ЛИТЕРАТУРА

1. Осовец С. М. Плазменный виток в электромагнитном поле. Сб. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций». Изд. АН СССР, 1958, стр. 238.
2. Осовец С. М., Петров Ю. Ф., Щедрин Н. И. Исследование газового разряда в односвязной области. Сб. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций». Изд. АН СССР, 1958, стр. 242.
3. Ладиков Ю. П. Некоторые задачи динамики магнитно-вихревых конфигураций. ПММ, 1960, т. 24, вып. 5.

ЗАМЕЧАНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ГОРЕНИЯ ПОРОХОВ

С. С. Новиков, Ю. С. Рязанцев

(Москва)

Устойчивость горения порохов исследовалась в работах [1-5]. При этом в [3-5] использовался стандартный для теории гидродинамической устойчивости метод элементарных волновых решений.

Известно, что этот метод не всегда дает исчерпывающее исследование устойчивости [6]. В [3-5] также оставался не вполне ясным вопрос о полноте полученных результатов и физическом смысле найденных решений.

В данной заметке результаты [3-5] обосновываются путем рассмотрения задачи об изменении стационарного режима горения пороха под влиянием заданного возмущения. Задача решается методом преобразования Лапласа.

Предполагается, что нарушение стационарности режима горения вызвано слабым изменением давления $\delta p\,(t)$

$$\delta p = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ -p_0 e^{-\sigma_0 t} & (t > 0) \quad \operatorname{Re}\sigma_0 > 0 \end{cases} \tag{0.1}$$

Можно показать, что полученные ниже результаты не связаны с видом возмущения давления (0.1). Эти результаты не изменятся также, если принять, что возмущение стационарного режима вызвано не изменением давления, а слабым начальным отклонением температуры от стационарного профиля.

1. Рассмотрим случай, когда горение пороха описывается теорией Я. Б. Зельдовича.

Согласно работе [2], возмущение скорости горения δU при малых отклонениях от стационарного режима зависит только от возмущений давления δp и градиента температуры на поверхности K-фазы (конденсированной фазы) $\delta\varphi$

$$\frac{\delta U}{U} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1}\frac{\delta\varphi}{\varphi} + \frac{\nu}{1-\varepsilon}\frac{\delta p}{p}$$

$$\varphi = \frac{U}{\varkappa}(T_s - T_0), \qquad \varepsilon = \left(\frac{\partial \ln U}{\partial T_0}\right)_p (T_s - T_0), \qquad \nu = \left(\frac{\partial \ln U}{\partial \ln p}\right)_{T_0} \tag{1.1}$$

Здесь U — скорость горения, $\varkappa$ — коэффициент температуропроводности, T_s — температура поверхности пороха, p — давление, φ — градиент температуры на поверхности пороха, T_0 — начальная температура.

Малые отклонения температуры пороха $\tau\,(x, t)$ от стационарного михельсоновского профиля удовлетворяют линеаризованному уравнению теплопроводности, которое в системе координат, связанной с поверхностью пороха ($x = 0$), имеет вид

$$\varkappa \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} - U\frac{\partial \tau}{\partial x} - \frac{\partial \tau}{\partial t} = \delta U\,\frac{U}{\varkappa}(T_s - T_0)\exp\frac{Ux}{\varkappa} \tag{1.2}$$

Из условий постоянства температуры на горящей поверхности и на большом расстоянии от нее следуют граничные условия

$$\tau\,(0, t) = \tau_s = 0, \qquad \tau\,(-\infty, t) = 0 \tag{1.3}$$

Из стационарности невозмущенного режима горения следует начальное условие

$$\tau\,(x, 0) = 0 \qquad -\infty < x < 0 \tag{1.4}$$

Найдем решение задачи (1.1)—(1.4) методом преобразования Лапласа, введя преобразованную температуру по формуле

$$\tau^*(x, \sigma) = \int_0^\infty e^{-\sigma t} \tau(x, t)\, dt \tag{1.5}$$

Из преобразованных по Лапласу уравнения (1.2) и условий (0.1), (1.1), (1.3) можно получить

$$\tau^*(x, \sigma) = \frac{T_s - T_0}{\varphi s}\left(\exp \alpha_1 x - \exp \frac{Ux}{\varkappa}\right)\left[\frac{1}{\varepsilon - 1}\left(\frac{d\tau^*}{dx}\right)_0 + \frac{\varphi}{p}\,\frac{\nu}{\varepsilon - 1}\,\frac{p_0}{\sigma + \sigma_0}\right] \tag{1.6}$$

$$\left(\alpha_1 = \frac{U}{2\varkappa}(1 + \sqrt{1 + 4s}), \quad s = \frac{\sigma\varkappa}{U^2}\right)$$

Дифференцируя (1.6) и полагая $x = 0$, можно найти

$$\left(\frac{d\tau^*}{dx}\right)_0 = \frac{\nu p_0 (T_s - T_0)(1 - \sqrt{1 + 4s})\,[2s(1 - \varepsilon) - \varepsilon - \varepsilon\sqrt{1 + 4s}]}{4pUs(s + s_0)\,[(1 - \varepsilon)^2 s - \varepsilon]} \tag{1.7}$$

Формула (1.6) с учетом (1.7) дает явное выражение преобразованного по Лапласу возмущения температуры пороха.

Применяя к функции $\tau^*(x, \sigma)$ формулу обращения, можно получить выражение функции $\tau(x, t)$, описывающее изменение распределения температуры в K-фазе под действием возмущения давления $\delta p(t)$.

Однако для исследования устойчивости стационарного режима горения достаточно изучить выражение градиента температуры на горящей поверхности, которое имеет вид

$$\frac{\partial \tau(0, t)}{\partial x} = \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{\sigma t}\left(\frac{d\tau^*}{dx}\right)_0 d\sigma, \qquad \operatorname{Re}\gamma > 0 \tag{1.8}$$

Линия интегрирования в (1.8) проходит на комплексной плоскости σ правее особенностей подынтегральной функции, которые располагаются в точках $\sigma_1 = 0$ (полюс), $\sigma_2 = \sigma_0$ (полюс), $\sigma_3 = U^2\varepsilon / (1 - \varepsilon)^2\varkappa$ (полюс), $\sigma_4 = -U^2 / 4\varkappa$ (точка ветвления).

Воспользовавшись стандартным методом вычисления оригинала по изображению [7], придем к выводу, что интеграл (1.8) равен сумме вычетов подынтегральной функции в полюсах $\sigma_{1,2,3}$ и интегралу по берегам разреза на комплексной плоскости σ, который удобно провести от точки ветвления σ_4 вдоль действительной оси до $\sigma \to -\infty$. Вычет подынтегрального выражения в точке σ_1 равен нулю. Вычет в точке σ_2 дает вклад в виде слагаемого, зависящего от времени как $\exp(-\sigma_0 t)$.

Вычет подынтегральной функции в точке σ_2 и интеграл по берегам разреза экспоненциально убывают со временем, в то время как вычет в точке σ_3 равен нулю при $\varepsilon < 1$, но отличен от нуля и зависит от времени как $\exp[U^2\varepsilon t / \varkappa(1 - \varepsilon)^2]$ при $\varepsilon > 1$.

Отсюда следует, что при $\varepsilon < 1$ возмущения режима горения, вызванные изменением давления δp, затухают со временем. Когда $t \to \infty$, распределение температуры в порохе и скорость горения возвращаются к стационарным значениям, горение устойчиво.

При $\varepsilon > 1$ возмущения скорости горения и температуры не затухают с ростом t. Зависимость возмущений от времени асимптотически приближается к экспоненциальной зависимости вида $\exp[U^2\varepsilon t / \varkappa(1 - \varepsilon)^2]$, горение неустойчиво.

2. Рассмотрим случай, когда при малых отклонениях от стационарного режима горения, вызванных возмущением давления (0.1), меняются не только скорость горения и градиент температуры на поверхности пороха, но и температура поверхности [3-5].

Соотношения между возмущениями давления, скорости горения, градиента температуры и температуры на поверхности пороха могут быть записаны в виде

$$\frac{\delta U}{U} = a_1\frac{\delta\varphi}{\varphi} + b_1\frac{\delta p}{p}, \qquad \frac{\tau_s}{T_s - T_0} = a_2\frac{\delta\varphi}{\varphi} + b_2\frac{\delta p}{p} \tag{2.1}$$

В работе [8] формулы (2.1) получены из предположения о справедливости стационарных зависимостей $U(p, \varphi)$ и $T_s(p, \varphi)$ в нестационарных условиях.

В соотношениях (2.1) введены следующие обозначения:

$$a_1 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon + r - 1}, \quad b_1 = \frac{\nu (r - 1) - \mu\varepsilon}{\varepsilon + r - 1}, \quad a_2 = \frac{r}{\varepsilon + r - 1}$$

$$b_2 = \frac{\mu (\varepsilon - 1) - \nu r}{\varepsilon + r - 1}, \quad r = \left(\frac{\partial T_s}{\partial T_0}\right)_p, \quad \mu = \frac{1}{T_s - T_0}\left(\frac{\partial T_s}{\partial \ln p}\right)_{T_0} \tag{2.2}$$

Соотношения (2.1) следуют также из приближенного учета химической реакции разложения в порохе [4].

В рассматриваемом случае поведение малых возмущений скорости горения δU и температуры пороха $\tau\ (x,\ t)$ определяется уравнением (1.2) с условиями (2.1), (1.4).

Как и прежде, решение задачи может быть получено методом преобразования Лапласа, а исследование устойчивости сведено к исследованию выражения для преобразованного по Лапласу возмущения градиента температуры на поверхности пороха, которое имеет вид

$$\left(\frac{d\tau^*}{dx}\right)_0 = \frac{\nu p_0 (T_s - T_0)}{4pUs(s + s_0)(s - s_1)(s - s_2)} [(\mu\varepsilon - \nu r + \nu)(1 - \sqrt{1 + 4s}) + s(\mu\varepsilon - \mu - \nu r) \times$$
$$\times (1 + \sqrt{1 + 4s})] [(rs + \varepsilon)\sqrt{1 + 4s} + \varepsilon - s(2 - 2\varepsilon - r)]$$

$$s_{1,2} = \frac{(\varepsilon - 1)^2 - r(\varepsilon + 1) \pm [((\varepsilon - 1)^2 - r(\varepsilon + 1))^2 - 4r^2\varepsilon]^{1/2}}{2r^2} \tag{2.3}$$

Величина $(\partial\tau / \partial x)_0$, определяемая формулами (1.8), (2.3), равна сумме вычетов подынтегральной функции в полюсах $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = \sigma_0$, $\sigma_3 = U^2 s_1 / \varkappa$, $\sigma_4 = U^2 s_2 / \varkappa$ и интегралу по берегам разреза вдоль действительной оси от точки ветвления $\sigma_5 = - U^2 / 4\varkappa$ до $\sigma = -\infty$.

Вычет в полюсе σ_1 равен нулю. Вычет в полюсе σ_2 и интеграл по разрезу экспоненциально стремятся к нулю с ростом t. Величины вычетов подынтегрального выражения в полюсах σ_4 и σ_5 существенно зависят от значений ε и r. Из экспериментов известно, что реальные значения ε и r лежат в интервале $\varepsilon > 0$ $(0 < r < 1)$.

При $\varepsilon < 1$, $r < (\varepsilon - 1)^2 / (\varepsilon + 1)$ непосредственным подсчетом убеждаемся, что вычеты в полюсах σ_3, σ_4 равны нулю. Возмущения стационарного режима затухают со временем. Горение устойчиво.

Если $\varepsilon > 1$, вычеты в полюсах σ_3 и σ_4 отличны от нуля и зависят от времени как $\exp (s_1 U^2 t / \varkappa)$ и $\exp (s_2 U^2 t / \varkappa)$ соответственно.

При $\varepsilon > 1$ и $r < (\varepsilon - 1)^2 / (\varepsilon + 1)$ величины вычетов в полюсах σ_3 и σ_4 экспоненциально увеличиваются с ростом времени, режим горения неустойчив.

При $\varepsilon > 1$ и $r > (\varepsilon - 1)^2 / (\varepsilon + 1)$ величины вычетов в σ_3 и σ_4 экспоненциально убывают с ростом t. Режим горения устойчивый. При $\varepsilon > 1$ и $r = (\varepsilon - 1)^2 / (\varepsilon + 1)$ вычеты в точках σ_3 и σ_4 содержат временной множитель вида $\exp [it (\varepsilon)^{1/2} / r]$ (граница устойчивости).

Из проведенного рассмотрения следует, что выполненный в работах [3-5] анализ устойчивости горения пороха в рамках принятого в этих работах квазистационарного описания зоны горения является полным. Найденные в [3-5] незатухающие экспоненциальные решения описывают асимптотическое поведение малых возмущений стационарной скорости горения и стационарного распределения температуры.

Авторы благодарны А. Г. Истратову, В. Б. Либровичу и А. И. Леонову за замечания.

Поступила 10 II 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я. Б. К теории горения порохов и взрывчатых веществ. Ж. эксперим. и теор. физ., 1942, т. 12, стр. 498.
2. Зельдович Я. Б. О скорости горения пороха при переменном давлении. ПМТФ, 1964, № 3.
3. Истратов А. Г., Либрович В. Б. Об устойчивости горения пороха. ПМТФ, 1964, № 5.
4. Новиков С. С., Рязанцев Ю. С. К теории устойчивости горения порохов. ПМТФ, 1965, № 1.
5. Новожилов Б. В. Критерий устойчивости стационарного горения пороха. ПМТФ, 1965, № 4.
6. Кейз К. М. Гидродинамическая устойчивость как задача с начальными данными. Сб. «Гидродинамическая неустойчивость», Москва, Изд-во «Мир», 1964.
7. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. Физматгиз, 1960.
8. Новожилов Б. В. Горение пороха при гармонически меняющемся давлении. ПМТФ, 1965, № 6.