



**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ЗА ПРЕДЕЛАМИ УПРУГОСТИ
В ТРАНСВЕРСАЛЬНО ИЗОТРОПНОМ МАССИВЕ ОКОЛО ВЫРАБОТКИ**

М. Е. Ескалиев¹, С. Малгаждаров²

¹*Казахский Национальный женский педагогический университет,*
E-mail: Yeskaliyev@mail.ru, ул. Айтеке би 99, г. Алматы 00050, Республика Казахстан

²*Военно-инженерный институт радиоэлектроники и связи,*
ул. Жандосова 53, г. Алматы 00063, Республика Казахстан

Рассмотрено развитие предельных состояний вблизи выработки в трансверсально изотропном (слоистом) массиве сложного строения. В упругой зоне горный массив имеет анизотропную структуру и подчиняется обобщенному закону Гука, а в пластической зоне предполагается изотропным. При определении пластических зон использован критерий разрушения Хоека – Брауна. Задача решается приближенно полуобратным методом П. И. Перлина с привлечением итерационной схемы. Составлена система алгебраических уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов комплексного потенциала С. Г. Лехницкого. Величины перемещений в пластической зоне находятся с помощью метода характеристик.

Упругость, пластичность, параметр, комплексный потенциал, перемещения, алгоритм, система

**MATHEMATICAL MODELING OF DISPLACEMENTS OUTSIDE THE
ELASTIC LIMITS IN TRANSVERSALLY ISOTROPIC MASSIF NEAR THE WORKING**

M. E. Eskaliev¹ and S. Malgazhdarov²

Kazakh National Women's Teacher Training University,
E-mail: Yeskaliyev@mail.ru, ul. Aiteke bi 99, Almaty, 00050 Republic of Kazakhstan,
Military Engineering Institute of Radio Electronics and Communications,
ul. Zhandosov 54, Almaty 00063, Republic of Kazakhstan

The development of limiting states near a mine in a transversally isotropic (layered) massif of complex structure is considered. In the elastic zone, the massif has an anisotropic structure and obeys the generalized Hooke's law, and in the plastic zone it is assumed isotropic. When determining the plastic zones, the Hoek-Brown failure criterion was used for the first time. The problem is solved approximately by the P.I. Perlin's semi-inverse method using an iterative scheme. A system of algebraic equations is constructed to find the unknown coefficients of the complex potential. The values of displacements in a plastic zone are found using the characteristics method.

Elasticity, plasticity, parameter, complex potential, displacements, algorithm, system

Допускается, что область неупругой деформации полностью охватывает незакрепленный контур выработки радиуса R и изотропный несжимаемый материал в зоне неупругой деформации подчиняется критерию текучести Хоека – Брауна без смягчения, упругая область находится в условиях плоской деформации, а поведение материала описывается уравнением обобщенного закона Гука для однородного трансверсально изотропного массива с наклонной плоскостью изотропии [1].

Вокруг круговой выработки удобно представить компоненты напряжений в полярных координатах. Компоненты напряжений σ_r^p , σ_θ^p , $\tau_{r\theta}^p$ в пластической зоне удовлетворяют дифференциальным уравнениям равновесия (индекс p сверху указывает на принадлежность к этой зоне):

$$\frac{\partial \sigma_r^p}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}^p}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r^p - \sigma_\theta^p}{r} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}^p}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta^p}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{r\theta}^p}{r} = 0,$$

граничным условиям на контуре полости (при $r = 1$)

$$\sigma_r^p = p_0 = \text{const}, \quad \tau_{r\theta}^p = 0 \quad (2)$$

и условию пластичности Хоека – Брауна [2]:

$$(\sigma_r^p - \sigma_\theta^p) - \sqrt{-m\sigma_r^p \sigma_c + s\sigma_c^2} = 0, \quad (3)$$

где $\sigma_c > 0$ — сопротивление при простом сжатии неповрежденного камня (породы), берется из эксперимента; s — параметр, определяющий уровень поврежденности (1 — для неповрежденного материала, 0 — когда материал полностью раздроблен).

Считаем, что критерий пластичности достигается по всей предельной зоне, что позволяет записать σ_θ через σ_r и решить уравнение равновесие. Полученное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\sigma_r^p}{dr} = \frac{\sqrt{-m\sigma_c \sigma_r + s\sigma_c^2}}{r} \quad (4)$$

при граничных условиях $r = R$

$$\sigma_r^p = -P_i,$$

где P_i — внутреннее давление; m — параметр, связанный со свойствами горной породы (обычно от 5 до 30).

Преобразование дифференциального корня сложной функции:

$$\frac{d\sigma_r^p}{\sqrt{-m\sigma_c \sigma_r + s\sigma_c^2}} = -\frac{dr}{r}. \quad (5)$$

Компоненты пластических напряжений в полярной системе координат таковы:

$$\sigma_r^p = \frac{s\sigma_c}{m} - \frac{1}{m\sigma_c} \left(\sqrt{s\sigma_c^2 - m\sigma_c P_i} + \frac{m\sigma_c}{2} \ln \frac{r}{R} \right)^2, \quad (6)$$

$$\sigma_\theta^p = \sigma_r^p - \sqrt{s\sigma_c^2 - m\sigma_c \sigma_r^p}.$$

В силу статической определенности задачи в пластической зоне компоненты напряжений в прямоугольных координатах находятся независимо от напряжений на “бесконечности”:

$$\frac{-\sigma_x^p}{\sigma_c} = \Psi \frac{(z + \bar{z})^2}{4z\bar{z}} (\Psi + \sqrt{1 + m\Psi}) \frac{(z - \bar{z})^2}{4z\bar{z}},$$

$$\frac{-\sigma_y^p}{\sigma_c} = \Psi \frac{(z + \bar{z})^2}{4z\bar{z}} (\Psi + \sqrt{1 + m\Psi}) \frac{(z + \bar{z})^2}{4z\bar{z}}, \quad (7)$$

$$\frac{-\tau_{xy}^p}{\sigma_c} = (\Psi + 1 + \sqrt{1 + m\Psi}) \frac{z^2 - \bar{z}^2}{4iz\bar{z}},$$

где $\Psi = \ln \sqrt{\frac{z\bar{z}}{R^2}} \left(1 + \frac{m}{4} \ln \sqrt{\frac{z\bar{z}}{R^2}} \right)$, $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$.

Напряжения в упругой зоне представляются через две аналитические функции $\varphi_k(z_k)$ усложненного комплексного аргумента $z_k = x + iy$ ($k = 1, 2$) формулами С. Г. Лехницкого:

$$\begin{aligned}\sigma_x^e &= 2 \operatorname{Re}[\mu_1^2 \varphi_1'(z_1) + \mu_2^2 \varphi_2'(z_2)], \\ \sigma_y^e &= 2 \operatorname{Re}[\varphi_1'(z_1) + \varphi_2'(z_2)], \\ \tau_{xy}^e &= -2 \operatorname{Re}[\mu_1 \varphi_1'(z_1) + \mu_2 \varphi_2'(z_2)],\end{aligned}\quad (8)$$

здесь μ_k находятся как корни характеристического уравнения четвертой степени [3]:

$$\mu^4 + a_1 \mu^2 + a_2 = 0. \quad (9)$$

Для многих анизотропных пород μ_k являются чисто мнимыми величинами, т. е. $\mu_k = i\beta_k$ ($k = 1, 2$). Величины β_k определяют степень анизотропности тела.

Суть полуобратного метода и уточнение неизвестной упруго-пластической границы изложены в работе [2], т. е. на осях Ox и Oy задаются точки A и B как известные точки упруго-пластической границы. Предположим, что между ними искомая граница в первом приближении представляет собой эллипс с полуосями Oa и Ob . Отклонение истинной границы от эллипса уточняется в процессе решения задачи. Конфигурации пластических зон в зависимости от условий текучести представлены на рис. 1.

Конформное отображения внешности эллипса на внешность единичного круга осуществляется функцией

$$z = \omega(\zeta) = m_1(\zeta + m_2 \zeta^{-1}), \quad (10)$$

где $m_1 = 0.5(a+b)$; $m_2 = (a-b)(a+b)^{-1}$; $z = x + iy$; $\zeta = \rho_s \exp(i\theta)$; a, b — полуоси эллипса; ρ_s, θ — полярные координаты точки. Комплексные потенциалы $\varphi_k(z_k)$ представлены в виде [1]:

$$\varphi_k(z_k) = A_{ko} z_k + \sum_{n=1}^{\infty} A_{kn} \zeta_k^{-n}. \quad (11)$$

где $\zeta_k = z_k + \sqrt{z_k^2 - a^2 - \mu_k^2 b^2} (a - i\mu_k b)^{-1}$, $z_k = x + \mu_k y$.

На упруго-пластической границе компоненты напряжений непрерывны:

$$\sigma_x^y = \sigma_x^{\Pi}, \quad \sigma_y^y = \sigma_y^{\Pi}, \quad \tau_{xy}^y = \tau_{xy}^{\Pi}. \quad (12)$$

Предел суммирования $N = (m+2)/2$, m — число промежуточных направлений (лучей).

С учетом формул (7), (8) и используя (12), получим систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов:

$$\begin{cases} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \mu_k^2 [A_{ko} + \sum_{n=1}^N A_{kn} \gamma_{kn,j}(z_{kj,n})] = 0.5 \sigma_{xj}^{\Pi}, \\ \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 [A_{ko} + \sum_{n=1}^N A_{kn} \gamma_{kn,j}(z_{kj,n})] = 0.5 \sigma_{yj}^{\Pi}, \\ \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \mu_k [A_{ko} + \sum_{n=1}^N A_{kn} \gamma_{kn,j}(z_{kj,n})] = 0.5 \tau_{xy}^{\Pi}, \end{cases} \quad (13)$$

где $\gamma_{kn,j}(z_{kj,n}) = -(2n-1) \zeta_{kj}^{-(2n-1)} (\sqrt{z_k^2 - a^2 - \mu_k^2 b^2})^{-1}$ ($k = 1, 2$; $n = 1, 2, \dots, N$; $j = 1, 2, \dots, m+2$).

Решая систему (13), находим $A_{kn}^{(0)}$ (для $\beta_1 = \beta_2 \approx 1.0$ — изотропный случай). Затем, подставляя эти величины в контрольную систему (в третье уравнение) из системы (13), получим разности между их правыми и левыми частями: $\delta_i = \tau_{xy_i}^e - \tau_{xy_i}^{\Pi}$. В зависимости от знака величины δ_i изменяется ρ_i (радиус единичного круга) на выбранный шаг $\pm \Delta\rho$ и процесс решения

повторяется. Каждый раз составляется $\Delta = \left(\sum_{i=1}^m \delta_i^2 \right)^{1/2}$. При выполнении $\Delta \leq \varepsilon$ итерационный процесс заканчивается, где ε определяет заданную точность.

После достижения заданной точности определяются напряжения на “бесконечности” p и q через коэффициенты A_{10} и A_{20} :

$$\sigma_x^\infty = p = 2 \operatorname{Re}(\mu_1^2 A_{10} + \mu_2^2 A_{20}), \quad (14)$$

$$\sigma_y^\infty = q = 2 \operatorname{Re}(A_{10} + A_{20}),$$

и координаты найденной упруго-пластической границы:

$$x_j = \frac{a+b}{2} \left(\rho_{\zeta_j} + \frac{a-b}{a+b} \right) \cos \theta_{\zeta_j}, \quad (15)$$

$$y_j = \frac{a+b}{2} \left(\rho_{\zeta_j} + \frac{a-b}{a+b} \right) \sin \theta_{\zeta_j},$$

где ρ_{ζ_j} — радиусы единичного круга; θ_{ζ_j} — направление лучей.

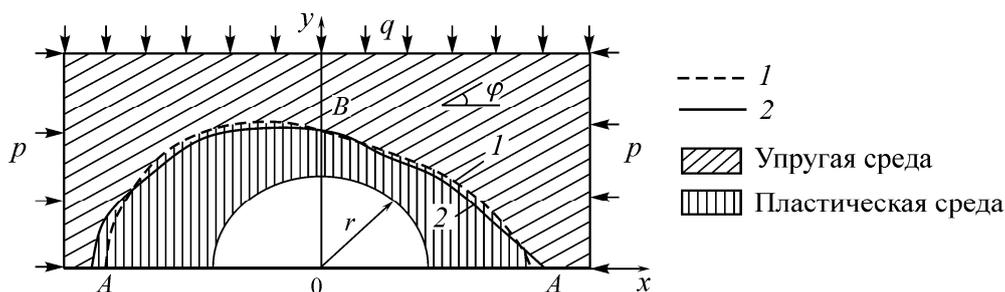


Рис. 1. Конфигурации пластических зон в зависимости от угла наклона плоскости изотропии и от условий пластичности ($k_0 = \sigma_c$, $\varphi = 30^\circ$, $\beta_1 = 2.0$, $\beta_2 = 0.8$): для линии 1 — $A_{10} = 2.7174$ и $A_{20} = 9.4680$, $-p/k_0 = 9.620$, $-q/k_0 = 13.50$; для линии 2 — $A_{10} = 2.2134$ и $A_{20} = -8.0285$ и $-p/\sigma_c = 7.43$, $-q/\sigma_c = 11.63$. Кривая 1 соответствует условию Кулона – Мора; 2 — Хоека – Брауна

Компоненты перемещений на упруго-пластической границе представлены формулами [8]:

$$U^y = 2 \operatorname{Re}[p_1 \varphi_1(z_1) + p_2 \varphi_2(z_2)], \quad V^y = 2 \operatorname{Re}[q_1 \varphi_1(z_1) + q_2 \varphi_2(z_2)],$$

здесь p_k, q_k ($k = 1, 2$) находятся через коэффициенты деформации; коэффициенты для комплексных потенциалов (11) берутся из системы (13) после уточнения упруго-пластической границы [6–9], а оставшиеся два определяются через них, тогда имеем

$$\frac{E_1}{E_2} = \mu_1^{02} \mu_2^{02} (1 - \nu_1^2) + \nu_2^2, \quad (16)$$

$$\frac{E_1}{G_2} = -(\mu_1^{02} + \mu_2^{02})(1 - \nu_1^2) + 2\nu_2(1 + \nu_1).$$

Учитывая непрерывность компонент перемещений на упруго-пластической границе в полярной системе координат, имеем

$$U_r^n = u^n \cos \theta + v^n \sin \theta, \quad (17)$$

$$U_\theta^n = u^n \sin \theta + v^n \cos \theta,$$

Натурные исследования устойчивости в условиях запредельного напряженного состояния и параметры вторичного поля напряжений при сооружении тоннелей в нелинейно-деформированных грунтах выполнены в работах [5–7]. Напряженно-деформированное состояние горных пород при проходке выработок, динамика смещений в разломных зонах и масштабный фактор при разрушении анизотропных пород исследованы в [8–10].

В случае плоской деформации дифференциальные уравнения в частных производных относительно радиальных и окружных перемещений при условии несжимаемости пород в пластической зоне записывается в виде [11]:

$$\frac{\partial U_r^n}{\partial r} + \frac{U_r^n}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta^n}{\partial \theta} = 0, \quad (18)$$

$$\frac{\partial U_\theta^n}{\partial r} + \frac{U_\theta^n}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r^n}{\partial \theta} = 0.$$

$$d\theta = \chi_i dr,$$

где χ_i ($i=1, 2$) являются корнями квадратного уравнения $\begin{vmatrix} -\chi & \frac{1}{r} \\ \frac{1}{r} & -\chi \end{vmatrix} = 0$.

Значения радиальных u_r перемещений, пород пластической области при $\beta_1 = 2.0$, $\beta_2 = 0.8$, $E_1 / E_2 = 2.465$, $E_1 / G_2 = 4.976$, $\nu_1 = \nu_2 = 0.25$, $a = 2.22$, $b = 1.5$ для $-p / \sigma_c = 9.620$, $-q / \sigma_c = 13.50$ для условия текучести Хоека – Брауна представлены в таблице.

Радиальные перемещения от упруго-пластической границы вплоть до контура выработки при условии Хоека – Брауна

θ , град.	$-U_r E_1 / R \sigma_c$ при r/R									
	1.00	1.10	1.20	1.30	1.40	1.50	1.68	1.83	2.00	2.22
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\varphi = 0^\circ$										
0	17.207	16.762	16.351	15.915	15.492	15.066	14.675	14.279	13.868	13.456
15	18.368	18.002	17.645	17.356	16.876	16.508	16.139	15.769	15.404	—
30	24.955	24.361	23.746	23.138	22.544	21.943	21.344	20.743	—	—
45	31.726	31.033	30.512	29.911	29.208	28.587	28.065	—	—	—
60	41.642	41.054	40.452	39.833	39.256	38.658	—	—	—	—
75	46.527	45.925	45.293	44.673	43.441	43.036	—	—	—	—
90	51.123	50.565	49.896	49.337	48.768	48.101	—	—	—	—
$\varphi = 30^\circ$										
0	16.972	16.032	15.703	15.448	15.025	14.599	14.208	13.812	13.401	12.989
15	17.901	17.536	17.179	16.893	16.411	16.041	15.672	15.302	13.737	—
30	24.405	23.795	23.138	22.532	22.484	22.337	22.284	20.137	—	—
45	31.117	30.483	29.952	29.361	28.683	28.166	27.515	—	—	—
60	41.151	40.574	39.962	39.333	38.756	38.158	—	—	—	—
75	46.017	45.415	44.807	44.163	42.941	42.516	—	—	—	—
90	46.611	44.065	43.376	42.837	41.868	40.591	—	—	—	—
105	46.856	43.806	44.306	43.756	41.206	40.656	39.153	—	—	—
120	48.513	48.313	48.004	46.413	45.313	44.553	44.403	44.143	—	—
135	44.518	43.468	42.902	42.336	41.780	41.214	40.648	40.095	39.529	—
150	38.516	35.951	35.394	34.828	34.242	33.655	33.099	32.510	31.920	31.321
165	25.503	24.937	24.362	23.774	22.186	22.587	22.351	21.403	20.717	19.129
180	17.055	16.505	15.965	15.395	14.895	14.415	13.935	13.789	13.411	12.983
$\varphi = 45^\circ$										
0	17.069	16.123	16.583	16.335	15.935	14.693	14.403	13.922	13.511	13.098
15	18.011	17.648	17.291	17.016	16.523	16.152	15.782	15.413	13.857	—
30	24.656	24.045	23.392	22.786	22.748	22.617	22.572	20.417	—	—
45	31.407	30.483	30.242	29.651	28.973	28.456	27.804	—	—	—
60	41.431	40.863	40.251	39.622	39.006	38.438	—	—	—	—
75	46.306	45.695	45.096	44.443	43.221	42.626	—	—	—	—
90	46.793	44.254	43.561	43.025	41.983	40.741	—	—	—	—
105	47.006	43.956	44.456	43.906	41.356	40.806	39.268	—	—	—
120	49.083	48.819	48.381	46.893	45.401	44.331	44.024	44.184	—	—
135	49.445	48.820	48.195	47.570	46.945	46.319	45.667	45.008	—	—
150	43.022	42.396	41.767	41.144	40.518	39.866	39.241	38.615	37.803	37.271
165	25.834	25.434	24.855	24.155	23.655	22.875	22.475	21.575	20.775	20.003
180	18.003	17.493	16.981	16.461	15.941	15.430	14.909	14.398	13.873	13.355

Распределение радиальных u_r перемещений по контуру выработки в зависимости от угла наклона плоскости изотропии φ показано на рис. 2.

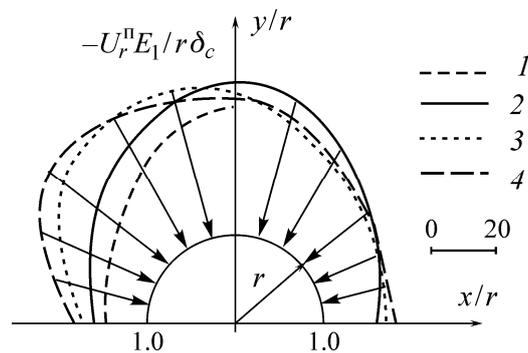


Рис. 2. Распределение радиальных перемещений вблизи полости при условии пластичности Хоека–Брауна: 1 — для изотропной породы; 2 — анизотропный массив при $\varphi = 0^\circ$; 3 — анизотропный массив при $\varphi = 30^\circ$; 4 — анизотропный массив при $\varphi = 45^\circ$

Видно, что значения радиальных перемещений, начиная от предельной зоны до контура выработки монотонно возрастают, а в направлении вкрест плоскости изотропии ($105-135^\circ$) имеют тенденцию к значительному возрастанию.

ВЫВОДЫ

Изучено распределение упруго-пластических перемещений пород вокруг штрека в упругом трансверсально изотропном массиве при выполнении условий текучести Хоека–Брауна для изотропной пластической зоны. Составлены дифференциальные уравнения в частных производных относительно радиальных и окружных перемещений при условии несжимаемости пород в пластической зоне. Для решения этих уравнений гиперболического типа применен метод характеристик. Проанализированы особенности расчета перемещений вокруг штрека в упругом трансверсально изотропном массиве и на упруго-пластической границе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

1. **Lekhnitskiy S. G.** The Theory of elasticity of an anisotropic body, Moscow, 1977, 415 pp. (in Russian) [Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. — М., 1977. — 415 с.]
2. **Perlin P. I.** Approximate method of solution of problem, Engineering Journal, 1960, vol. 28, pp. 145–150. [Перлин П. П. Приближенный метод решения упруго-пластических задач // Инженерный журн. — 1960. — Вып. 28. — С. 145–150.]
3. **Eskaliev M. E., Salgaraeva G. I., Kurmanbekkyzy N., Katayev N. S., and Ayulbekov O.** On the definition of limit zones in layered array with the development of various flow conditions, International Journal of Applied Engineering Research ISSN 0973-4562, 2016, vol. 11, no. 7, pp 5284–5287, Research India Publications. Htt://www.ripublication.com
4. **Eskaliev M. E.** To the calculation of the zones of the limiting state of a layered massif near a mine, Reports of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, 2014, no. 2, pp. 18–25. [Ескалиев М. Е. К расчету зон предельного состояния слоистого горного массива вблизи выработки // Доклады НАН РК, 2014. — № 2. — С. 18–25.]
5. **Balek A. E.** Field studies to ensure the sustain ability of capital working in conditions of transcendental stress, Izv, UGGA, Ser. Gornoye delo, 2000, vol. 11, pp. 209–214. [Балек А. Е. Натурные исследования по обеспечению устойчивости капитальных выработок в условиях запредельного напряженного состояния // Изв. УГГА. Сер. Горное дело. — 2000. — Вып. 11. — С. 209–214.]

6. **Bolikov V. E. and Pol' V. G.** The study of the main parameters of the secondary stress field and their influence on the design of the complex of underground workings, Geomechanics in Mining, abstracts of Int. conf., Yekaterinburg, IGD Uro RAN, 2000, pp. 57–58. [**Боликов В. Е., Полю В. Г.** Исследование основных параметров вторичного поля напряжений и их влияние на проектирование комплекса подземных выработок // Геомеханика в горном деле: тезисы докл. Междунар. конф. — Екатеринбург: ИГД УроРАН, 2000. — С. 57–58.]
7. **Bakhturin I. A. and Pol' V. G.** Treatment works on the stress-strain state of bottom-hole zone of the rock mass during the construction of tunnels in-linearly-detormed soils, Gornyi zhurnal, 2000, no. 6, pp. 52–56. [**Бахтурин И. А., Полю В. Г.** Влияние очистных работ на напряженно-деформированное состояние призабойной зоны массива пород при сооружении тоннелей в нелинейно-деформированных грунтах // Изв. вузов. Горн. журн. — 2000. — № 6. — С. 52–56.]
8. **Ozornin I. L.** Management of the stress-strain state of a rock mass during excavation in tectonically active areas, Geomechanics in mining, Abstracts of reports of the International conference, Yekaterinburg, Institute of Mining, Ural Branch RAN, 2000, pp. 55–56. [**Озорнин И. Л.** Управление напряженно-деформированным состоянием массива горных пород при проходке выработок в тектонически активных районах // Геомеханика в горном деле: тезисы докл. Междунар. конф. — Екатеринбург: ИГД Уро РАН, 2000. — С. 55–56.]
9. **Panzhin S. L.** Studies of displacement dynamics in fault zones, III Ural Youth Scientific School on Geophysics, Collection of Reports, Yekaterinburg, 2002, pp. 75–78. [**Панжин С. Л.** Исследования динамики смещений в разломах // III Уральская молодежная науч. школа по геофизике: сб. докладов. — Екатеринбург, 2002, — С. 75–78.]
10. **Obyedkova V. N. and Kantemirov E. I.** Stress concentration and scale factor in the destruction of anisotropic rocks, Physical problems of rock destruction, Proceedings of the Second International Scientific Conference, Saint Petersburg, Mining Institute, 2002, Part 1, pp. 134–138. [**Объедкова В. Н., Кантемиров Е. И.** Концентрация напряжений и масштабный фактор при разрушении анизотропных горных пород // Физические проблемы разрушения горных пород: сб. трудов II Междунар. науч. конф. — СПб.: Горный институт, 2002, Ч. 1. — С. 134–138.]
11. **Kuznetsov A. I.** Plane deformation of inhomogeneous plastic bodies, Vestnik LGU, Series math., mech. and astr, 1958, no. 13, pp. 112–131. [**Кузнецов А. И.** Плоская деформация неоднородных пластических тел // Вестник ЛГУ. Сер. мат., мех. и астр. — 1958. — № 13. — С. 112–131.]