОВКА ТОЧНОЙ ЗАДАЧИ

В цилиндрической системе координат $r,\ \varphi,\ z$ исследуются винтовые движения однородной по плотности невязкой несжимаемой жидкости с неограниченной проводимостью в магнитном поле $\mathbf{h} = (0,\ h_2,\ h_3)$. Для описания этих движений удобно использовать винтовую координату $\mu \equiv a\varphi - bz$ (здесь a — любое целое, а b — всякое вещественное число). Тогда поля скорости $\mathbf{u} = (u,\ v,\ w)$, давления p и магнитное поле $\mathbf{h}$ будут представлять собой функции трех независимых переменных: координат r, μ и времени t. Уравнения же пространственных МГД движений однородной по плотности идеальной несжимаемой жидкости с бесконечной проводимостью [5] в таком случае можно будет, применяя обозначения работ [6, 7], преобразовать к виду:

$$Du - K\beta\gamma - \frac{(a\gamma)^2}{rR^2} = -\ p_r^* + \rho_1 g_1 - \rho_2 r,\ D\rho_1 = 0,$$

$$D(r\gamma/R) + K\beta r u = -\ p_\mu^*,\ D\rho_2 = 0,\ Dh_3 = 0,\ u_r + \frac{u + \gamma_\mu}{r} = 0,$$

$$D \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u\ \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\gamma}{r}\ \frac{\partial}{\partial \mu},\ \gamma \equiv av - brw,\ \beta \equiv aw + brv,\ R \equiv a^2 + b^2 r^2, \tag{1}$$

$$K \equiv 2ab/R^2,\ p^* \equiv p + \frac{h_2^2 + h_3^2}{8\pi},\ \rho_1 \equiv \beta^2,\ g_1 \equiv b^2 r/R^2,\ \rho_2 \equiv h_2^2/4\pi r^2,$$

где под нижними индексами из независимых переменных подразумеваются соответствующие частные производные.

Стоит отметить, что при получении системы соотношений (1) учитывалась связь

$$ah_2/r - bh_3 = 0 \tag{2}$$

(здесь h_2 и h_3 — угловая и осевая составляющие магнитного поля **h**). Данная связь вытекает из соотношения

$$D\left(ah_2/r - bh_3\right) = 0, \tag{3}$$

служащего, в свою очередь, следствием трехмерного уравнения “вмороженности” магнитных силовых линий в перемещающееся вещество жидкости [5] при наличии винтовой симметрии движения и отсутствии у магнитного поля **h** радиального компонента h_1. Действительно, соотношение (3) показывает, что если исходные угловую h_2 и осевую h_3 составляющие магнитного поля **h** выбрать такими, чтобы при $t = 0$ для них было выполнено условие (2), то это условие останется истинным и во все дальнейшие моменты времени $t > 0$.

Важным свойством соотношений (1) является сохранение значений функций ρ_1, ρ_2 и h_3 в жидких частицах. Принимая во внимание настоящее свойство, разумно, в духе статьи [7], включить в изучение дополнительное скалярное поле $q(r, \mu, t)$, значения которого тоже будут сохраняться в каждой жидкой частице:

$$Dq = 0. \tag{4}$$

В качестве такого поля q может быть использована, к примеру, одна из лагранжевых координат жидких частиц.

Ниже будет рассматриваться расширенная система уравнений движения (1), (2), (4).

Считается, что исследуемая жидкость целиком заполняет область τ с покоящейся непроницаемой твердой неограниченной по проводимости поверхностью $\partial\tau$. Данное допущение означает, что во время движения ни сама жидкость, ни находящееся в ней магнитное поле не проникают за пределы области течения τ. Поскольку для движений жидкости характерна винтовая симметрия, граница $\partial\tau$ области течения также должна иметь эту симметрию, т. е. описываться функцией двух независимых переменных в форме

$$s(r, \mu) = 0. \tag{5}$$

Последнее соотношение дает возможность представить краевое условие для уравнений (1) в виде

$$us_r + \gamma s_\mu/r = 0. \tag{6}$$

Начальные данные для соотношений (1), (4) при $t = 0$ берутся в форме

$$\begin{gathered} u = u_0(r, \mu),\ \gamma = \gamma_0(r, \mu),\ \rho_1 = \rho_{10}(r, \mu),\ \rho_2 = \rho_{20}(r, \mu), \\ h_3 = h_{30}(r, \mu),\ q = q_0(r, \mu), \end{gathered} \tag{7}$$

причем функции $u_0(r, \mu)$ и $\gamma_0(r, \mu)$ подбираются с таким расчетом, чтобы внутри области течения τ превращалось в тождество шестое уравнение системы (1), а на ее поверхности $\partial\tau$ было верно условие (6). Кроме того, между функциями $\rho_{20}(r, \mu)$ и $h_{30}(r, \mu)$ существует связь через соотношение (2).

На решениях смешанной задачи (1), (2), (4)–(7) остаются неизменными полная энергия E_1 и интеграл движения I, определяемый посредством некой функции $\Phi(q)$:

$$E_1 \equiv T_1 + \Pi_1 + \Pi_2 = \text{const},$$

$$2T_1 \equiv \int_\tau \left(\frac{\gamma^2}{R} + u^2 \right) d\tau, \ \Pi_i \equiv \int_\tau \rho_i U_i d\tau, \ i = 1, \ 2; \ d\tau \equiv r dr d\mu, \tag{8}$$

$$U_1(r) \equiv 1/2R + C_1, \ U_2(r) \equiv r^2/2 + C_2, \ I \equiv \int_\tau \Phi(q) \ d\tau = \text{const},$$

где C_1 и C_2 — постоянные величины, которые служат значениями функций U_1 и U_2 на границе $\partial\tau$ (5) области течения соответственно.

Начально-краевая задача (1), (2), (4)–(7) обладает точными стационарными решениями вида:

$$u = \gamma = 0, \ \rho_1 = \rho_1^0(r), \ \rho_2 = \rho_2^0(r), \ h_3 = h_3^0(r),$$

$$q = Q(r), \ p^* = P^*(r), \ \frac{dP^*}{dr} = \rho_1^0 g_1 - \rho_2^0 r. \tag{9}$$

Здесь поля $h_3^0(r)$ и $Q(r)$ суть произвольные функции аргумента r, поле же $h_2^0(r)$ вычисляется по выбранному полю $h_3^0(r)$ с помощью связи (2).

Если для поля Q характерно то свойство, что производная dQ/dr не обращается в нуль повсюду в области τ [8], тогда из соотношений (8), (9) вытекают связи:

$$\rho_1^0 = \rho_1^0(Q), \ \rho_2^0 = \rho_2^0(Q), \ U_1 = U_1(Q), \ U_2 = U_2(Q),$$

$$Q \in \left(Q^-, \ Q^+\right), \ Q^- \equiv \min Q(r), \ Q^+ \equiv \max Q(r), \ r \in \tau. \tag{10}$$

Цель последующего изучения состоит в том, чтобы выяснить, могут ли стационарные решения (9), (10) быть устойчивыми относительно малых винтовых возмущений $u'(r, \mu, t)$, $\gamma'(r, \mu, t)$, $p^{*\prime}(r, \mu, t)$, $\rho_1'(r, \mu, t)$, $\rho_2'(r, \mu, t)$, $h_3'(r, \mu, t)$ и $q'(r, \mu, t)$.

2. ПОСТАНОВКА ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ ЗАДАЧИ

Для достижения этой цели уравнения движения (1), (2), (4) линеаризуются около точных стационарных решений (9), а именно:

$$u_t' - K\beta^0\gamma' = -p_r^{*\prime} + \rho_1' g_1 - \rho_2' r, \ r\gamma_t'/R + K\beta^0 r u' = -p^{*\prime}_\mu,$$

$$\rho_{1t}' + u'\frac{d\rho_1^0}{dr} = 0, \ \rho_{2t}' + u'\frac{d\rho_2^0}{dr} = 0, \ h_{3t}' + u'\frac{dh_3^0}{dr} = 0, \tag{11}$$

$$q_t' + u'\frac{dQ}{dr} = 0, \ u_r' + \frac{u' + \gamma_\mu'}{r} = 0, \ \frac{ah_2'}{r} = bh_3',$$

где $\beta^0 \equiv aW + brV$ ($aV = brW,\ V = V(r)$ либо $W = W(r)$ — некая функция радиуса r).

Система соотношений (11) описывает развитие во времени и пространстве малых винтовых возмущений поля скорости $\mathbf{u}'$, модифицированного поля давления $p^{*\prime}$, магнитного поля $\mathbf{h}'$ и дополнительного скалярного поля q' в пределах области течения τ. К настоящей системе добавляются условие непротекания жидкости через поверхность $\partial\tau$, а также начальные данные для возмущений:

$$u's_r + \gamma' s_\mu / r = 0,\ s(r,\ \mu) = 0,$$

$$t = 0: u' = u'_0(r,\ \mu),\ \gamma' = \gamma'_0(r,\ \mu),\ \rho'_1 = \rho'_{10}(r,\ \mu), \tag{12}$$

$$\rho'_2 = \rho'_{20}(r,\ \mu),\ h'_3 = h'_{30}(r,\ \mu),\ q' = q'_0(r,\ \mu).$$

Здесь функции $u'_0(r,\ \mu)$, $\gamma'_0(r,\ \mu)$, $\rho'_{20}(r,\ \mu)$ и $h'_{30}(r,\ \mu)$ полагаются удовлетворяющими двум последним соотношениям из системы (11) и первому уравнению системы соотношений (12). Что касается оставшихся функций $\rho'_{10}(r,\ \mu)$ и $q'_0(r,\ \mu)$, то к ним никаких специальных требований не предъявляется.

Для решений смешанной задачи (11), (12) имеет место сохранение линейного аналога E интеграла полной энергии E_1

$$E \equiv T + \Pi = \text{const},\ 2T \equiv \int_\tau \left(\frac{\gamma'^2}{R} + u'^2 \right) d\tau,$$

$$2\Pi \equiv - \int_\tau \left(\frac{dU_1}{dQ}\frac{d\rho_1^0}{dQ} + \frac{dU_2}{dQ}\frac{d\rho_2^0}{dQ} \right) q'^2 d\tau. \tag{13}$$

Если всюду в области τ течения выполняется двойное неравенство

$$0 \le -\frac{dU_1}{dQ}\frac{d\rho_1^0}{dQ} - \frac{dU_2}{dQ}\frac{d\rho_2^0}{dQ} < +\infty, \tag{14}$$

то из независимости функционала E (13) от времени вытекает устойчивость установившихся течений (9), (10) по отношению к малым винтовым возмущениям (11), (12) в теоретическом смысле работы [7].

Следует заметить, что соотношение (14) можно трактовать и в качестве достаточного условия практической устойчивости тоже, однако при этом начальные данные (12) должны подбираться сообразно тому, как конкретно рассматриваемые стационарные течения (9), (10) или применяются в тех, либо иных технологических процессах или реализуются в тех, либо других природных явлениях [1, 2].

3. АПРИОРНАЯ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ ОЦЕНКА СНИЗУ

Далее прямым методом Ляпунова [9, 10] будет продемонстрировано, что двойное неравенство (14) представляет собой не только достаточное, но и необходимое условие теоретической линейной устойчивости установившихся течений (9), (10) относительно малых возмущений (11), (12), характеризующихся наличием винтовой симметрии. Более того, в случае, когда настоящий критерий теоретической линейной устойчивости нарушается, по крайней мере, где-нибудь внутри области течения τ будут выведены достаточные условия практической линейной неустойчивости стационарных течений (9), (10) по отношению к тем же малым возмущениям, а также построена априорная экспоненциальная нижняя оценка роста этих возмущений со временем.

Такие результаты могут быть получены путем исследования движений жидкости, которым свойственно то, что для них лагранжевы возмущения дополнительного скалярного поля q (4), (11), (12) все время остаются по своей величине равными нулю. Эти движения нагляднее всего описываются посредством поля лагранжевых смещений $\xi(r,\ \mu,\ t) = (\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3)$ [11] в форме

$$u' = \xi_{1t},\ \gamma' = \zeta_t,\ \zeta \equiv a\xi_2 - br\xi_3. \tag{15}$$

Исходя из соотношений (15), начально-краевую задачу (11), (12) можно свести к виду:

$$\begin{gathered}
\xi_{1tt} - K\beta^0\zeta_t = -p_r^* + \rho_1 g_1 - \rho_2 r,\ r\zeta_{tt}/R + K\beta^0 r\xi_{1t} = -p_\mu^*,\\
\rho_1 = -\xi_1\rho_1^{0\prime}(r),\ \rho_2 = -\xi_1\rho_2^{0\prime}(r),\ h_3 = -\xi_1 h_3^{0\prime}(r),\ q = -\xi_1 Q'(r),\\
\xi_{1r} + \frac{\xi_1 + \zeta_\mu}{r} = 0,\ ah_2/r = bh_3 \text{ в } \tau,\ \xi_1 s_r + \zeta s_\mu/r = 0 \text{ на } \partial\tau : s(r,\ \mu) = 0,\\
t = 0 : \xi_1 = \xi_{10}(r,\ \mu),\ \xi_{1t} = (\xi_{1t})_0(r,\ \mu),\ \zeta = \zeta_0(r,\ \mu),\ \zeta_t = (\zeta_t)_0(r,\ \mu).
\end{gathered} \tag{16}$$

Здесь и в дальнейшем штрихами сверху обозначаются не поля малых возмущений, а полные производные тех или иных функций по их аргументам. Кроме того, функции $(\xi_{1t})_0(r,\ \mu)$ и $(\zeta_t)_0(r,\ \mu)$ считаются тут произвольными, тогда как на функции $\xi_{10}(r,\ \mu)$ и $\zeta_0(r,\ \mu)$ накладываются ограничения обеспечивать справедливость седьмой, восьмой и девятой связей системы соотношений (16).

Для смешанной задачи (15), (16) линейный аналог E (13) интеграла энергии E_1 (8) примет форму

$$\begin{gathered}
E \equiv T + \Pi = \text{const},\ 2T \equiv \int_\tau \left(\frac{\zeta_t^2}{R} + \xi_{1t}^2\right) d\tau,\\
2\Pi \equiv -\int_\tau \left[U_1'(r)\rho_1^{0\prime}(r) + U_2'(r)\rho_2^{0\prime}(r)\right]\xi_1^2 d\tau.
\end{gathered} \tag{17}$$

Ниже в процессе изучения будет использоваться вспомогательный функционал [12, 13] вида

$$M \equiv \int_\tau \left(\frac{\zeta^2}{R} + \xi_1^2\right) d\tau. \tag{18}$$

Данный функционал сначала дважды дифференцируется по независимой переменной t с применением связей (15)–(17):

$$\begin{gathered}
M'(t) = 2\int_\tau (\xi_1\xi_{1t} + \zeta\zeta_t/R)\, d\tau,\\
M''(t) = 4(T - \Pi) + 2\int_\tau K\beta^0(\xi_1\zeta_t - \zeta\xi_{1t})\, d\tau.
\end{gathered} \tag{19}$$

После осуществления этой операции посредством соотношений (18), (19) составляется равенство

$$M''(t) - 2\nu M'(t) + 2\nu^2 M = \int_\tau \Big\{2\left(\xi_{1t} - \nu\xi_1\right)^2 + 2\left(\zeta_t - \nu\zeta\right)^2 \Big/ R +$$

$$+ 2\left(U_1'(r)\rho_1^{0\prime}(r) + U_2'(r)\rho_2^{0\prime}(r)\right)\xi_1^2 + \left(\xi_1 + K\beta^0\zeta_t\right)^2 - \xi_1^2 - K^2\beta^{02}\zeta_t^2 +$$

$$+ \left(\xi_{1t} - K\beta^0\zeta\right)^2 - \xi_{1t}^2 - K^2\beta^{02}\zeta^2\Big\}d\tau,$$

где ν — некая положительная постоянная величина.

Если условие (14) не выполняется в пределах области τ течения хотя бы в одной точке, то, отбрасывая неотрицательные слагаемые, вводя обозначения

$$\alpha_1 \equiv \max\left\{1,\ 4a^2b^2\beta^{02}\big/R^3\right\},\ \alpha_2 \equiv \max\left\{\left|U_1'(r)\rho_1^{0\prime}(r) + U_2'(r)\rho_2^{0\prime}(r)\right|\big/2\right\},$$

$$\kappa \equiv \alpha_1/2 + \alpha_1\alpha_2,\ r \in \tau$$

и полагая $E(t) \equiv E(0) \le 0$ (17), последнее равенство несложно трансформировать в принципиальное для последующего рассмотрения дифференциальное неравенство

$$M''(t) - 2\nu M'(t) + 2\left(\nu^2 + \kappa\right)M \ge 0. \tag{20}$$

В самом деле,

$$M''(t) - 2\nu M'(t) + 2\nu^2 M \ge \int_\tau \Big\{2\left[U_1'(r)\rho_1^{0\prime}(r) + U_2'(r)\rho_2^{0\prime}(r)\right]\xi_1^2 - \xi_1^2 -$$

$$- K^2\beta^{02}\zeta_t^2 - \xi_{1t}^2 - K^2\beta^{02}\zeta^2\Big\}d\tau \ge -4\Pi - \alpha_1\left(M + 2T\right) =$$

$$= -4\left[E(0) - T\right] - \alpha_1\left[M + 2E(0) - 2\Pi\right] \ge -\alpha_1\left(M - 2\Pi\right) \ge -\alpha_1\left(1 + 2\alpha_2\right)M = -2\kappa M,$$

откуда и вытекает искомое дифференциальное неравенство (20).

Оказывается, что в случае, когда к соотношению (20) добавлены условия [4, 14]

$$M\left(\pi n\Big/2\sqrt{\nu^2 + 2\kappa}\right) > 0,\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

$$M'\left(\pi n\Big/2\sqrt{\nu^2 + 2\kappa}\right) \ge 2\left(\nu + \kappa/\nu\right)M\left(\pi n\Big/2\sqrt{\nu^2 + 2\kappa}\right),$$

$$M\left(\pi n\Big/2\sqrt{\nu^2 + 2\kappa}\right) \equiv M(0)\exp\left(\pi n\nu\Big/2\sqrt{\nu^2 + 2\kappa}\right), \tag{21}$$

$$M'\left(\pi n\Big/2\sqrt{\nu^2 + 2\kappa}\right) \equiv M'(0)\exp\left(\pi n\nu\Big/2\sqrt{\nu^2 + 2\kappa}\right),$$

$$M(0) > 0,\ M'(0) \ge 2\left(\nu + \kappa/\nu\right)M(0),$$

тогда из него с необходимостью следует желаемая априорная экспоненциальная оценка снизу нарастания малых винтовых возмущений (15), (16) в виде

$$M(t) \ge C\exp\nu t \tag{22}$$

(здесь C — известная положительная постоянная).

Действительно, неравенство (20) может быть формально проинтегрировано на полуинтервалах $t_n \le t < \pi / 2\sqrt{\nu^2 + 2\kappa} + t_n$ ($t_n \equiv 2\pi n / \sqrt{\nu^2 + 2\kappa}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$), для чего надо осуществить несколько упрощающих замен искомого функционала M:

$$\text{а)}\ M_1(t) \equiv \exp(-\nu t) M(t) : M_1''(t) + \left(\nu^2 + 2\kappa\right) M_1 \ge 0,$$

$$\text{б)}\ M_2(t) \equiv M_1(t) / \cos t\sqrt{\nu^2 + 2\kappa} : \left[M_2'(t) \cos t\sqrt{\nu^2 + 2\kappa} \right]'(t) - \sqrt{\nu^2 + 2\kappa} M_2'(t) \times$$

$$\times \sin t\sqrt{\nu^2 + 2\kappa} \ge 0,$$

$$\text{в)}\ M_3(t) \equiv M_2'(t) \cos^2 t\sqrt{\nu^2 + 2\kappa} : M_3'(t) \ge 0.$$

Интегрирование последнего соотношения и выполнение обратных замен дают возможность прийти к неравенству

$$M(t) \ge \left(C_{1n} \cos\ t\sqrt{\nu^2 + 2\kappa} + C_{2n} \sin\ t\sqrt{\nu^2 + 2\kappa} \right) \exp \nu t, \qquad (23)$$

где C_{1n} и C_{2n} — произвольные постоянные величины.

Учитывая нестрогость оценки (23), постоянные C_{1n} и C_{2n} нетрудно связать со значениями функционала M (18) и его первой производной $M'(t)$ в моменты времени t_n ($n = 0, 1, 2, \ldots$). В итоге, соотношение (23) окончательно может быть записано в виде:

$$M(t) \ge f(t),$$

$$f(t) \equiv \left(M(t_n) \cos t\sqrt{\nu^2 + 2\kappa} + \left[M'(t_n) - \nu M(t_n) \right] \sin\left(t\sqrt{\nu^2 + 2\kappa} \right) \Big/ \sqrt{\nu^2 + 2\kappa} \right) \times \qquad (24)$$

$$\times \exp \nu (t - t_n).$$

Для того, чтобы обосновать процедуру интегрирования неравенства (20) на промежутках $t_n \le t < \pi / 2\sqrt{\nu^2 + 2\kappa} + t_n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$), приведшую в результате к нижней оценке (24), нужно вычислить производную первого порядка функции f по ее аргументу t:

$$f'(t) = \left(M'(t_n) \cos t\sqrt{\nu^2 + 2\kappa} + \left(\nu \left[M'(t_n) - \nu M(t_n) \right] \Big/ \sqrt{\nu^2 + 2\kappa} - \sqrt{\nu^2 + 2\kappa} M(t_n) \right) \times \right.$$

$$\left. \times \sin t\sqrt{\nu^2 + 2\kappa} \right) \exp \nu (t - t_n). \qquad (25)$$

Принимая во внимание соотношения (24) и (25), можно сделать заключение, что функция $f(t)$ будет положительной и строго возрастающей на полуинтервалах $t_n \le t < \pi / 2\sqrt{\nu^2 + 2\kappa} + t_n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) [15] в том случае, когда истинны неравенства

$$M(t_n) > 0,\ M'(t_n) \ge 2(\nu + \kappa/\nu) M(t_n). \qquad (26)$$

Эти неравенства как раз и служат требуемыми гарантиями правомерности осуществленной выше процедуры интегрирования соотношения (20).

Поскольку промежутки $t_n \le t < \pi \Big/ 2\sqrt{\nu^2 + 2\kappa} + t_n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) друг с другом не пересекаются, значения функционала M и его первой производной $M'(t)$ на левых концах настоящих промежутков могут задаваться любыми, безо всяких ограничений. В частности, их можно взять в форме

$$M(t_n) \equiv M(0)\exp\nu t_n,\ M'(t_n) \equiv M'(0)\exp\nu t_n.$$

Тогда неравенства (26) будут выполнены, если

$$M(0) > 0,\ M'(0) \ge 2(\nu + \kappa/\nu)M(0).$$

Функция же $f(t)$ предстанет в виде

$$f(t) = \left(M(0)\cos t\sqrt{\nu^2+2\kappa} + \left[M'(0) - \nu M(0)\right]\sin\left(t\sqrt{\nu^2+2\kappa}\right)\Big/\sqrt{\nu^2+2\kappa}\right)\exp\nu t.$$

Подобные рассуждения могут быть проведены и в том случае, когда соотношение (20) надо будет интегрировать на остальных временных полуинтервалах. Учитывая этот факт, далее итоги интегрирования неравенства (20) на промежутках $t_{kn} \le t < \pi\Big/2\sqrt{\nu^2+2\kappa} + t_{kn}$ $\left(t_{kn} \equiv \pi k\Big/2\sqrt{\nu^2+2\kappa} + 2\pi n\Big/\sqrt{\nu^2+2\kappa},\ k = 1, 2, 3,\right.$ $\left. n = 0, 1, 2, \ldots\right)$ сообщаются в форме кратких иллюстрирующих выкладок, без подробных комментариев:

1. $$M_1(t) \equiv \exp(-\nu t)M(t):\ M_1''(t) + \left(\nu^2 + 2\kappa\right)M_1 \ge 0;$$

2. $$M_2(t) \equiv M_1(t)\Big/\cos t\sqrt{\nu^2+2\kappa}:\ \left[M_2'(t)\cos t\sqrt{\nu^2+2\kappa}\right]'(t) - \sqrt{\nu^2+2\kappa}M_2'(t)\times$$
$$\times\sin t\sqrt{\nu^2 + 2\kappa} \ge 0;$$

3. $$M_3(t) \equiv M_2'(t)\cos^2 t\sqrt{\nu^2+2\kappa}:\ M_3'(t) \le 0\ (k = 1, 2),\ M_3'(t) \ge 0\ (k = 3);$$

4. $$M(t) \ge \left(C_{3n}\cos t\sqrt{\nu^2+2\kappa} + C_{4n}\sin t\sqrt{\nu^2+2\kappa}\right)\exp\nu t,\ C_{3n},\ C_{4n} \text{ — const};$$

5. $$M(t) \ge f_k(t):$$

$$\text{а)}\ f_1(t) \equiv \left(M(t_{1n})\sin t\sqrt{\nu^2+2\kappa} - \right.$$
$$\left. - \left[M'(t_{1n}) - \nu M(t_{1n})\right]\cos\left(t\sqrt{\nu^2+2\kappa}\right)\Big/\sqrt{\nu^2+2\kappa}\right)\exp\nu(t - t_{1n}),$$

$$f_1'(t) = \left(M'(t_{1n})\sin t\sqrt{\nu^2+2\kappa} - \left(\nu\left[M'(t_{1n}) - \nu M(t_{1n})\right]\Big/\sqrt{\nu^2+2\kappa} - \right.\right.$$
$$\left.\left. -\sqrt{\nu^2+2\kappa}M(t_{1n})\right)\cos\ t\sqrt{\nu^2+2\kappa}\right)\exp\nu(t - t_{1n}),$$

$$\text{б)}\ f_2(t) \equiv -\left(M(t_{2n})\cos t\sqrt{\nu^2+2\kappa} + \right.$$
$$\left. +\left[M'(t_{2n}) - \nu M(t_{2n})\right]\sin\left(t\sqrt{\nu^2+2\kappa}\right)\Big/\sqrt{\nu^2+2\kappa}\right)\exp\nu(t - t_{2n}),$$

$$f_2'(t) = -\Big(M'(t_{2n})\cos t\sqrt{\nu^2+2\kappa} + \Big(\nu\big[M'(t_{2n}) - \nu M(t_{2n})\big]\Big/\sqrt{\nu^2+2\kappa} - \sqrt{\nu^2+2\kappa}\times$$

$$\times M(t_{2n})\Big)\sin\ t\sqrt{\nu^2 + 2\kappa}\Big)\exp\nu(t - t_{2n}),$$

$$\text{в)}\ \ f_3(t) \equiv \Big(-M(t_{3n})\sin t\sqrt{\nu^2+2\kappa} +$$

$$+\big[M'(t_{3n}) - \nu M(t_{3n})\big]\cos\Big(t\sqrt{\nu^2+2\kappa}\Big)\Big/\sqrt{\nu^2+2\kappa}\Big)\exp\nu(t - t_{3n}),$$

$$f_3'(t) = \Big(-M'(t_{3n})\sin t\sqrt{\nu^2+2\kappa} + \Big(\nu\big[M'(t_{3n}) - \nu M(t_{3n})\big]\Big/\sqrt{\nu^2+2\kappa} - \sqrt{\nu^2+2\kappa}\times$$

$$\times\ M(t_{3n})\Big)\cos t\sqrt{\nu^2 + 2\kappa}\Big)\exp\nu(t - t_{3n});$$

6. $$M(t_{kn}) > 0,\ M'(t_{kn}) \geq 2(\nu + \kappa/\nu)M(t_{kn});$$

7. $$M(t_{kn}) \equiv M(0)\exp\nu t_{kn},\ M'(t_{kn}) \equiv M'(0)\exp\nu t_{kn};$$

$$M(0) > 0,\ M'(0) \geq 2(\nu + \kappa/\nu)M(0),$$

$$f_1(t) = \Big(M(0)\sin t\sqrt{\nu^2+2\kappa} - \big[M'(0) - \nu M(0)\big]\cos\Big(t\sqrt{\nu^2+2\kappa}\Big)\Big/\sqrt{\nu^2+2\kappa}\Big)\exp\nu t,$$

$$f_2(t) = -\Big(M(0)\cos t\sqrt{\nu^2+2\kappa} + \big[M'(0) - \nu M(0)\big]\sin\Big(t\sqrt{\nu^2+2\kappa}\Big)\Big/\sqrt{\nu^2+2\kappa}\Big)\exp\nu t,$$

$$f_3(t) = \Big(-M(0)\sin t\sqrt{\nu^2+2\kappa} + \big[M'(0) - \nu M(0)\big]\cos\Big(t\sqrt{\nu^2+2\kappa}\Big)\Big/\sqrt{\nu^2+2\kappa}\Big)\exp\nu t.$$

Если проанализировать финальные выражения для функций $f(t)$, $f_k(t)$ $(k = 1,\ 2,\ 3)$, то несложно увидеть, что графиками данных функций на отвечающих им полуинтервалах времени будут являться кривые, которые лежат поперек полуполосы, экспоненциально быстро уходящей на бесконечность, причем их левые концы опираются сверху на нижнюю границу этой полуполосы

$$g(t) \equiv M(0)\exp\nu t,$$

а правые — примыкают к ее верхней границе

$$g_2(t) \equiv \big[M'(0) - \nu M(0)\big]\exp(\nu t)\Big/\sqrt{\nu^2 + 2\kappa}.$$

Данное наблюдение позволяет прийти к совершенно определенному выводу о том, что если интеграл M (18) и растет со временем, то, по крайней мере, не медленнее, чем экспоненциально. Тем самым продемонстрировано, что, при наличии условий (21), из соотношения (20) действительно вытекает желаемая априорная экспоненциальная оценка снизу (22).

Теперь наступило время отдельно остановиться на связи реализованной процедуры поинтервального интегрирования дифференциального неравенства (20) с исследуемой линеаризованной начально-краевой задачей (15), (16). Эта связь состоит в том, что для соотношения (20) удалось путем выбора специальных начальных условий (см. третье и четвертое выражения из системы соотношений (21)) на левых концах изучаемых временных промежутков доказать существование единых начальных данных (см. два последних неравенства в системе соотношений (21)) для малых винтовых возмущений (15), (16) точных стационарных решений (9), (10) смешанной задачи (1), (2), (4)–(7), которые обеспечивают справедливость условий положительности и строгого возрастания функций $f(t)$, $f_k(t)$ $(k = 1,\ 2,\ 3)$ (см. первые два неравенства из системы соотношений (21)) на всех рассматриваемых полуинтервалах времени. Значит, согласно определению неустойчивого по Ляпунову на полубесконечном временном промежутке решения системы дифференциальных уравнений [16] этим показана принципиальная возможность возникновения и последующей эволюции во времени неограниченно нарастающих малых винтовых возмущений (15), (16) точных стационарных решений (9), (10) начально–краевой задачи (1), (2), (4)–(7).

Итак, условия (21) и неравенство (22) убедительно говорят о том, что среди малых винтовых возмущений (15), (16) с начальными данными (21) точных стационарных решений (9), (10) смешанной задачи (1), (2), (4)–(7) могут быть и растущие со временем, при этом, как минимум, не медленнее, чем экспоненциально. Более того, для экспоненциально нарастающих во времени малых винтовых возмущений (15), (16), (21) счетный набор условий (21) удовлетворяется тождественно и автоматически.

Таким образом, продемонстрировано, что соотношение (14) на самом деле представляет собой искомое необходимое и достаточное условие теоретической линейной устойчивости, а два первых неравенства в системе соотношений (21) — желаемые достаточные условия практической линейной неустойчивости установившихся МГД течений (9), (10) однородной по плотности невязкой несжимаемой идеально проводящей жидкости относительно малых винтовых возмущений (11), (12), (15), (16), (21). Кроме того, показано, что тогда, когда критерий (14) теоретической линейной устойчивости не выполняется, а достаточные условия (21) практической линейной неустойчивости, наоборот, имеют место, действительно конструируется требуемая априорная экспоненциальная нижняя оценка (22) роста малых винтовых возмущений (15), (16), (21) со временем.

Ясно, что, в согласии с более ранними результатами иных авторов [1, 2], в присутствии теоретической неустойчивости практическая неустойчивость в то же самое время может быть, а может и не быть. Тем не менее, как оказалось, достаточные условия (21) практической линейной неустойчивости можно получить лишь в том случае, когда нарушено необходимое и достаточное условие (14) теоретической линейной устойчивости. Интересно также и то, что обнаруженные здесь критерий теоретической линейной устойчивости и достаточные условия практической линейной неустойчивости носят конструктивный характер, поскольку их истинность может быть проверена как в физических, так и в численных экспериментах.

В завершение логично отметить то обстоятельство, что включение в исследование дополнительного скалярного поля q (4) дало возможность установить необходимое и достаточное условие (14) теоретической линейной устойчивости в рамках целого семейства определений устойчивости по Ляпунову [16] (одно из этих определений отличается от другого в зависимости от того, что именно взято в качестве упомянутого выше дополнительного скалярного поля). Однако, если критерий (14) теоретической линейной устойчивости не выполняется, точные стационарные решения (9), (10) начально-краевой задачи (1), (2), (4)–(7) будут неустойчивы по отношению к малым винтовым возмущениям (11), (12), (15), (16), (21), причем независимо от конкретного выбора дополнительного скалярного поля q (4), т. е. для всего связанного с ним семейства определений устойчивости по Ляпунову в целом. Данное рассуждение, кстати, подтверждается, например, тем, что в выражение для интеграла П (17) функция Q (9) вообще не входит.

Помимо этого разумно обратить внимание на тот факт, что именно интеграл M (18) и служит тут тем искомым функционалом Ляпунова, который нарастает во времени в силу уравнений смешанной задачи (15), (16). Характерной чертой данного роста является большая произвольность, оставшаяся за положительной постоянной величиной ν в показателе экспоненты из правой части неравенства (22). Он, наряду с прочим, позволяет интерпретировать любое решение начально-краевой задачи (15), (16), (21), которое нарастает со временем согласно найденной априорной экспоненциальной оценке снизу (22), как аналог примера некорректности по Адамару [17].

Наконец, детально описанная выше процедура интегрирования соотношения (20) наглядно демонстрирует, что сведения о начальных условиях (21) для растущих во времени малых винтовых возмущений (15), (16) могут быть извлечены и при изучении класса кусочно-непрерывных функций.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе рассмотрена линейная задача устойчивости одного подкласса установившихся винтовых течений однородной по плотности невязкой несжимаемой жидкости с бесконечной проводимостью в винтовом же магнитном поле.

Прямым методом Ляпунова получены необходимое и достаточное условие теоретической устойчивости, а также достаточные условия практической неустойчивости этих течений относительно малых возмущений, обладающих свойством винтовой симметрии.

В свою очередь, тогда, когда данный критерий теоретической устойчивости нарушен, но достаточные условия практической неустойчивости, тем не менее, справедливы, построена априорная экспоненциальная нижняя оценка нарастания исследуемых малых возмущений, при этом инкремент фигурирующей в ней экспоненты представляет собой некий положительный параметр.

Стоит подчеркнуть, что с математической точки зрения результаты настоящей статьи, в основной своей массе, априорны, т. к. теоремы существования решений изучавшихся смешанных задач для систем дифференциальных уравнений с частными производными не доказаны.

Наконец, необходимое и достаточное условие (14) теоретической устойчивости точных стационарных решений (9), (10) начально-краевой задачи (1), (2), (4)–(7) по отношению к малым винтовым возмущениям (11), (12), (15), (16), (21) является, с одной стороны, обобщением на магнитную гидродинамику и течения с винтовой симметрией известного критерия Рэлея [18] о “центробежной” устойчивости вращающихся потоков, а с другой — распространением необходимого и достаточного условия устойчивости работы [13] на более широкий класс установившихся винтовых МГД течений однородной по плотности идеальной несжимаемой жидкости с неограниченной проводимостью.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ И СОКРАЩЕНИЙ

МГД — магнитогидродинамический,
r, φ, z — цилиндрические координаты,
$\mathbf{h} = (h_1, h_2, h_3)$ — магнитное поле,
μ — винтовая координата,
a — целое число,
Q^-, Q^+ — минимальное и максимальное значения функции Q внутри области течения τ,
u', γ', $p^{*\prime}$, ρ_1', ρ_2', h_3', q', h_2', $\mathbf{u}'$, $\mathbf{h}'$ — малые возмущения изучаемых стационарных винтовых МГД течений,

b — вещественное число,
$\mathbf{u} = (u, v, w)$ — поле скорости,
p — поле давления,
t — время,
D — дифференциальный оператор,
γ, β, R, K, p^*, ρ_1, g_1, ρ_2 — вспомогательные обозначения,
q — дополнительное скалярное поле,
τ — область течения,
$\partial\tau$ — ее граница,
s — функция, описывающая форму границы $\partial\tau$ области течения τ,
u_0, γ_0, ρ_{10}, ρ_{20}, h_{30}, q_0 — начальные данные для функций u, γ, ρ_1, ρ_2, h_3 и q_0 соответственно,
E_1 — функционал полной энергии,
I — интеграл движения,
Φ — функция аргумента q,
T_1, Π_1, Π_2 — вспомогательные функционалы,
$d\tau$ — элемент объема области течения τ,
U_1, U_2 — функции аргумента r,
C_1, C_2 — значения функций U_1 и U_2 на границе $\partial\tau$ области течения τ соответственно,
ρ_1^0, ρ_2^0, h_3^0, Q, P^* — функции, которые описывают исследуемые установившиеся винтовые МГД течения,
β^0, V, W — вспомогательные функции аргумента r,
u'_0, γ'_0, ρ'_{10}, ρ'_{20}, h'_{30}, q'_0 — начальные данные для функций u', γ', ρ'_1, ρ'_2, h'_3 и q' соответственно,
E — линейный аналог интеграла полной энергии E_1,
T, Π — вспомогательные функционалы,
$\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ — поле лагранжевых смещений,
ζ — винтовая составляющая поля лагранжевых смещений $\boldsymbol{\xi}$,
ξ_{10}, $(\xi_{1t})_0$, ζ_0, $(\zeta_t)_0$ — начальные данные для компонентов ξ_1, ζ поля лагранжевых смещений $\boldsymbol{\xi}$ и их частных производных первого порядка по времени t соответственно,
M — вспомогательный интеграл,
ν, α_1, α_2, κ — постоянные величины,
n — неотрицательное целое число,
C — известная положительная постоянная,
t_n, M_1, M_2, M_3 — вспомогательные обозначения,
C_{1n}, C_{2n} — постоянные величины,
f — вспомогательная функция аргумента t,
t_{kn} — вспомогательное обозначение,
k — натуральное число, принимающее значения 1, 2 и 3,
C_{3n}, C_{4n} — постоянные,
f_k, f_1, f_2, f_3, g, g_2 — вспомогательные функции аргумента t.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Карачаров К.А., Пилютик А.Г.** Введение в техническую теорию устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1962. 244 с.
2. **Ла–Салль Ж., Лефшец С.** Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. М.: Мир, 1964. 168 с.
3. **Губарев Ю.Г.** Устойчивость стационарных струйных сдвиговых течений идеальной жидкости со свободной границей в азимутальном магнитном поле относительно малых длинноволновых возмущений // ПМТФ. 2004. Т. 45, № 2. С. 111–123.
4. **Gubarev Yu.G.** On stability of steady–state plane–parallel shearing flows in a homogeneous in density ideal incompressible fluid // Nonlinear Analysis: Hybrid Systems. 2007. Vol. 1, No. 1. P. 103–118.
5. **Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.** Теоретическая физика. М.: Наука, 1982. 632 с. Т. 8. Электродинамика сплошных сред.
6. **Владимиров В.А.** Условия нелинейной устойчивости течений идеальной несжимаемой жидкости // ПМТФ. 1986. № 3. С. 70–78.
7. **Владимиров В.А., Губарев Ю.Г.** Условия нелинейной устойчивости плоских и винтовых МГД течений // Прикладная математика и механика. 1995. Т. 59. Вып. 3. С. 442–450.
8. **Смирнов В.И.** Курс высшей математики. М.: Наука, 1965. Т. 1. 479 с.
9. **Ляпунов А.М.** Общая задача об устойчивости движения. М., Л.: ГИТТЛ, 1950. 471 с.
10. **Четаев Н.Г.** Устойчивость движения. М.: Гостехиздат, 1955. 207 с.
11. **Чандрасекхар С.** Эллипсоидальные фигуры равновесия. М.: Мир, 1973. 288 с.
12. **Laval G., Mercier C., Pellat R.** Necessity of the energy principles for magnetostatic stability // Nuclear Fusion. 1965. Vol. 5, No. 2. P. 156–158.
13. **Губарев Ю.Г.** К неустойчивости винтовых магнитогидродинамических течений // Изв. РАН. МЖГ. 1999. № 1. С. 150–156.
14. **Чаплыгин С.А.** Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. М., Л.: ГИТТЛ, 1950. 104 с.
15. **Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х.** Математический анализ. М.: Наука, 1979. 720 с.
16. **Демидович Б.П.** Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
17. **Годунов С.К.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979. 392 с.
18. **Rayleigh J.W.S.** On the dynamics of revolving fluids // Scientific papers. Vol. 6. Cambridge: Cambridge UP, 1916. P. 447–453.

Статья поступила в редакцию 26 декабря 2008 г.