УДК 532.516+517.95

ГИДРОДИНАМИКА С КВАДРАТИЧНЫМ ДАВЛЕНИЕМ. 1. ОБЩИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

А. П. Чупахин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Описан широкий класс решений уравнений Эйлера с квадратичным давлением. В лагранжевых координатах эти решения точно линеаризуют уравнения импульсов и характеризуются специальными начальными данными: матрица Якоби начального поля скоростей имеет постоянные алгебраические инварианты. При интегрировании уравнений реализуется метод разделения временной и лагранжевых координат. Эволюция по времени определяется эллиптическими функциями. Решения имеют сингулярность типа полюса в конечный момент времени. Дано представление для вихря скорости.

Введение. Для уравнений Эйлера, описывающих движения идеальной несжимаемой жидкости с полем скоростей $\boldsymbol{u} = (u, v, w)$ и давлением p, зависящих от времени t и пространственных координат $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$:
$$D\boldsymbol{u} + \nabla p = 0, \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0, \tag{1}$$
ищутся решения с давлением специального вида
$$p = k(t) r^2/2, \qquad r^2 = x^2 + y^2 + z^2. \tag{2}$$
Функция k в (2) подлежит определению. Заметим, что к давлению в виде (2) может быть добавлена произвольная функция времени.

Точные решения в гидродинамике идеальной жидкости являются предметом многочисленных исследований. Групповые свойства гидродинамических моделей изучаются в работе [1]. Точное решение уравнений Эйлера, частично инвариантное относительно группы вращений (так называемый особый вихрь), рассмотрено в [2]. Отметим также работы [3–7], в которых рассматриваются точные решения уравнений Эйлера.

Приведем несколько аргументов в пользу исследования точных решений уравнений гидродинамики с давлением в виде (2).

1. При исследовании барохронных движений газа $p = p(t)$ следствием уравнений импульсов является простейшее матричное уравнение Риккати $DJ + J^2 + kE = 0$ для матрицы Якоби $J = \partial\boldsymbol{u}/\partial\boldsymbol{x}$, в котором $k = 0$. Полная информация о решении такого уравнения (собственные значения и инварианты, собственные векторы матрицы J, разделение временной переменной и лагранжевых координат в решении) позволяет дать полное описание соответствующих решений в газовой динамике. Давление в виде (2) дает добавку в виде скалярной матрицы kE в уравнение Риккати. Схема исследования барохронных решений применима и в этой более сложной ситуации. Принципиальным моментом остается разделение временной и лагранжевых переменных в решении. При этом происходит замена рациональных функций времени на эллиптические.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99-01-00523) и Совета поддержки ведущих научных школ (код проекта 00-15-96163).

2. Решения уравнений Эйлера для давления в виде (2) исследованы в работах [3, 6, 7], в которых дано их качественное описание. В [3] проинтегрировано матричное уравнение для элементов матрицы Якоби, но не выполнено интегрирование уравнений Эйлера в конечном виде (относительно компонент скорости) и не показано, что решения уравнений Ламе описывают траектории жидких частиц.

3. В гидро- и газодинамике классическим объектом исследования являются решения с линейным полем скоростей, в которых давление является квадратичной функцией пространственных переменных [8, 9]. В этом случае уравнения гидро- и газодинамики сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Исследуемое решение с давлением в виде (2) — частный случай квадратичной функции — не сводится к решениям с линейным полем скоростей. Произвол в решении — три функции двух аргументов.

4. В последнее время в математической физике внимание исследователей привлекают решения, имеющие особенности типа полюсов [10]. Это связано с тем, что редуцированными уравнениями (факторуравнениями) в "больших" моделях математической физики являются уравнения для эллиптических функций и уравнения Пенлеве. В гидродинамике решения такого типа не исследовались систематически.

5. Варианты метода разделения временной и лагранжевых переменных рассматривались в [11]. Системы линейных уравнений в качестве факторуравнений возникали при исследовании частично инвариантных решений уравнений Эйлера в работе [12].

В данной работе приводится алгоритм интегрирования уравнений Эйлера и исследуются общие свойства решения.

1. Соотношения для инвариантов. Пусть $J = \partial \boldsymbol{u}/\partial \boldsymbol{x}$ есть матрица Якоби поля скоростей, k_i, λ_i — алгебраические инварианты и собственные значения матрицы J ($i = 1, 2, 3$). Имеют место соотношения

$$k_1 = \sum_i \lambda_i = \mathrm{tr} J = 0, \quad k_2 = \sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j = -\frac{1}{2} \sum_i \lambda_i^2 = -\frac{1}{2} \mathrm{tr} J^2,$$
$$k_3 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \frac{1}{3} \sum \lambda_i^3 = \frac{1}{3} \,\mathrm{tr} J^3. \tag{3}$$

Уравнение Гамильтона — Кэли для матрицы J имеет вид

$$J^3 + k_2 J - k_3 E = 0, \tag{4}$$

где E — единичная матрица. Следствием уравнений (1) с давлением в виде (2) является матричное уравнение

$$DJ + J^2 + kE = 0. \tag{5}$$

Можно показать, что искомое движение жидкости определяется свойствами матрицы Якоби J, которые следуют из матричного уравнения Риккати (5).

Лемма 1. *Алгебраические инварианты k_2, k_3 матрицы J для описываемого движения являются функциями только времени и определяются из системы обыкновенных дифференциальных уравнений*

$$k_2' - 3k_3 = 0, \quad k_3' + 2k_2^2/3 = 0, \tag{6}$$

сводящейся к уравнению

$${k_2'}^2 = -4k_2^3/3 + C, \tag{7}$$

где C — произвольная постоянная.

Функция $k = k(t)$ в (2) имеет вид

$$k = 2k_2/3. \tag{8}$$

Доказательство. Применяя операцию вычисления следа матрицы к уравнению (5), с учетом (3) получим $2k_2 - 3k = 0$, откуда следует зависимость k_2 только от t и соотношение (8).

Умножив уравнение (5) на матрицу J слева и справа и сложив полученные выражения, придем к уравнению

$$DJ^2 + 2J^3 + 2kJ = 0. \tag{9}$$

Вычислив след обеих частей уравнения (9), получим первое уравнение в (6), из которого следует, что и k_3 зависит только от t. Умножим последовательно уравнение (5) на J^2 и на J слева и справа. Сложив полученные выражения, получим уравнение для J^3

$$DJ^3 + 3J^4 + 3kJ^2 = 0, \tag{10}$$

где J^4 можно выразить через J и J^2 из уравнения (4) и его следствия для J^4. Вычислив след уравнения (10), с учетом формул (3) и соотношения $\mathrm{tr}J^4 = 2k_2^2$ получим второе уравнение в (6).

Уравнение (7) можно получить из системы (6), исключая функцию k_3: дифференцируя первое уравнение в (6) и подставляя значения k_3' из второго. Полученное уравнение $k_2'' = -2k_2^2$ после умножения на k_2' интегрируется один раз и дает уравнение для эллиптической функции Вейерштрасса (7).

Замечание 1. Растяжением переменных $t = a\tau, k_2 = bq$, где константы a и b определяются из уравнений

$$a^6 = 9\varepsilon C^{-1}, \qquad b = -3a^{-2}, \qquad \varepsilon = \pm 1, \tag{11}$$

с использованием соотношений однородности для эллиптических функций [13] уравнение (7) приводится к виду

$$\left(\frac{dq}{d\tau}\right)^2 = 4q^3 - 1. \tag{12}$$

Решением уравнения (12) является эквиангармоническая функция Вейерштрасса [13] $q = \wp(\tau; 0, 1)$.

Замечание 2. Система (6) имеет интеграл, связывающий инварианты k_2 и k_3:

$$k_3^2 + 4k_2^3/27 = C/9. \tag{13}$$

Константа C в интеграле (13) (та же, что и в уравнении (7)) пропорциональна дискриминанту характеристического уравнения матрицы J $\lambda^3 + k_2\lambda - k_3 = 0$. Растяжением переменных (11) интеграл (13) приводится к виду

$$4q^3/27 + s^2 = \varepsilon/9, \tag{14}$$

где $s = ab^{-1}k_3$. Соотношение (14) эквивалентно (12).

Лемма 2. *Пусть $\lambda_i = \lambda_i(t)$ — собственные значения матрицы Якоби J. Тогда справедливы следующие утверждения:*

а) *Система (6) эквивалентна системе для собственных значений*

$$\lambda_i' + \lambda_i^2 - \frac{1}{3}\sum_j \lambda_j^2 = 0, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{15}$$

б) *Пусть $q_i = q_i(t)$ — логарифмический потенциал собственного значения $\lambda_i = (\ln q_i)' = q_i'/q_i$. Тогда q_i удовлетворяет уравнению Ламе*

$$q_i'' + k(t)q_i = 0, \tag{16}$$

где $k = 2k_2/3$ — эллиптическая функция Вейерштрасса.

Доказательство. а) Запишем систему (6) в терминах λ_i, используя соотношения (3). Тогда, разрешая ее относительно λ_i', получим (15).

Обратно, из (15) следует (6). Умножив каждое из уравнений (15) на λ_i и сложив полученные соотношения, получим

$$\sum_i \lambda_i\lambda_i' + \sum_i \lambda_i^3 - \frac{1}{3}\sum_i \lambda_i\Big(\sum_j \lambda_j^2\Big) = \frac{1}{2}\Big(\sum \lambda_i^2\Big)' + \sum_i \lambda_i^3 = 0.$$

Это первое уравнение в (6). Второе получается после умножения каждого уравнения (15) на λ_i^2 и суммирования полученных выражений. Действительно, используя соотношение $\sum_i \lambda_i^4 = \dfrac{1}{2}\Big(\sum \lambda_i^2\Big)^2$, получим

$$\sum_i \lambda_i^2\lambda_i' + \sum_i \lambda_i^4 - \frac{1}{3}\Big(\sum_j \lambda_j^2\Big)\Big(\sum_i \lambda_i\Big) = \frac{1}{3}\Big(\sum \lambda_i^3\Big)' + \frac{1}{6}\Big(\sum_i \lambda_i^2\Big)^2 = 0.$$

б) Подставляя в (15) представления $\lambda_i = q_i'/q_i$ и $k = -\dfrac{1}{3}\sum_j \lambda_j^2$, получим (16).

Лемма доказана.

Замечание 3. В силу соотношения $\sum \lambda_i = 0$ логарифмические потенциалы функционально зависимы: $q_1q_2q_3 = \mathrm{const}$. Кроме того, они линейно зависимы как три решения уравнения второго порядка (16).

2. Представление решения в эйлеровых координатах. Результаты, полученные в п. **1**, позволяют полностью описать решение.

Лемма 3. *Пусть q — логарифмический потенциал одного из собственных значений матрицы J (см. утверждение "б" леммы 2). Тогда вектор*

$$\boldsymbol{\beta} = q'\boldsymbol{x} - q\boldsymbol{u} \tag{17}$$

сохраняется вдоль траекторий жидких частиц, т. е. зависит только от лагранжевых координат.

Доказательство. Заметим, что в силу уравнения импульсов в (1) для давления в виде (2) $D\boldsymbol{u} = -k\boldsymbol{x}$. Тогда

$$D\boldsymbol{\beta} = q''\boldsymbol{x} - q'\boldsymbol{u} + q'\boldsymbol{u} - qD\boldsymbol{u} = (q'' + kq)\boldsymbol{x} = 0$$

в силу (16).

Замечание 4. Из формул (17) следует, что рассматриваемое движение не сводится к движению с линейным полем скоростей. Действительно, подставляя в (17) представление $\boldsymbol{u} = d\boldsymbol{x}/dt$ в лагранжевых координатах и интегрируя полученное соотношение, получим

$$\boldsymbol{x} = q[Q\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{x}_0) + \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{x}_0)], \tag{18}$$

где $Q(t) = -\displaystyle\int q^{-2}(t)\,dt$; $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ — вектор-функции лагранжевых координат, определяемые из начальных условий. Поскольку лагранжевы координаты определены с точностью до функциональной замены, один из этих векторов в новых координатах можно привести к виду $\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{x}_0'$. Однако второй вектор в (18) остается произвольной функцией новых лагранжевых координат $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{x}_0')$, откуда следует, что данное решение не сводится к решению с линейным полем скоростей.

Лемма 4. *Начальное поле скоростей $\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{u}(0, \boldsymbol{x}_0)$ рассматриваемого движения имеет специальный вид: алгебраические инварианты матрицы Якоби $J_0 = \partial\boldsymbol{u}_0/\partial\boldsymbol{x}_0$ являются вещественными числами.*

Векторные поля такого вида описаны в теории барохронных движений газа [14].

Сформулируем основной результат.

Теорема 1. *Поле скоростей для рассматриваемого решения* (2) *уравнений Эйлера* (1) *определяется как неявная вектор-функция из системы уравнений*

$$F_i(\boldsymbol{\beta}_i) = 0, \qquad i = 1, 2, 3, \tag{19}$$

где $\boldsymbol{\beta}_i = q_i'\boldsymbol{x} - q_i\boldsymbol{u}; \lambda_i = q_i'/q_i$*; функции* q_i *удовлетворяют уравнениям* (16).

Произвольные функции F_i *в* (19) *подчинены условию линейной независимости векторов* $\nabla_{\boldsymbol{\beta}_i}F_i$*. Произвол в полученном решении — три функции двух переменных.*

Доказательство. Покажем, что вектор-функция $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x})$, являющаяся решением (19), удовлетворяет уравнениям импульсов в (1) для давления в виде (2) и, кроме того, матрица $J = \partial\boldsymbol{u}/\partial\boldsymbol{x}$ имеет алгебраические инварианты, описываемые леммой 1.

Применим к уравнениям (19) операцию D. Тогда, поскольку $D\boldsymbol{\beta}_i = q_i''\boldsymbol{x} + q_i'\boldsymbol{u} - q_i'\boldsymbol{u} - q_iD\boldsymbol{u} = q_i''\boldsymbol{x} - q_iD\boldsymbol{u}$, в силу линейной независимости векторов $\nabla_{\boldsymbol{\beta}_i}F_i$ из уравнений $D\boldsymbol{\beta}_i\nabla_{\boldsymbol{\beta}_i}F_i = 0$ следует, что $D\boldsymbol{\beta}_i = 0$. Отсюда следует зависимость вида (2) для давления и как следствие все результаты п. **1**.

Пусть $T = (\nabla_{\boldsymbol{\beta}_i}F_i)$ — матрица, строки которой являются компонентами соответствующих градиентов функции F_i. Дифференцируя уравнения (19) по всем пространственным переменным, получим матричное соотношение

$$T\,\frac{\partial\boldsymbol{\beta}_i}{\partial\boldsymbol{x}} = 0,$$

откуда в силу $\partial\boldsymbol{\beta}_i/\partial\boldsymbol{x} = q_i'E - q_iJ$ следует

$$TJ = \Lambda T, \tag{20}$$

где $\Lambda = \mathrm{diag}\,(\lambda_i)$ — жорданова форма матрицы J. В силу (20) матрицы J и Λ подобны, а следовательно, их алгебраические инварианты совпадают. При этом T является преобразующей матрицей, а векторы строки $\nabla_{\boldsymbol{\beta}_i}F_i$ — левыми собственными векторами матрицы J, соответствующими собственным значениям λ_i.

Замечание 5. Если матрица J имеет пару комплексно-сопряженных собственных значений, то выражения (19) связывают комплекснозначные функции. В теории барохронных движений газа показано, каким образом можно получить вещественную форму решения в этом случае [14].

Замечание 6. Поскольку для матрицы J выполнено соотношение $\sum\lambda_i = 0$, случай собственного значения кратности 3 невозможен. В случае собственного значения кратности 2 имеется простое представление для λ_i. Пусть $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda, \lambda_3 = -2\lambda$. Тогда (15) сводится к одному уравнению, решением которого является $\lambda = \lambda_0/(1 + \lambda_0(t_0 - t))$, где константа $\lambda_0 = \lambda(t_0)$ — начальное значение λ. В этом случае $\mathrm{rank}\,(J - \lambda E) = 1$, следовательно, кратному собственному значению соответствуют два линейно независимых левых собственных вектора, через которые выражается решение (19).

Таким образом, алгоритм построения решения уравнений Эйлера (1) с давлением в виде (2) включает следующие шаги.

1. Задается алгебраическая структура матрицы Якоби J_0 начального поля скоростей: вещественные числа k_{20} и k_{30} (или λ_{i0} такие, что $\sum\lambda_{i0} = 0$).

2. Строится начальное поле скоростей $\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x}_0)$ как неявная функция, являющаяся решением системы уравнений $F_i(\boldsymbol{u}_0 - \lambda_{i0}\boldsymbol{x}_0) = 0$, где функции F_i удовлетворяют условиям теоремы 1.

3. Интегрируются уравнения (16) (или система (6)) с заданными начальными данными (см. шаг 1).

4. Поле скоростей $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x})$ определяется как решение уравнений (19).

Следовательно, для отыскания решений вида (2) нужно иметь достаточно богатый запас начальных векторных полей (см. шаг 2) и уметь интегрировать уравнения (16) или (6). Уравнение Ламе вида (16) используется для описания искомого движения.

Замечание 7. Данное решение уравнений Эйлера имеет теоретико-групповое происхождение и может быть получено с помощью двухшагового алгоритма. На первом шаге строится решение уравнений Эйлера типа "особый вихрь" [2]. Это частично инвариантное решение относительно группы вращений ранга 2 и дефекта 1. На втором шаге строится инвариантное решение полученной факторсистемы для допускаемого оператора растяжения $r\partial_r + U\partial_U + 2p\partial_p$ (U — радиальная компонента скорости). Инвариантное представление для давления имеет вид (2). Применение формул, описывающих "особый вихрь" [2], для анализа данного решения возможно, но затруднительно из-за сложного выражения для угловой компоненты ω, касательной к сферам составляющей скорости.

3. Описание решения в лагранжевых координатах. Уравнения (1) для искомой функции $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0)$ с давлением в виде (2) в лагранжевых координатах принимают вид

$$\frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2} + k(t)\boldsymbol{x} = 0 \qquad (21)$$

и описывает траектории жидких частиц с начальными данными $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$ (лагранжевы координаты).

Теорема 2. *Движение жидкости, описываемое рассматриваемым решением, обладает следующими свойствами:*

а) *Движение жидких частиц описывается уравнением Ламе* (21).

б) *Движение каждой жидкой частицы происходит в плоскости* П, *положение которой в пространстве* $\mathbb{R}^3(\boldsymbol{x})$ *определяется начальными данными для этой частицы*

$$\Pi\colon \boldsymbol{x} \times \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{B}_0, \quad \boldsymbol{B}_0 = \boldsymbol{x}_0 \times \boldsymbol{u}_0, \qquad (22)$$

где "$\times$" *— знак векторного произведения;* $\boldsymbol{u}_0$ *— начальная скорость жидкой частицы, при* $t = 0$ *занимающей положение* $\boldsymbol{x}_0$.

Доказательство. Пункт "а" доказан выше. Непосредственно проверяется, что $\boldsymbol{B}_0$ задает интеграл системы

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{B}_0 = \frac{d}{dt}\Big(\boldsymbol{x} \times \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\Big) = \boldsymbol{x} \times \frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2} = -k\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{x} = 0$$

в силу уравнений (21).

Имеется аналог между движением жидкой частицы и движением материальной точки под действием центральной силы $\boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{x}$ [15].

Лемма 5. *Уравнения движения жидкой частицы в плоскости* П: $z = 0$, $xy' - yx' = l_0$, *где* l_0 *— функция лагранжевых координат, после перехода к полярным координатам* $x = R\cos\theta$, $y = R\sin\theta$ *в этой плоскости принимают вид*

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{l_0}{R^2}, \qquad \frac{d^2R}{dt^2} + k(t)R = \frac{l_0^2}{R^3}. \qquad (23)$$

Второе уравнение в (23) *есть уравнение Ермакова.*

Доказательство. Плоскость движения жидкой частицы поворотом в пространстве $\mathbb{R}^3(\boldsymbol{x})$, зависящим от вектора $\boldsymbol{B}_0$ и индивидуальным для каждой частицы, может быть приведена к плоскости П: $z = 0$. Тогда интеграл (22) принимает вид, указанный в лемме, причем l_0 зависит только от начальных данных (лагранжевых координат). Переход к полярным координатам осуществляется стандартным образом. Связь между уравнением гармонического осциллятора (21) и уравнением Ермакова (23) в последнее время обсуждается во многих работах (см., например, [16]). Второе уравнение в (23) описывает эволюцию радиус-вектора жидкой частицы и в сферической системе координат. Это означает, что переход к ней не облегчает анализа рассматриваемых движений.

Лемма 6. *Собственные векторы матрицы J (как левые $\boldsymbol{l}_i$, так и правые $\boldsymbol{r}_i$) могут быть выбраны постоянными вдоль траекторий жидких частиц, т. е. зависящими от лагранжевых координат.*

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{l}$ — левый собственный вектор матрицы J, соответствующий собственному значению λ: $\boldsymbol{l}J = \lambda\boldsymbol{l}$. Применим оператор D к этому равенству:

$$D\boldsymbol{l}J + \boldsymbol{l}DJ = \lambda'\boldsymbol{l} + \lambda D\boldsymbol{l}.$$

Подставим DJ из (5) и $\lambda' = -\lambda^2 - k$ из (15). Тогда с учетом $\boldsymbol{l}J^2 = \lambda^2\boldsymbol{l}$ получим $D\boldsymbol{l}J = \lambda D\boldsymbol{l}$. Поскольку инвариантное пространство, соответствующее вектору $\boldsymbol{l}$, одномерно, $D\boldsymbol{l} = b\boldsymbol{l}$, где $b = b(t, \boldsymbol{x}) \neq 0$. Это уравнение можно проинтегрировать в виде $\boldsymbol{l} = K(t, \boldsymbol{x})\boldsymbol{l}_0$, где $D\boldsymbol{l}_0 = 0$. Поскольку собственный вектор определен с точностью до множителя, $\boldsymbol{l}$ можно выбрать зависящим только от лагранжевых координат. Доказательство для правого собственного вектора $\boldsymbol{r}$ проводится аналогично.

Лемма 7. *Вихрь $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot}\boldsymbol{u}$ в рассматриваемом движении представляется формулой*

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_i q_i \boldsymbol{r}_i, \tag{24}$$

где q_i — логарифмический потенциал собственного значения λ_i, $\varepsilon_i = 0; 1$.

Доказательство. Уравнение для вихря $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(t, \boldsymbol{x})$ может быть записано в виде

$$D\boldsymbol{\omega} - J\boldsymbol{\omega} = 0.$$

Из представления (23) $D\boldsymbol{\omega} = \sum\limits_i \varepsilon_i q_i' \boldsymbol{r}_i$, $\boldsymbol{\omega} = \sum \varepsilon_i q_i J\boldsymbol{r}_i = \sum \varepsilon_i q_i \lambda_i \boldsymbol{r}_i$. Множители ε_i появляются в формуле для вихря, поскольку по определению $\boldsymbol{r}_i \neq 0$ и $q_i \neq 0$. Лемма доказана.

4. Общее решение уравнения Ламе. После замены переменных (11) уравнение (16) (или каждое уравнение в (21)) принимает вид

$$\frac{d^2 q}{d\tau^2} - 2\wp(\tau)q = 0, \tag{25}$$

где $\wp(\tau) = \wp(\tau; 0, 1)$ — решение уравнения (12). Необходимые сведения о свойствах решений уравнения Ламе имеются в [17, 18], об эллиптических функциях — в [13].

Общий интеграл уравнения (25) есть мероморфная функция. Согласно теореме Пикара это уравнение интегрируется при помощи двоякопериодических функций второго рода с теми же периодами 2ω и $2\omega'$, что и у эллиптических функций, являющихся коэффициентами уравнения. Таким образом, для общего интеграла уравнения (25) $q = Q(\tau)$ справедливы формулы

$$Q(\tau + 2\omega) = \mu Q(\tau), \qquad Q(\tau + 2\omega') = \mu' Q(\tau),$$

где константы μ, μ' — так называемые множители функции Q.

Пусть z_0 — корень уравнения $\wp(z_0) = 0$. Тогда уравнение (25) имеет фундаментальную систему решений

$$q_j(\tau) = \mathrm{e}^{\mp\tau\zeta(z_0)}\sigma(\tau \pm z_0)/\sigma(\tau), \qquad j = 1, 2. \tag{26}$$

Эллиптическая функция Вейерштрасса $\wp = \wp(\tau; 0, 1)$ определена на плоскости комплексной переменной и является однозначной двоякопериодической аналитической функцией, имеющей двойной полюс в точке $\tau = 0$. В рассматриваемом эквиангармоническом случае параллелограмм периодов на плоскости комплексной переменной задается вершинами $0, 2\omega, 2\omega_2, 2\omega'$ (обход против часовой стрелки), где $\omega_2 = \omega + \omega' \in \mathbb{R}$; 2ω, $2\omega'$ — периоды; $\omega' = \omega^*$. При этом $\omega_2 \approx 1{,}5299$ — вещественное число, $2\omega = \omega_2 + i\omega_2\sqrt{3}$, $z_0 = \omega_2 + i\omega_2/\sqrt{3}$, $\zeta(z_0) = ((\pi/3)\omega_2)\exp(-i\pi/6)$. На вещественной оси $\tau \in \mathbb{R}$ эллиптическая функция $\wp = \wp(\tau; 0, 1)$ также принимает вещественные значения.

Пусть $\boldsymbol{x}_0$ и $\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x}_0)$ — начальные данные для жидкой частицы при $\tau = \tau_0, W = q_1 q_2' - q_2 q_1'$ — вронскиан фундаментальной системы решений (26), причем $W(\tau) = W(\tau_0) = W_0$ является константой, отличной от нуля. Тогда общее решение системы (21) может быть представлено в виде

$$\boldsymbol{x} = W_0^{-1}[(q_{20}' q_1 - q_{10}' q_2)\boldsymbol{x}_0 + (q_{10} q_2 - q_{20} q_1)\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x}_0)], \qquad (27)$$

где индексом 0 отмечены значения соответствующих функций при $\tau = \tau_0$.

Исследование свойств решения в виде (27) является самостоятельной задачей. Априори можно сделать вывод о наличии в общем решении особенностей типа полюсов эллиптической функции $\wp(\tau; 0, 1)$. Изобарами в решении являются сферы, радиус которых зависит от времени. Формулы решения (27) не наследуют, вообще говоря, сферическую симметрию, присущую распределению давления. Сильное влияние на эволюцию решения оказывает начальное распределение поля скоростей. Важную информацию об эволюции решения дает формула (24) для вихря скорости. Она определяет направление, вдоль которого происходит неограниченный рост вихря.

Заключение. 1. Дано полное аналитическое описание широкого класса точных решений уравнений Эйлера, определяющих движения идеальной несжимаемой жидкости, для которых давление пропорционально квадрату расстояния.

2. Показано, что в эйлеровых координатах движение описывается конечными формулами, которые определяют поле скоростей как неявную вектор-функцию. Динамика движения задается эллиптическими функциями времени. Свойства движения во многом определяются матрицей Якоби поля скоростей, которая имеет специальный вид: ее алгебраические инварианты зависят только от времени. Матрица Якоби начального поля скоростей имеет постоянные алгебраические инварианты. Собственные векторы матрицы Якоби постоянны вдоль траекторий.

3. При интегрировании уравнений Эйлера реализован своего рода вариант метода разделения переменных. Зависимость искомых величин (поля скоростей, давления, вихря) от времени определяется эллиптическими функциями, лагранжевы координаты задают начальное распределение и скорость жидких частиц, причем начальное поле скоростей является специальным.

4. Уравнения траекторий жидких частиц в лагранжевых координатах сводятся к уравнениям Ламе, интегрируемым в двоякопериодических функциях второго рода. Вектор вихря имеет представление в виде линейной комбинации собственных векторов матрицы Якоби. Особенностью движения является то, что оно, вообще говоря, не наследует симметрию, присущую сферически-симметричному распределению давления.

5. Найденные решения характеризуются тем, что для них факторуравнения уравнений Эйлера являются линейными уравнениями второго порядка. Для них реализуется метод разделения переменных, дающий формулу общего решения.

6. Решения имеют особые точки t_*, соответствующие полюсам эллиптических функций. Так, давление и компоненты вихря вблизи соответствующих моментов времени стремятся к бесконечности. Физическая трактовка движения жидкости возможна, видимо, лишь для моментов времени $t > t_*$ либо $t < t_*$.

7. При наличии у матрицы Якоби $J = \partial\boldsymbol{u}/\partial\boldsymbol{x}$ кратного собственного значения интегрирование уравнений траекторий по времени происходит в элементарных функциях.

В следующей работе будут построены примеры, иллюстрирующие поведение траектории жидких частиц для различных начальных данных и эволюцию элементарного сферического жидкого объема.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Андреев В. К., Капцов О. В., Пухначев В. В., Родионов А. А.** Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике. Новосибирск: Наука. Сиб. издат. фирма, 1994.
2. **Овсянников Л. В.** Особый вихрь // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 3. С. 45–52.
3. **Cantwell B. J.** Exact solution of a restricted Euler equation for the velocity gradient tensor // Phys. Fluids. Ser. A. 1992. V. 4, N 4. P. 782–793.
4. **Vieillefosse P.** Local interaction vorticity and shear in a perfect incompressible fluid // J. Physique. 1982. V. 43, N 6. P. 837–842.
5. **Vieillefosse P.** Internal motion of a small element of fluid in an inviscid flow // Physica A. 1984. V. 125. P. 150–162.
6. **Popovich H.** On reduction of the Euler equations by means of two-dimensional subalgebras // J. Nonlinear Math. Phys. 1996. V. 3, N 3/4. P. 441–446.
7. **Абрашкин А. А., Зенькович Д. А., Якубович Е. И.** Исследование трехмерных вихревых течений с помощью матричных уравнений гидродинамики // Докл. РАН. 1997. Т. 357, № 5. С. 619–622.
8. **Риман Б.** Сочинения. М.: Гостехтеоретиздат, 1948.
9. **Овсянников Л. В.** Общие уравнения и примеры // Задача о неустановившемся движении жидкости со свободной границей. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1967. С. 5–75.
10. **Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П.** Теория солитонов: Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.
11. **Meiermanov A. M., Pukhnachev V. V., Shmarev S. I.** Evolution equations and Lagrangian coordinates. Berlin; N. Y.: W. de Gruyter, 1997.
12. **Pukhnachev V. V.** An integrable model of nonstationary rotationally symmetrical motion of ideal incompressible liquid // Nonlinear Dynamics. 2000. V. 22. P. 101–109.
13. **Справочник** по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979.
14. **Чупахин А. П.** Барохронные движения газа: общие свойства и подмодели типов (1,2) и (1,1). Новосибирск, 1998. (Препр. / СО РАН. Ин-т гидродинамики; № 1-99).
15. **Уиттекер Э.** Аналитическая динамика. Ижевск: Издат. дом "Удмуртский университет", 1999.
16. **Leach P. G. L.** $sl(2, R)$, Ermakov systems and the magnetic monopole // Modern group analysis: Adv. anal. and comput. methods in math. phys. Dordrecht; Boston; L.: Kluwer, 1993. P. 255–264.
17. **Ахиезер Н. И.** Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970.
18. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. М.: Наука, 1967.

Поступила в редакцию 25/V 2001 г.