УДК 517.944+533.6

МЕТОД $\boldsymbol{A}$-ОПЕРАТОРОВ И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Ю. А. Чиркунов

Новосибирский государственный университет экономики и управления,
630070 Новосибирск
E-mail: chr01@rambler.ru

Предлагается алгоритм, позволяющий получить все законы сохранения для системы дифференциальных уравнений из одного ее закона сохранения нулевого порядка, общий ранг матрицы Якоби которого равен числу независимых переменных системы. Эффективность алгоритма показана на примерах уравнений газовой динамики, для которых найдены новые законы сохранения. Установлены дополнительные свойства симметрии рассматриваемых уравнений, с которыми связаны эти законы сохранения.

Ключевые слова: оператор, закон сохранения, классификация уравнений безвихревого движения газа, газовая динамика, симметрия, эквивалентность.

ВВЕДЕНИЕ

Законы сохранения для различных систем дифференциальных уравнений исследуются в большом количестве работ. Авторы данных работ находят эти законы либо прямыми вычислениями на основе определения закона сохранения, либо с помощью обобщенных симметрий системы, либо с помощью теоремы Нетер. Как правило, объектами исследований являются системы дифференциальных уравнений, соответствующие различным усложненным дополнительными эффектами моделям механики и физики. При изучении законов сохранения для уравнений газовой динамики получены следующие результаты. В работе [1] прямыми вычислениями найдена полная система законов сохранения нулевого порядка для уравнений движения совершенного газа в трехмерном случае. В [2] для уравнений безвихревого движения политропного газа действием операторов точечных симметрий на классические законы сохранения получены дополнительные законы сохранения.

В настоящей работе с помощью предлагаемого автором метода $\boldsymbol{A}$-операторов (все обобщенные симметрии системы дифференциальных уравнений являются подмножеством множества ее $\boldsymbol{A}$-операторов) выполнена классификация n-мерных ($n \geqslant 1$) уравнений безвихревого движения газа по законам сохранения нулевого порядка. Найдено новое уравнение состояния (обобщенный газ Чаплыгина), для которого имеет место расширение множества законов сохранения.

1. МЕТОД $\boldsymbol{A}$-ОПЕРАТОРОВ

Рассматривается произвольная система (S) дифференциальных уравнений для m ($m \geqslant 1$) искомых функций $\boldsymbol{u} = (u^1, u^2, \ldots, u^m)$ от $n+1$ ($n \geqslant 1$) независимых переменных

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 07-01-00489).

$\boldsymbol{y} = (x^0, x^1, x^2, \ldots, x^n)$. Пусть $[S]$ — многообразие в продолженном пространстве, определяемое уравнениями системы (S) и всеми ее дифференциальными следствиями. Законом сохранения для системы (S) называется вектор $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{u}, \underset{1}{\boldsymbol{u}}, \underset{2}{\boldsymbol{u}}, \ldots) = (A^0, A^1, A^2, \ldots, A^n)$, такой что $(\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{A})_{[S]} = 0$, где $\boldsymbol{D} = (D_0, D_1, D_2, \ldots, D_n)$; $D_i = D_{x^i}$ — оператор полного дифференцирования по переменной x^i $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$; $\underset{k}{\boldsymbol{u}}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ — совокупность функций $D_{i_1} D_{i_2} \cdots D_{i_k} \boldsymbol{u}$ $(i_m = 0, \ldots, n;\ m = 1, \ldots, k)$ [3].

Определение 1. Пусть $\boldsymbol{A}$ — закон сохранения системы (S). Тогда эволюционный оператор обобщенной симметрии $X = \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{u}, \underset{1}{\boldsymbol{u}}, \underset{2}{\boldsymbol{u}}, \ldots) \cdot \partial_{\boldsymbol{u}} + \ldots$, допускаемый уравнением $\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{A} = 0$ в силу системы (S) и всех ее дифференциальных следствий, называется $\boldsymbol{A}$-оператором этой системы:

$$(X(\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{A}))_{[S]} = 0. \qquad (1)$$

Для множества $\boldsymbol{A}$-операторов системы (S) можно указать оценку снизу: это множество содержит алгебру Ли всех обобщенных симметрий системы (S). Связь $\boldsymbol{A}$-операторов системы с законами сохранения этой системы устанавливают следующие два предложения.

Предложение 1. Действие любого $\boldsymbol{A}$-оператора системы (S) на закон сохранения $\boldsymbol{A}$ дает закон сохранения этой системы.

Предложение 2. Пусть $\boldsymbol{A}$ — закон сохранения системы (S). Тогда любой эволюционный оператор обобщенной симметрии $X = \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{u}, \underset{1}{\boldsymbol{u}}, \underset{2}{\boldsymbol{u}}, \ldots) \cdot \partial_{\boldsymbol{u}} + \ldots$, для которого вектор $X\boldsymbol{A}$ есть закон сохранения этой системы, является ее $\boldsymbol{A}$-оператором.

Определение 2. $\boldsymbol{A}$-оператор X системы (S) называется ее тривиальным $\boldsymbol{A}$-оператором, если вектор $X\boldsymbol{A}$ представляет собой тривиальный закон сохранения этой системы.

Определение 3. Два $\boldsymbol{A}$-оператора системы (S) называются $\boldsymbol{A}$-эквивалентными, если их разность есть тривиальный $\boldsymbol{A}$-оператор этой системы.

В результате действия $\boldsymbol{A}$-эквивалентных $\boldsymbol{A}$-операторов системы (S) на закон сохранения $\boldsymbol{A}$ получаем эквивалентные законы сохранения для этой системы. Следовательно, множество $\boldsymbol{A}$-операторов системы (S) для каждого закона сохранения $\boldsymbol{A}$ разбивается на классы $\boldsymbol{A}$-эквивалентных $\boldsymbol{A}$-операторов.

Имеет место следующая теорема о порождающем законе сохранения для системы дифференциальных уравнений.

Теорема 1. *Если система дифференциальных уравнений (S) имеет закон сохранения нулевого порядка $\boldsymbol{A}$, общий ранг матрицы Якоби $\partial\boldsymbol{A}/\partial\boldsymbol{u}$ которого равен числу независимых переменных системы (S), то каждый закон сохранения для нее может быть получен в результате действия на закон сохранения $\boldsymbol{A}$ некоторого $\boldsymbol{A}$-оператора этой системы.*

Метод получения законов сохранения для систем дифференциальных уравнений с помощью теоремы 1 будем называть методом $\boldsymbol{A}$-операторов.

2. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Уравнения движения газа с калорическим уравнением состояния $p = f(\rho, S)$ (S — энтропия) имеют вид

$$\begin{gathered} \boldsymbol{u}_t + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p = \boldsymbol{0}, \qquad \rho_t + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\rho + \rho \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0, \\ p_t + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)p + \rho c^2(p, \rho) \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0, \end{gathered} \qquad (2)$$

где t — время; $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x})$ — вектор скорости; $\rho = \rho(t, \boldsymbol{x})$ — плотность; $p = p(t, \boldsymbol{x})$ — давление; $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 1)$; $c = c(p, \rho) > 0$ — скорость звука.

Безвихревое движение газа описывается уравнениями (2) и уравнениями

$$\nabla\rho \wedge \nabla p = \mathbf{0}, \qquad \nabla \wedge \boldsymbol{u} = \mathbf{0}, \tag{3}$$

где символ “$\wedge$” обозначает оператор внешнего умножения. Введя потенциал $\varphi = \varphi(t, \boldsymbol{x})$, второе уравнение в (3) можно проинтегрировать:

$$\boldsymbol{u} = \nabla\varphi. \tag{4}$$

В газовой динамике физический смысл закона сохранения $\boldsymbol{A} = (A^0, A^1, A^2, \ldots, A^n)$ определяется компонентой A^0 — плотностью закона сохранения и вектором потока $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}_1 - A^0\boldsymbol{u}$, где $\boldsymbol{A}_1 = (A^1, A^2, \ldots, A^n)$.

2.1. Законы сохранения для уравнений одномерного движения газа. В качестве порождающего закона сохранения $\boldsymbol{A}$ для уравнения (2) при $n = 1$ берется закон сохранения, определяющий движение центра масс:

$$A^0 = \rho(tu - x), \qquad B = tp. \tag{5}$$

Из системы определяющих уравнений, полученной из соотношения (1), следует, что фактор-множество $\boldsymbol{A}$-операторов нулевого порядка для системы (2) при $n = 1$ по множеству ее тривиальных $\boldsymbol{A}$-операторов в случае произвольной функции $c^2(p, \rho)$ порождается операторами

$$\begin{gathered} X_1 = \frac{p}{(tu-x)\rho}\,\partial_u + \frac{(tu-x)\rho u - tp}{(tu-x)^2}\,\partial_\rho, \\ X_2 = \frac{pu}{(tu-x)\rho}\,\partial_u + \frac{\rho(tu-x)(u^2/2+\varepsilon) - tpu}{(tu-x)^2}\,\partial_\rho, \\ X_3 = \frac{\rho g(S)}{tu-x}\,\partial_\rho, \qquad X_4 = \frac{tp}{(tu-x)\rho}\,\partial_u + \frac{\rho(tu-x)^2 - t^2p}{(tu-x)^2}\,\partial_\rho, \end{gathered} \tag{6}$$

где $\varepsilon = \varepsilon(p, \rho)$ — удельная внутренняя энергия; $g = g(S)$ — произвольная функция энтропии S.

Расширение множества нетривиальных $\boldsymbol{A}$-операторов нулевого порядка для системы (2) ($n = 1$) происходит только в двух случаях: 1) при $c^2 = 3p/\rho$, т. е. для политропного газа с показателем адиабаты, равным 3; 2) при $c^2 = \theta(p)/\rho^2$ ($\theta(p)$ — любая заданная функция), т. е. для газа, который будем называть обобщенным газом Чаплыгина (при $\theta(p) = \mathrm{const}$ это известный газ Чаплыгина).

Если $c^2 = 3p/\rho$, то к операторам (6) добавляются $\boldsymbol{A}$-операторы

$$\begin{gathered} X_5 = \frac{(2tu-x)p}{(tu-x)\rho}\,\partial_u + \frac{t^2u(\rho u^2 - p) - x\rho u(2tu-x)}{(tu-x)^2}\,\partial_\rho, \\ X_6 = \frac{2tp}{\rho}\,\partial_u + \frac{t^2(\rho u^2 - p) - x\rho(2tu-x)}{(tu-x)^2}\,\partial_\rho. \end{gathered} \tag{7}$$

Если $c^2 = \theta(p)/\rho^2$, то при $n = 1$ множество нетривиальных $\boldsymbol{A}$-операторов для системы (2) состоит из операторов X_3, X_4 и бесконечного семейства операторов

$$X_7 = \frac{\theta H_p}{(tu-x)\rho}\,\partial_u + \frac{\rho(tu-x)H_u - t\theta H_p}{(tu-x)^2}\,\partial_\rho, \tag{8}$$

где $H = H(u, p)$ — любое решение уравнения

$$H_{uu} = [\theta(p)H_p]_p. \tag{9}$$

Если $c^2(p,\rho)$ — произвольная функция, то при $n = 1$ в результате действия операторов X_1, X_2, X_3, X_4 на закон сохранения (5) получаем следующие классические законы сохранения для системы (2): законы сохранения импульса, энергии, энтропии (при $g(S) \equiv \mathrm{const}$ — закон сохранения массы) и закон сохранения (5), определяющий движение центра масс (оператор X_4 действует на закон сохранения (5) тождественно).

Если $c^2 = 3p/\rho$, то в результате действия операторов X_5, X_6 на закон сохранения (5) имеем два дополнительных закона сохранения, найденных в [2].

Если $c^2 = \theta(p)/\rho^2$, то в результате действия операторов X_3, X_4, X_7 на закон сохранения (5) получаем все классические законы сохранения и бесконечное семейство законов сохранения

$$A^0 = \rho H_u, \qquad B = \theta(p) H_p, \tag{10}$$

где $H = H(u,p)$ — любое решение уравнения (9).

Таким образом, доказана

Теорема 2. *Если $c^2(p,\rho)$ — произвольная функция, то при $n = 1$ множество нетривиальных законов сохранения нулевого порядка для системы* (2) *исчерпывается классическими законами сохранения. Расширение этого множества имеет место только в двух случаях:* 1) *при $c^2 = 3p/\rho$, когда добавляются законы сохранения, полученные в* [2]; 2) *при $c^2 = \theta(p)/\rho^2$ ($\theta(p)$ — любая заданная функция), когда множество нетривиальных законов сохранения нулевого порядка для системы* (2) *при $n = 1$ включает классические законы сохранения и бесконечное множество законов сохранения* (10).

В [3] выполнена групповая классификация системы (2). При $n = 1$ случай $c^2 = 3p/\rho$ соответствует наиболее широкой основной группе Ли преобразований этой системы, а случай $c^2 = \theta(p)/\rho^2$ при групповой классификации не выделяется. Однако $c^2 = \theta(p)/\rho^2$ — единственное значение коэффициента c^2, при котором рассматриваемая система (2) имеет обобщенные симметрии первого порядка. Непосредственные вычисления приводят к следующему утверждению.

Теорема 3. *При $n = 1$ система* (2) *имеет обобщенные симметрии первого порядка, не эквивалентные точечным симметриям, тогда и только тогда, когда $c^2 = \theta(p)/\rho^2$ ($\theta(p)$ — любая заданная функция). Если $c^2 = \theta(p)/\rho^2$, то множество допускаемых этой системой операторов первого порядка, не эквивалентных операторам точечных симметрий, координаты которых линейно зависят от производных u_x, p_x, ρ_x, состоит из операторов*

$$X_g = g u_x \, \partial_u + g p_x \, \partial_p + (\rho g)_x \, \partial_\rho + \dots; \tag{11}$$

$$X_h = \Big[\Big(\frac{\theta}{\rho}\, h_p + h\Big) u_x + \frac{h_u}{\rho}\, p_x\Big] \partial_u + \Big(\frac{\theta}{\rho}\, h_x + h p_x\Big) \partial_p + (\rho h)_x \, \partial_\rho + \dots, \tag{12}$$

где $g = g(S)$ — произвольная функция энтропии S; $h = h(u,p)$ — произвольное решение уравнения (9).

Оператор (11) является $\boldsymbol{A}$-оператором первого порядка для системы (2) ($n = 1$) при всех $c^2(p,\rho)$. Результат действия этого оператора на закон сохранения (5) представляет собой (с точностью до тривиального закона сохранения первого порядка) закон сохранения энтропии.

Оператор (12) является $\boldsymbol{A}$-оператором первого порядка для системы (2) ($n = 1$) при $c^2 = \theta(p)/\rho^2$. В результате действия на закон сохранения (5) этого оператора с функцией $h = H_u(u,p)$ (H — решение уравнения (9)) получаем (с точностью до тривиального закона сохранения первого порядка) закон сохранения (10).

2.2. Законы сохранения для уравнений безвихревого движения газа. Безвихревое движение газа описывается системой уравнений (2), (3) ($n \geqslant 2$). В качестве порождающего закона сохранения $\boldsymbol{A}$ для этой системы берется закон сохранения импульса

$$A^0 = \rho \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{b}, \qquad \boldsymbol{B} = p\boldsymbol{b}, \tag{13}$$

где $\boldsymbol{b}$ — постоянный фиксированный единичный вектор.

Решение системы определяющих уравнений, полученной из соотношения (1), показывает, что для произвольной функции $c^2(p,\rho)$ множество нетривиальных $\boldsymbol{A}$-операторов нулевого порядка системы (2), (3) определяется операторами

$$\begin{gathered}
Y_1 = \frac{1}{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{b}}\Big[\frac{p}{\rho}\,\boldsymbol{u}\cdot\partial_{\boldsymbol{u}} + \Big(\rho\Big(\frac{|\boldsymbol{u}|^2}{2} + \varepsilon\Big) - p\Big)\partial_\rho\Big],\\
Y_2 = \frac{1}{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{b}}\Big[\frac{p}{\rho}\,\boldsymbol{l}\cdot\partial_{\boldsymbol{u}} - \Big(\rho\boldsymbol{u} - \frac{p\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{b}}\Big)\cdot\boldsymbol{l}\,\partial_\rho\Big],\\
Y_3 = \frac{1}{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{b}}\Big[\frac{p}{\rho}\,Q\langle\boldsymbol{x}\rangle\cdot\partial_{\boldsymbol{u}} + Q\langle\boldsymbol{x}\rangle\cdot\Big(\rho\boldsymbol{u} - \frac{p\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{b}}\Big)\partial_\rho\Big],\\
Y_4 = \frac{1}{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{b}}\Big[\frac{tp}{\rho}\,\boldsymbol{k}\cdot\partial_{\boldsymbol{u}} + \Big(\rho(t\boldsymbol{u}-\boldsymbol{x}) - \frac{tp\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{b}}\Big)\cdot\boldsymbol{k}\,\partial_\rho\Big], \qquad Y_5 = \frac{\rho g(S)}{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{b}}\,\partial_\rho,
\end{gathered} \tag{14}$$

где Q — произвольный антисимметричный тензор ранга 2 в $\mathbb{R}^n$; $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{k}$ — любые постоянные единичные векторы; $g = g(S)$ — произвольная функция энтропии S; $\varepsilon = \varepsilon(p,\rho)$ — удельная внутренняя энергия. Расширение этого множества происходит только в двух случаях: 1) при $c^2(p,\rho) = ((n+2)/n)p/\rho$, когда к (14) добавляются $\boldsymbol{A}$-операторы

$$\begin{gathered}
Y_6 = \frac{1}{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{b}}\Big[\frac{p}{\rho}\,(2t\boldsymbol{u}-\boldsymbol{x})\cdot\partial_{\boldsymbol{u}} + q\,\partial_\rho\Big],\\
Y_7 = \frac{1}{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{b}}\Big[\frac{2tp}{\rho}\,(t\boldsymbol{u}-\boldsymbol{x})\cdot\partial_{\boldsymbol{u}} + (t^2(\rho|\boldsymbol{u}|^2 + (n-2)p) + 2tq + \rho|\boldsymbol{x}|^2)\,\partial_\rho\Big]\\
\Big(q = p\,\frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{b}} + t(\rho|\boldsymbol{u}|^2 + (n-2)p) - \rho(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u})\Big);
\end{gathered} \tag{15}$$

2) при $c^2 = 1/(\rho^2 w''(p))$ ($w(p)$ — любая заданная функция, для которой $w''(p) \neq 0$), когда к (14) добавляются $\boldsymbol{A}$-операторы

$$\begin{gathered}
Y_8 = \frac{1}{\rho(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{b})}\,[(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{u} - W\boldsymbol{\lambda}]\cdot\partial_{\boldsymbol{u}} + (\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{\lambda})\,\partial_\rho,\\
Y_9 = \frac{1}{\rho(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{b})}\,[(\Omega\langle\boldsymbol{x}\rangle\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{u} - W\Omega\langle\boldsymbol{x}\rangle]\cdot\partial_{\boldsymbol{u}} + (\Omega\langle\boldsymbol{x}\rangle\cdot\boldsymbol{z})\partial_\rho,\\
Y_{10} = \frac{1}{\rho(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{b})}\Big[((t\boldsymbol{u}-\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{\mu})\boldsymbol{u} + \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\mu}}{n-1}\,\boldsymbol{x} - \Big(tW + \frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}}{n-1}\Big)\boldsymbol{\mu}\Big]\cdot\partial_{\boldsymbol{u}} +\\
+ \Big[(t\boldsymbol{z} - (\rho w'(p) - 1)(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{\mu} + \frac{1}{n-1}\,((\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{x} - (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{\mu})\cdot\boldsymbol{u}\Big]\partial_\rho\\
\Big(W = \frac{|\boldsymbol{u}|^2}{2} - w(p), \qquad \boldsymbol{z} = \frac{1}{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{b}}\,[(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{b})(\rho w'(p) - 1)\boldsymbol{u} + W\boldsymbol{b}]\Big),
\end{gathered} \tag{16}$$

где $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\mu}$ — произвольные постоянные векторы; Ω — произвольный антисимметричный тензор ранга 2 в $\mathbb{R}^n$.

В результате действия операторов Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5 на закон сохранения (13) для системы (2), (3) получаем соответственно следующие законы сохранения:

— закон сохранения энергии

$$A^0 = \rho(|\boldsymbol{u}|^2/2 + \varepsilon), \qquad \boldsymbol{B} = p\boldsymbol{u}; \tag{17}$$

— закон сохранения импульса

$$A^0 = \rho\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{l}, \qquad \boldsymbol{B} = p\boldsymbol{l}; \tag{18}$$

— закон сохранения момента импульса

$$A^0 = \rho Q\langle\boldsymbol{x}\rangle\cdot\boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{B} = pQ\langle\boldsymbol{x}\rangle; \tag{19}$$

— закон сохранения, определяющий движение центра масс:

$$A^0 = \rho(t\boldsymbol{u} - \boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{k}, \qquad \boldsymbol{B} = tp\cdot\boldsymbol{k}; \tag{20}$$

— закон сохранения энтропии (при $g(S) \equiv \mathrm{const}$ — закон сохранения массы)

$$A^0 = \rho g(S), \qquad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}. \tag{21}$$

При $c^2(p,\rho) = ((n+2)/n)p/\rho$ в результате действия операторов Y_6, Y_7 на закон сохранения (13) имеем соответственно два дополнительных закона сохранения, найденные в [2]:

$$A^0 = t(\rho|\boldsymbol{u}|^2 + np) - \rho\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{B} = p(2t\boldsymbol{u} - \boldsymbol{x}); \tag{22}$$

$$A^0 = t^2(\rho|\boldsymbol{u}|^2 + np) - \rho\boldsymbol{x}\cdot(2t\boldsymbol{u} - \boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{B} = 2tp(t\boldsymbol{u} - \boldsymbol{x}). \tag{23}$$

При $c^2 = 1/(\rho^2 w''(p))$ в результате действия операторов Y_8, Y_9, Y_{10} на закон сохранения (13) получаем соответственно три дополнительных закона сохранения:

— дополнительный обобщенный закон сохранения импульса

$$A^0 = \rho w'(p)\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\lambda}, \qquad \boldsymbol{B} = [w(p) - |\boldsymbol{u}|^2/2]\boldsymbol{\lambda} + (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{u}; \tag{24}$$

— дополнительный обобщенный закон сохранения момента импульса

$$A^0 = \rho w'(p)Q\langle\boldsymbol{x}\rangle\cdot\boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{B} = [w(p) - |\boldsymbol{u}|^2/2]Q\langle\boldsymbol{x}\rangle + (Q\langle\boldsymbol{x}\rangle\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}; \tag{25}$$

— закон сохранения, определяющий дополнительный обобщенный закон движения центра масс:

$$\begin{gathered} A^0 = \rho w'(p)(t\boldsymbol{u} - \boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{\mu}, \\ \boldsymbol{B} = \Big[t\Big(w(p) - \frac{|\boldsymbol{u}|^2}{2}\Big) - \frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}}{n-1}\Big]\boldsymbol{\mu} + [(t\boldsymbol{u} - \boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{\mu}]\boldsymbol{u} + \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\mu}}{n-1}\,\boldsymbol{x}. \end{gathered} \tag{26}$$

Таким образом, доказана

Теорема 4. *Множество нетривиальных законов сохранения нулевого порядка для системы* (2), (3), *описывающей безвихревое движение газа, при произвольной функции* $c^2(p,\rho)$ *состоит из классических законов сохранения* (13), (17)–(21). *Расширение этого множества происходит только в двух случаях:* 1) *при* $c^2 = ((n+2)/n)p/\rho$, *когда добавляются законы сохранения* (22), (23); 2) *при* $c^2 = 1/(\rho^2 w''(p))$ ($w(p)$ *— любая заданная функция, такая что* $w''(p) \neq 0$), *когда добавляются законы сохранения* (24)–(26).

2.3. Нелокальные законы сохранения для уравнений безвихревого движения газа. Для уравнений (2) потенциал $\varphi = \varphi(t,\boldsymbol{x})$ является нелокальной переменной. Для системы (2)–(4) ищутся законы сохранения $\boldsymbol{A}$ следующего вида:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},p,\rho,\varphi,\varphi_t). \tag{27}$$

Одномерный случай. При $n = 1$ в качестве порождающего закона сохранения $\boldsymbol{A}$ для системы (2), (4) берется закон сохранения, определяющий закон движения центра масс (5). $\boldsymbol{A}$-оператор для данной системы ищется в виде

$$\eta\,\partial_u + \sigma\,\partial_p + \tau\,\partial_\rho + \psi\,\partial_\varphi + \ldots, \tag{28}$$

где η, σ, τ, ψ — искомые функции переменных t, x, u, p, ρ, φ, φ_t.

Из системы определяющих уравнений, полученных из (1), следует, что при произвольной функции $c^2(p,\rho)$ множество нетривиальных $\boldsymbol{A}$-операторов вида (28) для системы (2), (4) состоит из операторов (6). Расширение этого множества происходит только в двух случаях: 1) при $c^2 = 3p/\rho$, когда добавляются операторы (7); 2) при $c^2 = 1/(\rho^2 w''(p))$ ($w(p)$ — любая заданная функция, такая что $w''(p) \neq 0$), когда множество нетривиальных $\boldsymbol{A}$-операторов вида (28) для системы (2), (4) состоит из операторов (6), (8), для которых $\theta(p) = 1/w''(p)$, и оператора

$$X_8 = [\rho w'(p) + 1]\,\partial_\rho + [w(p) - u^2/2 - \varphi_t]\,\partial_p + \dots. \tag{29}$$

В результате действия оператора (29) на закон сохранения (5) для системы (2), (4) получаем закон сохранения

$$A^0 = \rho w'(p)(tu - x), \qquad B = t[w(p) + u^2/2] - xu + \varphi, \tag{30}$$

который является нелокальным законом сохранения с нелокальной переменной φ для уравнений (2).

Полученные результаты можно сформулировать в виде теоремы.

Теорема 5. *При* $n = 1$ *система* (2) *имеет нетривиальные нелокальные законы сохранения вида* (27) *тогда и только тогда, когда* $c^2 = 1/(\rho^2 w''(p))$. *Здесь* $w(p)$ *— заданная функция, для которой* $w''(p) \neq 0$ (*обобщенный газ Чаплыгина*). *Каждый такой закон сохранения эквивалентен закону сохранения* (30).

Многомерный случай. При $n \geqslant 2$ в качестве порождающего закона сохранения $\boldsymbol{A}$ для системы (2)–(4) берется закон сохранения импульса (13). Для данной системы $\boldsymbol{A}$-оператор ищется в виде

$$\boldsymbol{\eta} \cdot \partial_{\boldsymbol{u}} + \sigma\,\partial_p + \tau\,\partial_\rho + \psi\,\partial_\varphi + \dots, \tag{31}$$

где $\boldsymbol{\eta}$, σ, τ, ψ — искомые функции переменных t, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{u}$, p, ρ, φ, φ_t.

Множество нетривиальных $\boldsymbol{A}$-операторов вида (31) для системы (2)–(4) с произвольной функцией $c^2(p,\rho)$ порождается операторами (14). Расширение этого множества происходит только в двух случаях: 1) при $c^2(p,\rho) = ((n+2)/n)p/\rho$, когда добавляются операторы (15); 2) при $c^2 = 1/(\rho^2 w''(p))$ ($w(p)$ — заданная функция, для которой $w''(p) \neq 0$), когда добавляются операторы (16) и оператор

$$Y_{11} = [\rho w'(p) + 1]\,\partial_\rho + [w(p) - |\boldsymbol{u}|^2/2 - \varphi_t]\,\partial_p + \dots, \tag{32}$$

являющийся n-мерным аналогом оператора (29). Других нелокальных $\boldsymbol{A}$-операторов вида (31), не являющихся $\boldsymbol{A}$-эквивалентными оператору (32), система (2) не имеет. В результате действия оператора Y_{11} на закон сохранения (13) получаем закон сохранения, эквивалентный закону сохранения (24), который не зависит от φ, φ_t. Следовательно, в n-мерном случае ($n \geqslant 2$) система (2) не имеет нелокальных законов сохранения вида (27).

Оказывается, Y_{11} является нетривиальным $\boldsymbol{A}$-оператором не только для закона сохранения (13), но и для каждого из законов сохранения (18)–(20). В результате действия оператора Y_{11} на законы сохранения (19), (20) получаем законы сохранения, эквивалентные законам сохранения (25), (26).

Как показывают непосредственные вычисления, групповая классификация системы (2)–(4) относительно коэффициента $c^2(p,\rho)$ по допускаемым ею операторам вида

$$\xi^0\,\partial_t + \boldsymbol{\xi} \cdot \partial_{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{\eta} \cdot \partial_{\boldsymbol{u}} + \sigma\,\partial_p + \tau\,\partial_\rho + \psi\,\partial_\psi + \dots, \tag{33}$$

где ξ^0, $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$, σ, τ, ψ — искомые функции переменных t, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{u}$, p, ρ, φ, φ_t, совпадает с известной групповой классификацией системы (2) по допускаемым ею точечным операторам (соответствующие алгебры Ли лишь расширяются на оператор $f(t)\,\partial_\varphi$ с произвольной функцией $f(t)$) [3]. При этом случай $c^2 = 1/(\rho^2 w''(p))$ не выделяется. Однако если искать операторы вида (33), допускаемые в силу (2)–(4) системой, состоящей из всех уравнений системы (2), кроме последнего уравнения, то с точностью до очевидных преобразований эквивалентности будут иметь место только два случая: 1) $c^2(p,\rho)$ — произвольная функция; 2) $c^2 = 1/(\rho^2 w''(p))$ ($w(p)$ — любая заданная функция, для которой $w''(p) \neq 0$). Если $c^2(p,\rho)$ — произвольная функция, то множество указанных операторов имеет вид

$$\begin{gathered}
\partial_t, \quad \partial_{\boldsymbol{x}}, \quad \boldsymbol{x} \wedge \partial_{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{u} \wedge \partial_{\boldsymbol{u}}, \quad t\,\partial_{\boldsymbol{x}} + \partial_{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{x}\,\partial_\varphi, \quad \alpha(t)\,\partial_\varphi, \quad \beta(t)\,\partial_p, \\
t\,\partial_t + \boldsymbol{x}\cdot\partial_{\boldsymbol{x}} + \varphi\,\partial_\varphi, \quad t\,\partial_t - \boldsymbol{u}\cdot\partial_{\boldsymbol{u}} + 2\rho\,\partial_\rho - \varphi\,\partial_\varphi, \quad \rho\,\partial_\rho + p\,\partial_p, \qquad (34) \\
t^2\,\partial_t + t\boldsymbol{x}\cdot\partial_{\boldsymbol{x}} + (\boldsymbol{x} - t\boldsymbol{u})\cdot\partial_{\boldsymbol{u}} - nt\rho\,\partial_\rho - (n+2)tp\,\partial_p + (1/2)|\boldsymbol{x}|^2\,\partial_\varphi,
\end{gathered}$$

где $\alpha(t)$, $\beta(t)$ — произвольные функции. Если $c^2 = 1/(\rho^2 w''(p))$, то к операторам (34) добавляется нелокальный оператор (32).

Следует отметить, что множество (34) с точностью до операторов $\alpha(t)\,\partial_\varphi$, $\beta(t)\,\partial_p$ ($\beta'(t) \neq 0$) состоит из всех точечных операторов, допускаемых системой (2), в том числе для всех случаев расширения ее основной алгебры Ли.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Шмыглевский Ю. Д.** Аналитические исследования динамики газа и жидкости. М.: Эдиториал УРСС, 1999.
2. **Ибрагимов Н. Х.** Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.
3. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

Поступила в редакцию 22/V 2008 г.,
в окончательном варианте — 6/X 2008 г.