ПМТФ, № 6, 1972

УДК 533.95

К ТЕОРИИ УСКОРЕНИЯ ПЛАЗМЫ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

О. В. Манухина

(Москва)

Рассматривается задача об ускорении плазмы в скрещенных электрическом и магнитном полях в наиболее простых физических условиях, удобных для сравнения с экспериментом. Получены аналитические выражения для скорости электронов, величины резонансной зоны ускорения и приращения потенциала ускоряемой плазмы.

Пусть холодная плазма находится в неоднородном магнитном поле

$$\mathbf{B}\,\{{}^1/_2\delta B_0 x,\ {}^1/_2 B_0\delta y,\ B_0(1-\delta z)\},\qquad \delta=|dB_0/dz|\,B_0^{-1}$$

где B_0 — напряженность магнитного поля в начале резонатора при $z=z_0$, δ — коэффициент неоднородности магнитного поля, x, y, z — координаты, связанные с лабораторной системой координат.

В резонаторе возбуждается высокочастотное поле

$$E_x = E_0(y, z)\cos(\omega t+\varphi),\qquad E_y=E_z=0$$

где E_0 — амплитуда, ω — частота, φ — начальная фаза электрического поля в момент $t=0$ влета ускоряемой частицы в резонатор.

При частоте ω, близкой к ларморовой частоте ω_c обращения электрона в магнитном поле ($\omega_c = eB_z/mc$, где e и m — заряд и масса электрона соответственно, B_z — компонента напряженности магнитного поля вдоль оси z, а c — скорость света) в резонаторе возникает резонансное ускорение электрона, описываемое уравнениями

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{e}{m}E_0\cos(\omega t+\varphi)-\frac{e}{mc}v_yB_z,\qquad \frac{dv_y}{dt}=\frac{e}{mc}v_xB_y \tag{1}$$

где v_x и v_y — компоненты скорости электрона вдоль координат x и y, B_y — компонента напряженности магнитного поля вдоль оси y. Переход к комплексной переменной $r = x + iy$, где i — мнимая единица, приводит к преобразованию выражения (1) к виду

$$dv_r/dt - i\omega_c v_r = -\gamma\cos(\omega t+\varphi) \tag{2}$$

где $v_r = v_x + iv_y,\qquad \gamma = eE_0/m$.

Его решение

$$v_r = \frac{\gamma_i}{2}\left[\frac{\exp i(\omega t+\varphi)-\exp i(\omega_c t+\varphi)}{\omega_c-\omega}+\frac{\exp[-i(\omega t+\varphi)]-\exp i(\omega_c t-\varphi)}{\omega_c+\omega}\right] \tag{3}$$

дает возможность определить скорость и энергию ускоренного электрона. Ионы благодаря своей инерции не испытывают резонансного ускорения в высокочастотном электрическом поле.

Под действием градиента магнитного поля ускоренные электроны начинают втягиваться в область более слабого магнитного поля вдоль оси z.

При движении электроны увлекают за собой ионы, с которыми они связаны электрическими силами притяжения. Этот эффект становится особенно большим в узкой области d вблизи резонанса $z = z_p$, при приближении ларморовой частоты ω_c к частоте электрического поля ω, что приводит к резонансному ускорению плазмы.

Движение плазмы вдоль оси z рассматривается на основе обычных уравнений для ее компонент — электронов и ионов

$$\frac{dv_{ze}}{dt} = \frac{\partial v_{ze}}{dt} + (v_e \nabla) v_{ze} = -\frac{e}{m} E_\rho + \frac{e}{mc}(v_{xe}B_y - v_{ye}B_x) \tag{4}$$

$$\frac{dv_{zi}}{dt} = \frac{\partial v_{zi}}{\partial t} + (v_i \nabla) v_{zi} = \frac{e}{M} E_\rho \tag{5}$$

где E_ρ — напряженность поля пространственного заряда, возникающая при удалении ускоренных электронов вдоль оси z, v_{ze} и v_{zi} — скорость электронов и ионов в том же направлении, M — масса иона.

Учитывая зависимость B_x и B_y от координат, можно преобразовать выражение

$$\frac{e}{mc}(v_{xe}B_y - v_{ye}B_x) = \frac{\delta\omega_0}{2}\langle \dot{x}y - \dot{y}x\rangle = \frac{\delta\omega_0}{2}\langle \mathrm{Re}(-i\dot{r}r^*)\rangle$$

вводя комплексные величины r, $dr / dt = \dot{r}$ и r^*, сопряженное к r

$$\frac{dv_{ze}}{dt} = -\frac{e}{m} E_\rho + \frac{\delta\omega_0}{2}\langle \mathrm{Re}\, r\, \mathrm{Im}\, v_r - \mathrm{Im}\, r\, \mathrm{Re}\, v_r\rangle \tag{6}$$

где $\omega_0 = eB_0 / mc$, а r и v_r определяются из выражения (3).

Подставляя выражение для E_ρ из (5) и полагая в случае квазинейтральной плазмы

$$n_i = n_e = n_0, \qquad n_i v_{zi} = n_e v_{ze}, \qquad v_{zi} = v_{ze} = v_z$$

где n_e и n_i — концентрация электронов и ионов в плазме соответственно, имеем

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{m}{m+M}\,\frac{\delta\gamma^2}{2}\,\frac{3\omega_c^2 + \omega^2 + (\omega_c^2 - \omega^2)\langle\cos 2\varphi\rangle}{4(1-\delta z)(\omega_c^2 - \omega^2)^2} \tag{7}$$

где $\langle\cos 2\varphi\rangle$ — средняя статистическая величина, связанная с фазой φ в момент влета электронов в резонатор. Если положить ее равной, например, единице (все фазы равновероятны), то

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{m}{M}\,\frac{\delta\gamma^2}{2}\,\frac{\omega_0\omega_c}{(\omega_c^2 - \omega^2)^2} \tag{8}$$

Для стационарного случая $\partial v_z / \partial t = 0$ получим

$$v_z^2 = \frac{m}{M}\,\frac{\delta\gamma^2}{4}\,\omega_0^2 \int_0^z \frac{(1-\delta z)\,dz}{[\omega_0^2(1-\delta z)^2 - \omega^2]^2} \tag{9}$$

откуда определяется прирост энергии плазмы на пути от $z = 0$ до любого $z \lesssim z_p$, где z_p — координата точного равенства ω и ω_c.

Поле пространственного заряда E_ρ для любого $z \lesssim z_p$ определяется из выражений (5) и (8) с учетом равенства $v_{zi} = v_z$

$$E_\rho = \frac{M}{e}\,\frac{dv_z}{dt} = \frac{m}{e}\,\frac{\delta\gamma^2}{2}\,\frac{\omega_0^2(1-\delta z)}{[\omega_0^2(1-\delta z)^2 - \omega^2]^2} \tag{10}$$

Величина поля пространственного заряда связана с распределением пространственного заряда согласно уравнению Пуассона, причем в процессе ускорения плазмы изменение поля E_ρ вдоль осей x и y много меньше его изменения вдоль оси z

$$\frac{dE_\rho}{dz} = \frac{m}{e}\frac{\delta^2\gamma^2\omega_0^2}{2}\frac{3\omega_0^2(1-\delta z)^2+\omega^2}{[\omega_0^2(1-\delta z)^2-\omega^2]^3} = 4\pi e(n_i - n_e) \qquad (11)$$

В области $z \lesssim z_p$ можно считать, что квазинейтральность плазмы существенно не нарушается. Однако при $z \to z_p$, $\omega_c \to \omega$ и, как видно из выражений (7) — (11), как скорость плазмы v_r, так и поле пространственного заряда E_ρ устремляются в бесконечность вместе со всеми производными. Разность концентраций ионов и электронов (11) также получается бесконечной. Между тем в реальной плазме эта разность не может превышать абсолютного значения концентрации заряда n_0. При такой разности концентраций нельзя считать плазму квазинейтральной, а это приводит к неприменимости в этой области выражений (7) — (11), в которых поле пространственного заряда E_ρ фактически заменено тензорной массой ($m + M$), как в работах Каннобио [1-3]. Для резонансной зоны, в которой квазинейтральность плазмы нарушена, это недопустимо.

Итак, в резонансной зоне d можно пользоваться только следующей системой уравнений:

$$\frac{dv_{ze}}{dt} = -\frac{e}{m}E_\rho + \frac{e}{mc}(v_xB_y - v_yB_x) \qquad (12)$$

$$\frac{dv_{zi}}{dt} = \frac{e}{M}E_\rho, \qquad \frac{dE_\rho}{dz} = 4\pi e(n_i - n_e)$$

В системе (12) неизвестна форма кривой распределения пространственного заряда $(n_i - n_e)$ в резонансной области. Получить ее экспериментально очень трудно, что связано с малой величиной d и с большими скоростями электронов.

Однако ее можно аппроксимировать в достаточно общем виде, например, так:

$$(n_i - n_e)/n_0 = A\xi\exp(1-\alpha\xi^2)$$

где $\xi = (z_p - z)/(z_p - z_н)$ и меняется от 0 до 1 для $z_н \leqslant z \leqslant z_p$, причем z_H — начало резонансной зоны, т. е. зоны существенного нарушения квазинейтральности плазмы, в которой разница концентраций электронов и ионов сравнима по величине с самой концентрацией, а A и α — коэффициенты. Результаты же решения системы (12) в предположении указанной аппроксимации можно сравнить с экспериментом.

Для максимальной разности концентраций $(n_i - n_e)_{\max} = n_0$, что соответствует по расчету положению

$$\xi_{\max} = 1/\sqrt{2\alpha} \quad \text{или} \quad z_{\max} = [z_p - (z_p - z_н)]/\sqrt{2\alpha}$$

получается

$$A\xi\exp(1-\alpha\xi^2)_{\max} = 1$$

откуда

$$A = \sqrt{2\alpha}\exp(-{}^1/_2)$$

При решении в этих предположениях системы уравнений для ионов

$$\frac{dv_{zi}}{dt} = \frac{e}{M}E_\rho, \qquad \frac{\partial v_{zi}}{\partial t} = 0 \qquad (13)$$

$$dE_\rho/dz = 4\pi e n_0 A\xi\exp(1-\alpha\xi^2)$$

для E_ρ получается интеграл типа

$$E_\rho = K\int \exp(-q)\,dq + C,$$

где $C = 0$, так как при больших величинах ξ поле пространственного заряда стремится к нулю. Итак

$$E_\rho = 4\pi e n_0 d \exp(^1/_2 - \alpha\xi^2)/\sqrt{2\alpha} \quad (14)$$

где $d = z_p - z_н$ — величина резонансной зоны.

Коэффициент α и величину резонансной зоны d можно получить из условий на границе области d при $z = z_н$, так как величина E_ρ и ее производная dE_ρ / dt, определенные по формулам (10), (11) и (14) на границе зоны, должны совпадать. Следовательно, при $z = z_н$, $\xi = 1$

$$E_\rho = \frac{m\delta\gamma^2\omega_0^2(1-\delta z_н)}{2[\omega_0^2(1-\delta z_н)^2-\omega^2]^2} = 4\pi e n_0 d \exp(^1/_2 - \alpha)/\sqrt{2\alpha} \quad (15)$$

$$\frac{dE_\rho}{dz} = \frac{m\delta^2\gamma^2\omega_0^2}{2e}\,\frac{[3\omega_0^2(1-\delta z_н)^2+\omega^2]}{[\omega_0^2(1-\delta z_н)^2-\omega^2]^3} = 4\pi e n_0\sqrt{2\alpha}\exp(^1/_2 - \alpha) \quad (16)$$

Отсюда с учетом того, что

$$(1-\delta z_н) = \omega/\omega_0 + \delta d, \qquad \delta d < \omega/\omega_0$$

получается величина резонансной зоны, и $\Delta\Psi$ — приращение энергии плазмы в пределах резонансной зоны

$$d^3 = \frac{m}{e}\,\frac{\gamma^2}{16\pi e n_0\omega\omega_0\delta} \quad (17)$$

$$\Delta\Psi = -\int_{z_p-d}^{z_p} E_\rho dz = \int_0^1 4\pi e n_0 d^2 \exp\left(\frac{1}{2} - \alpha\xi^2\right)\frac{d\xi}{\sqrt{2\alpha}}$$

При сопоставлении с экспериментом интересна зависимость ширины резонансной зоны от частоты, градиента неоднородности магнитного поля δ и амплитуды высокочастотного поля, связанной с величиной γ. Эксперимент может дать возможность судить о правильности выбранной модели ускорения плазмы в резонансной зоне и о роли этой зоны в общем приращении энергии плазмы.

Поступила 26 IV 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Canobbio E. Solution analytique approchée du mouvement d'une charge dans un accélérateur haute fréquence. C. r. Acad. Sci., Ser. B., 1966, vol. 262, No. 15.
2. Canobbio E., Collet R. Variation du moment magnétique d'une charge dans un champ mixte (magnétique statique + haute fréquence). C. r. Acad. Sci., Ser. B., 1967, vol. 264, No. 6.
3. Canobbio E. Effect de la vitesse d'injection sur la valeur du moment magnétique d'une charge dans un accélérateur H. F. a plasma. Phys. Letters, Ser. A, 1967, vol. 24, No. 11.