УДК 533.6.011, 517.958

ПРОСТЫЕ ВОЛНЫ НА СДВИГОВОМ ПОТОКЕ ГАЗА В КАНАЛЕ ПОСТОЯННОГО СЕЧЕНИЯ

Б. Н. Елемесова

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Рассматривается плоскопараллельное нестационарное сдвиговое течение газа в узком канале постоянного сечения. В классе изоэнтропических течений с монотонным по глубине канала профилем скорости доказана теорема существования решений в виде простых волн системы уравнений движения. Для политропного уравнения состояния в классе изоэнтропических течений найдено точное решение, описывающееся неполными бета-функциями.

Введение. Приближенная интегродифференциальная система уравнений нестационарных течений невязкого нетеплопроводного газа в удлиненном канале переменного сечения выведена в [1]. На основе обобщенного определения характеристик и понятия гиперболичности для систем с операторными коэффициентами [2, 3] в [1] получены условия гиперболичности системы уравнений движения и построен класс стационарных решений, описывающих неоднородные трансзвуковые потоки в канале переменного сечения.

Точные решения системы уравнений длинных волн, распространяющихся в слое несжимаемой завихренной жидкости, найдены в [4, 5]. В [6, 7] доказано существование и проанализированы общие свойства простых волн, отвечающих изолированным значениям характеристического спектра, в слое жидкости со свободной границей.

1. Постановка задачи. Рассматривается начально-краевая задача

$$\begin{gathered} u_T + uu_X + vu_Y + \rho^{-1}p_X = 0, \quad \rho^{-1}p_Y = 0, \quad \rho_T + u\rho_X + v\rho_Y + \rho(u_X + v_Y) = 0, \\ s_T + us_X + vs_Y = 0, \quad u(X,0,Y) = u_0(X,Y), \quad v(X,0,Y) = v_0(X,Y), \\ s(X,0,Y) = s_0(X,Y), \quad \rho(X,0,Y) = \rho_0(X,Y), \quad \rho = \rho(p,s), \quad 0 \leqslant Y \leqslant A_0(X), \\ X \in R, \quad T \in R^+, \quad v(X,T,0) = 0, \quad v(X,T,A_0(X)) = u(X,T,A_0(X))A_0'(X), \end{gathered} \tag{1.1}$$

описывающая в приближении длинных волн плоскопараллельное вихревое течение газа в канале $0 \leqslant Y \leqslant A_0(X)$. Здесь u, v — компоненты вектора скорости, p — давление, ρ — плотность, s — энтропия. Удельный объем ρ^{-1} обозначаем в дальнейшем через τ и считаем, что уравнение состояния газа $p(\tau, s)$ удовлетворяет условиям

$$p_\tau < 0, \qquad p_{\tau\tau} > 0, \qquad p_s > 0, \qquad \rho \to 0 \quad \text{при} \quad p \to 0. \tag{1.2}$$

Длинноволновое приближение возникает, если учесть, что $H_0 \ll L_0$, где H_0 и L_0 — характерные глубина и длина канала. Тогда из второго уравнения (1.1) следует, что давление не зависит от вертикальной координаты Y: $p = p(X, T)$. Это означает, что в длинноволновом приближении выравнивание давления поперек канала происходит мгновенно.

Введем смешанные эйлерово-лагранжевы независимые переменные x, t, λ ($X = x$, $T = t$, $Y = \Phi(x,t,\lambda)$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, $\Phi(x,t,0) = 0$, $\Phi(x,t,1) = A_0(x)$ [1]) и новую неизвестную функцию $H(x,t,\lambda) = \rho(x,t,\lambda)\Phi_\lambda(x,t,\lambda)$. Согласно [1] задача (1.1) сводится к задаче Коши
23 для функций $u(x,t,\lambda)$, $H(x,t,\lambda)$, $s(x,t,\lambda)$

$$u_t + uu_x + (\rho\sigma)^{-1}\int\limits_0^1 (H_x\rho^{-1} - H\rho_s s_x \rho^{-2})\,d\lambda = A_0'(x)(\sigma\rho)^{-1}, \quad H_t + (uH)_x = 0, \quad s_t + us_x = 0,$$

$$\begin{gathered} u(x,0,\lambda)=u_0(x,\lambda), \qquad H(x,0,\lambda)=H_0(x,\lambda), \qquad s(x,0,\lambda)=s_0(x,\lambda), \\ \rho=\rho(p(x,t),s(x,t,\lambda)), \qquad 0\leqslant\lambda\leqslant 1, \quad -\infty\leqslant x\leqslant+\infty, \quad t>0, \end{gathered} \tag{1.3}$$

где $\sigma = \int\limits_0^1 H\rho^{-2}c^{-2}\,d\lambda$, c^2 — квадрат скорости звука ($c^2 = p'_\rho$). При этом нелокальная зависимость p от s, H в (1.3) задается уравнением

$$\int\limits_0^1 H(x,t,\lambda)(\rho(p(x,t),s(x,t,\lambda)))^{-1}\,d\lambda = A_0(x). \tag{1.4}$$

По известному решению (1.3) функция замены $\Phi(x,t,\lambda)$ и вертикальная компонента вектора скорости v определяются соотношениями

$$\Phi(x,t,\lambda)=\int\limits_0^\lambda H(x,t,\nu)(\rho(p(x,t),s(x,t,\nu)))^{-1}\,d\nu, \qquad v=\Phi_t+u\Phi_x.$$

Согласно [1] система уравнений (1.3) имеет характеристики $dx/dt = k_i(x,t)$, соответствующие дискретному спектру, и характеристики $dx/dt = u(x,t,\lambda)$ ($\lambda = \mathrm{const}$) непрерывного спектра характеристических скоростей. Характеристические корни дискретного спектра определяются уравнением

$$\sigma = \int\limits_0^1 H\rho^{-2}(u-k_i)^{-2}\,d\lambda, \tag{1.5}$$

которое при любых значениях переменных x, t имеет только два вещественных корня k_1 и k_2 вне интервала изменения функции $u(x,t,\lambda)$, таких что $k_1 < \min\limits_\lambda u(x,t,\lambda)$, $k_2 > \max\limits_\lambda u(x,t,\lambda)$.

Рассмотрим канал постоянного сечения $A_0(x) = A_0 = \mathrm{const}$. Заметим, что тогда система уравнений (1.3) допускает точные решения вида

$$p=p_0=\mathrm{const}, \qquad u=u(\lambda), \qquad H=H(\lambda), \qquad s=s(\lambda); \tag{1.6}$$

$$u=u(\eta(x,t),\lambda), \qquad H=H(\eta(x,t),\lambda), \qquad s=s(\eta(x,t),\lambda), \tag{1.7}$$

где $\eta(x,t)$ — некоторая функция переменных x, t. Решение (1.6) в исходных переменных описывает стационарный сдвиговой поток $u = u(Y)$, $v = 0$, $p = p_0 = \mathrm{const}$, $s = s(Y)$, а (1.7) дает решение $u = u(\eta(X,T),Y)$, $v = \eta_X v(\eta(X,T),Y)$, $s = s(\eta(X,T),Y)$, которое будем называть *простой* волной. В дальнейшем в качестве параметра простой волны $\eta(x,t)$ выбираем функцию распределения давления $p(x,t)$.

В данной работе рассматриваются простые волны, удовлетворяющие для всех λ условию

$$k = -p_t/p_x \neq u(x,t,\lambda). \tag{1.8}$$

В силу (1.8) простые волны описываются уравнениями

$$u_p = -(\rho(p,s(p,\lambda)))^{-1}(u-k)^{-1}, \qquad H_p = H(\rho(p,s(p,\lambda)))^{-1}(u-k)^{-2}, \quad s_p=0. \tag{1.9}$$

Разделив второе уравнение (1.9) на ρ и проинтегрировав его по λ от 0 до 1, в силу (1.4) получим, что k должно удовлетворять характеристическому уравнению (1.5). Для определенности исследуем простые волны, отвечающие корню k_2 ($k_2 > \max\limits_\lambda u(x,t,\lambda)$) уравнения (1.5) (случай $k = k_1$ рассматривается аналогично). Удобно получить дифференциальное уравнение для k, продифференцировав (1.5):

$$k'(p) = -\Big(\int\limits_0^1 H\tau_{pp}\,d\lambda + 3\int\limits_0^1 H\tau(u-k)^{-2}(\tau_p+\tau^2(u-k)^{-2})\,d\lambda\Big)\Big/2\int\limits_0^1 H\tau^2(u-k)^{-3}\,d\lambda. \tag{1.10}$$

Для системы уравнений (1.9), (1.10) естественно поставить задачу Коши с данными при $p = p_0$ ($p_0 = \mathrm{const}$):

$$u(p_0, \lambda) = u_0(\lambda), \quad H(p_0, \lambda) = H_0(\lambda), \quad s(p_0, \lambda) = s_0(\lambda), \quad k(p_0) = k_0, \tag{1.11}$$

где k_0 — больший корень уравнения (1.5) ($k_0 > \max u_0(\lambda)$) при $u = u_0(\lambda)$, $H = H_0(\lambda)$, $s = s_0(\lambda)$.

По известному решению (1.9), (1.10) давление p находится интегрированием (1.8). Из (1.8) следует, что давление p постоянно вдоль характеристик $dx/dt = k_2$ системы уравнений (1.3). Таким образом, область определения простой волны покрыта однопараметрическим семейством плоскостей $p = \mathrm{const}$ и задача (1.9)–(1.11) является задачей о примыкании непрерывного решения типа простой волны к заданному сдвиговому потоку по некоторой характеристике, соответствующей $p = p_0$ (p_0 — постоянное давление в сдвиговом потоке).

2. Существование простых волн. При доказательстве существования простых волн будем опираться на теорему существования решения задачи Коши для нелинейного уравнения в банаховом пространстве B

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \qquad x(t_0) = x_0, \tag{2.1}$$

где $f(x, t)$ — функция вещественного аргумента t и переменного $x \in B$, принимающая значения в B.

Пусть функция $f(x, t)$ непрерывна по t и удовлетворяет при $t \in [a, b]$, $\|x - x_0\| \leqslant \theta$ условиям $\|f(x, t)\| \leqslant M_1$, $\|f(x_1, t) - f(x_2, t)\| \leqslant M_2 \|x_1 - x_2\|$. Тогда, согласно [8], существует число $\delta_1 > 0$ такое, что на интервале $\delta_1 = \min(\theta M_1^{-1}, M_2^{-1})$ задача Коши (2.1) имеет единственное решение $x = \varphi(t)$, остающееся в шаре $\|\varphi(t) - x_0\| \leqslant \theta$.

Чтобы воспользоваться приведенным результатом, рассмотрим банахово пространство B вектор-функций $\mathbf{U} = (u, H, s, k)$ действительного аргумента $\lambda \in [0, 1]$

$$B = \{(u, H, s, k)/u \in C^1[0, 1],\ H \in C[0, 1],\ s \in C^1[0, 1],\ k \in R\}$$

с нормой $\|\mathbf{U}\| = \max|u_\lambda| + \max|u| + \max|s_\lambda| + \max|s| + \max|H| + |k|$, где $C^1[0, 1]$ — множество непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[0, 1]$, $C[0, 1]$ — множество непрерывных функций, R — числовая прямая.

Пусть $\mathbf{U}_0 = (u_0, H_0, s_0, k_0) \in B$. Так как u_0, H_0 непрерывны на замкнутом промежутке $[0, 1]$ и $u_0 - k_0 < 0$, $H_0 > 0$, то найдется такое постоянное значение $\theta > 0$, что $|u_0 - k_0| \geqslant \min|u_0(\lambda) - k_0| > \theta$, $\min H_0 > \theta$. В пространстве B рассмотрим шар $\|\mathbf{U} - \mathbf{U}_0\| < \theta/2$. Для $\mathbf{U}$ из шара выполнены неравенства

$$|u - k| \geqslant |u_0 - k_0| - \|\mathbf{U} - \mathbf{U}_0\| \geqslant \theta/2, \quad \min|H| \geqslant \min|H_0| - \|\mathbf{U} - \mathbf{U}_0\| \geqslant \theta/2. \tag{2.2}$$

Тогда в силу непрерывности оператора $f(\mathbf{U}, p)$ в области (2.2) найдутся постоянные $M_1(\theta, \mathbf{U}_0)$ и $M_2(\theta, \mathbf{U}_0)$, при которых справедливы неравенства

$$\|f(\mathbf{U}, p)\| \leqslant M_1, \qquad \|f(\mathbf{U}_1, p) - f(\mathbf{U}_2, p)\| \leqslant M_2 \|\mathbf{U}_2 - \mathbf{U}_1\|. \tag{2.3}$$

Используя приведенный выше результат, получим факт существования и единственности решения задачи (1.9)–(1.11) на интервале $[p_0 - \delta_1, p_0 + \delta_1]$ в пространстве B.

Для изоэнтропических течений, когда $s_0(\lambda) = s_0 = \mathrm{const}$, докажем теорему существования решения задачи (1.9)–(1.11) в целом по амплитуде простой волны p. Рассмотрим монотонный профиль скорости $u_{0\lambda} \geqslant 0$. Из (1.9) следует, что $(u_\lambda H^{-1})_p = 0$. Тогда соотношение

$$u_\lambda H^{-1} = u_{0\lambda} H_0^{-1} \tag{2.4}$$

является интегралом системы (1.9), (1.10). В силу (2.4) $u_\lambda > 0$ в области определения простой волны. Кроме того, характеристическое уравнение (1.5) является интегралом уравнений (1.9), (1.10) по построению. Использование интегралов системы (1.9), (1.10) позволяет установить априорные оценки решения.

Лемма. *Пусть* u, H, k *— решение задачи* (1.9)–(1.11) *и выполнено неравенство* $\omega = u_{0\lambda}H_0^{-1} \leqslant \omega_2 < \infty$, *где* $\omega_2 = \max \omega(\lambda)$. *Тогда справедливы оценки*

$$\frac{c^2}{c+\omega_2\rho A_0} \leqslant |u-k| \leqslant A_0\omega_2\rho + c \tag{2.5}$$

($c = \sqrt{p'_\rho}$ — скорость звука).

Доказательство. Введем $u_2 = \max\limits_\lambda u(p(x,t),\lambda)$, $u_1 = \min\limits_\lambda u(p(x,t),\lambda)$. Из характеристического уравнения (1.5) вытекает

$$A_0\rho^{-1}c^{-2} = \sigma = \int\limits_0^1 H\rho^{-2}(u-k)^{-2}\,d\lambda \leqslant A_0\rho^{-1}(u_2-k)^{-2},$$

$$A_0\rho^{-1}c^{-2} = \sigma = \int\limits_0^1 H\rho^{-2}(u-k)^{-2}\,d\lambda \geqslant A_0\rho^{-1}(u_1-k)^{-2}.$$

Отсюда

$$|u_2-k| \leqslant c, \qquad |u_1-k| \geqslant c. \tag{2.6}$$

Из (1.5) получаем

$$A_0\rho^{-1}c^{-2} \geqslant \rho^{-2}\omega_2^{-1}\int\limits_0^1 u_\lambda(u-k)^{-2}\,d\lambda = \rho^{-2}\omega_2^{-1}(-(u_2-k)^{-1}+(u_1-k)^{-1}). \tag{2.7}$$

В силу (2.6) из (2.7) следует оценка снизу $|u_2-k| \geqslant c^2(c+A_0\omega_2\rho)^{-1}$. Из (1.4) получаем

$$A_0 = \rho^{-1}\int\limits_0^1 u_\lambda^{-1}Hu_\lambda\,d\lambda \geqslant (\rho\omega_2)^{-1}(u_2-u_1). \tag{2.8}$$

Поскольку $|u_1-k| \leqslant u_2-u_1+|u_2-k|$, то из (2.6) и (2.8) следует оценка сверху $|u_1-k| \leqslant A_0\omega_2\rho + c$. Неравенства (2.5) следуют из неравенств $|u_2-k| \leqslant |u-k| \leqslant |u_1-k|$. Лемма доказана.

Теорема. *Пусть* u, H *удовлетворяют условиям леммы. Тогда решение задачи* (1.9)–(1.11) *существует на любом конечном интервале* $p \in [\delta, L]$, $\delta > 0$, $L < \infty$ *и принадлежит пространству* B.

Доказательство. При $\mathbf{U} = (u, H, k) \in B$, $p \in [\delta, L]$ в силу (2.5) справедливы неравенства

$$c^2(\delta)(c(L)+\omega_2\rho(L)A_0)^{-1} \leqslant |u-k| \leqslant A_0\omega_2\rho(L)+c(L). \tag{2.9}$$

Продифференцировав первое уравнение (1.9) по λ, а затем проинтегрировав по p, получим

$$u_\lambda(p,\lambda) = u_{0\lambda}\exp\Big(\int\limits_{p_0}^{p} \rho^{-1}(u-k)^{-2}\,dp\Big). \tag{2.10}$$

22

Интегрированием второго уравнения (1.9) находим

$$H(p,\lambda) = H_0(\lambda)\exp\Big(\int\limits_{p_0}^{p} \rho^{-1}(u-k)^{-2}\,dp\Big). \tag{2.11}$$

Тогда в силу (2.9)–(2.11) условия (2.2) выполняются с одними и теми же константами M_1, M_2, зависящими только от δ, L и $\|\mathbf{U}_0\|$. Поэтому, построив решение на интервале $[p_0 - \delta_1, p_0 + \delta_1]$, его можно продолжить единственным образом на весь интервал $[\delta, L]$. Теорема доказана.

Построение простой волны завершается решением уравнения

$$p_t + k(p)p_x = 0, \qquad p(x,0) = p_m(x). \tag{2.12}$$

Согласно известным фактам теории квазилинейных уравнений [9] свойства решений (2.12) зависят от того, будет или нет производная $k'(p)$ знакоопределена. Из уравнения (2.12) следует, что вдоль характеристик $dx/dt = k(p)$

$$p_x = \frac{p_{mx}(x)}{1 + tk'(p_m)p_{mx}}. \tag{2.13}$$

Из (2.13) вытекает, что если $k'(p_m)p_{mx} > 0$, то производная p_x остается ограниченной ($|p_x| \leqslant 1$) и решение уравнения (2.12) существует при любых $t > 0$. Если $k'(p_m)p_{mx} < 0$ для некоторых x, то решение (2.12) существует только для конечных $t > 0$.

Исследуем знак функции $k'(p)$. Заметим, что числитель правой части уравнения (1.10) совпадает с видом второй производной $K''(p)$ функции $K(p)$, служащей для определения давления p при построении стационарных решений в [1]. Функции f из [1] здесь соответствует функция H. Условие $K'(p_c) = 0$ из [1] эквивалентно характеристическому уравнению (1.5), а условие $K''(p_c) \geqslant 0$ — условию $k'(p) \geqslant 0$. Как показано в [1], если уравнение состояния имеет вид

$$\tau = B(s)\varphi(p), \qquad \varphi' < 0, \qquad \varphi'' > 0, \tag{2.14}$$

то $k'(p) \geqslant 0$. В общем случае условие $k'(p) > 0$ не является следствием условий (1.2), но, если потребовать, чтобы функция уравнения состояния $\tau = \tau(p, s)$ удовлетворяла дополнительному условию

$$4\tau\tau_{pp} - 3\tau_p^2 > 0, \tag{2.15}$$

то $k'(p) > 0$ при всех значениях p.

Будем называть простую волну *волной сжатия* (разрежения), если для всех λ ($0 \leqslant \lambda \leqslant 1$) выполнено неравенство

$$p_t + u(x,t,\lambda)p_x = (u(x,t,\lambda) - k)p_x > 0 \quad (< 0).$$

Согласно уравнениям газовой динамики будем называть простую волну *центрированной волной*, если все характеристики $dx/dt = k(p)$ сходятся в одной точке.

Из (2.13) следует, что при $k'(p) > 0$ градиентная катастрофа произойдет в простой волне сжатия, а простые волны разрежения могут существовать для любого $t > 0$. Если же $k'(p) < 0$, то простые волны сжатия могут существовать при любых $t > 0$, а волны разрежения — только для конечных $t > 0$. Центрированные в начальный момент простые волны при $k'(p) > 0$ являются волнами разрежения, а при $k'(p) < 0$ — волнами сжатия.

Уравнение состояния газа с постоянной энтропией является частным случаем (2.14). Следовательно, для изоэнтропических течений $k'(p)$ всегда больше нуля и простые волны, определенные при всех $t > 0$, являются волнами разрежения, а простые волны сжатия опрокидываются. Центрированные при $t = 0$ простые волны при $t > 0$ будут волнами разрежения.

Отметим аналогию. Поведение решения типа простых волн уравнений одномерной газовой динамики определяется знаком величины $g_{\tau\tau}$, где $p = g(\tau, s)$ — уравнение состояния газа. При исследовании простых волн системы (1.3) аналогичную роль играет знак производной $k'(p)$. Поэтому условие (2.15), гарантирующее $k'(p) > 0$, можно рассматривать как аналог условия выпуклости уравнения состояния: $g_{\tau\tau} > 0$.

Итак, простая изоэнтропическая волна разрежения существует для всех $t > 0$. В общем случае в зависимости от исходного уравнения состояния могут существовать как простые волны разрежения, так и простые волны сжатия. Поведение решения определяется знаком производной $k'(p)$, и свойства простых волн, когда производная $k'(p)$ меняет знак, имеют аналогию со свойствами простых волн в газе с аномальными термодинамическими свойствами.

3. Точные решения. Рассмотрим задачу построения простой волны (1.9), (1.10) для среды с политропным уравнением состояния $\rho = B_0 p^\beta$, $0 < \beta < 1$ и постоянной энтропией $B_0 = \mathrm{const}$. Обозначим $\alpha = \beta/(1-\beta)$ и введем новую переменную $\xi = p^{1-\beta}/(1-\beta)$. Тогда уравнения (1.9) и соотношение (1.4) перепишутся в виде

$$u_\xi = -(B_0(u-k))^{-1}, \qquad H_\xi = HB_0^{-1}(u-k)^{-2}, \qquad \int\limits_0^1 H\,d\lambda = B_0A_0(1-\beta)^\alpha\xi^\alpha. \tag{3.1}$$

Система (3.1) допускает однопараметрическую группу растяжений $\xi \to l\xi$, $\lambda \to \lambda$, $u \to \sqrt{l}u$, $k \to \sqrt{l}k$, $H \to l^\alpha H$, где l — параметр группы. Построим решение системы (3.1), инвариантное относительно указанной группы. Заметим, что отношение

$$y = \int\limits_0^\lambda H\,d\lambda \Big/ \int\limits_0^1 H\,d\lambda = \int\limits_0^\lambda H\,d\lambda \Big/ B_0A_0(1-\beta)^\alpha\xi^\alpha = \frac{Y}{A_0}$$

является инвариантом группы. Согласно известному алгоритму отыскания инвариантных решений полагаем

$$u = \sqrt{\xi}U(y), \qquad k = \sqrt{\xi}A \quad (A = \mathrm{const}). \tag{3.2}$$

Подставляя (3.2) в первое уравнение (3.1), получим уравнение для определения функции $U(y)$

$$U/2 + (\Phi - \alpha y)U' + (B_0(U-A))^{-1} = 0, \tag{3.3}$$

где

$$\Phi(y) = \int\limits_0^y B_0^{-1}(U-A)^{-2}\,dy. \tag{3.4}$$

В силу (1.5), (3.4) функция $\Phi(y)$ удовлетворяет граничным условиям $\Phi(0) = 0$, $\quad \Phi(1) = \alpha$. Исключая $U(y)$ из (3.3) при помощи (3.4), получаем уравнение для $\Phi(y)$

$$-(\Phi - \alpha y)\Phi'' + 2\Phi'^2 + A\sqrt{B_0}\Phi'^{3/2} + \Phi' = 0.$$

Введем функцию $\psi = \Phi - \alpha y$. Тогда $\psi(y)$ должна удовлетворять уравнению

$$-\psi\psi'' + 2(\psi' + \alpha)^2 + A\sqrt{B_0}(\psi' + \alpha)^{3/2} + \psi' + \alpha = 0 \tag{3.5}$$

и граничным условиям $\psi(0) = \psi(1) = 0$. После замены $\psi' = L(\psi)$, $N^2 = L + \alpha$ уравнение (3.5) интегрируется аналогично [4]:

$$\psi = \frac{C(a-N)^{1-(2\alpha-1)b(a-b)^{-1}}(N-b)^{1+(2\alpha-1)a(a-b)^{-1}}}{N^{2\alpha}}. \tag{3.6}$$

Здесь a, b — корни квадратного уравнения $N^2 + AB_0/2N + 1/2 = 0$ $(a > b)$, C — произвольная постоянная. Считаем, что $4D = A^2B_0 - 8 > 0$. Граничные условия для функции ψ выполняются в точках $N = a$, $N = b$ при условии, что

$$1 - (2\alpha-1)b/(a-b) > 0, \qquad 1 + (2\alpha-1)a/(a-b) > 0. \tag{3.7}$$

Пусть $y = 0$ соответствует $N = a$, а $y = 1$ соответствует $N = b$. Так как $L = \psi'_y = \psi'_N N'_y$, то из (3.6) получаем

$$y'_N = -C(a-N)^{-(2\alpha-1)b(a-b)^{-1}}(N-b)^{(2\alpha-1)a(a-b)^{-1}}/N^{2\alpha+1}. \tag{3.8}$$

Так как $N^2 = \psi' + \alpha = B_0^{-1}(U-A)^{-2}$, то величина $(U-A)^{-1}$ меняется от $\sqrt{B_0}a$ при $y = 0$ до $\sqrt{B_0}b$ при $y = 1$. Интегрируя уравнение (3.8), получаем соотношение, связывающее горизонтальную скорость U и координату Y:

$$\frac{Y}{A_0} = \frac{\displaystyle\int\limits_0^{(a-b)^{-1}(ab\sqrt{B_0}(U-A)-b)} z^{-(2\alpha-1)b(a-b)^{-1}}(1-z)^{(2\alpha-1)a(a-b)^{-1}}\,dz}{\displaystyle\int\limits_0^1 z^{-(2\alpha-1)b(a-b)^{-1}}(1-z)^{(2\alpha-1)a(a-b)^{-1}}\,dz}. \tag{3.9}$$

Формула (3.9) в силу (3.2) определяет профиль скорости в простой волне $u = u(p(x,t), Y)$. Скорость изменяется от $u = u_1 = (\sqrt{1-\beta})^{-1}p^{(1-\beta)/2}(A + (\sqrt{B_0}a)^{-1})$ на нижней стенке $Y = 0$ до $u = u_2 = (\sqrt{1-\beta})^{-1}p^{(1-\beta)/2}(A + (\sqrt{B_0}b)^{-1})$ на верхней стенке $Y = A_0$. Для выполнения неравенств (3.7) достаточно потребовать $A^2 > (2\alpha+1)^2(\alpha B_0)^{-1}$. Если $A > 0$, то $k > u_{\max} = u_2$ и простая волна обращена вправо, если $A < 0$, то $k < u_{\min} = u_1$ и волна обращена влево. При $\beta = 1/3$ соотношение (3.9) интегрируется в квадратурах: $U = A + 2(a-b)(A_0\sqrt{B_0})^{-1}Y + (a\sqrt{B_0})^{-1}$.

Случай $D = 0$ ($A^2B_0 = 8$) соответствует течению без сдвига $u = (\sqrt{1-\beta})^{-1}(A + (\sqrt{B_0}\alpha)^{-1})$, $v = 0$. Контактные поверхности в этом случае прямолинейны: $Y(\lambda, p) = \mathrm{const} = Y(\lambda, p_0)$.

На рис. 1 приведен профиль горизонтальной скорости для $\beta = 2/3$, $A = 5$, $B_0 = 3$. Формула (3.9) определяет Y/A_0 как функцию от $(u-u_1)/(u_2-u_1)$. На рис. 2 приведены графики зависимости Y/A_0 от величины $(u-u_1)/(u_2-u_1)$ для $|A| = 5$, $B_0 = 3$ и $\beta = 1/3$, $1/5$, $2/3$ (кривые *1*–*3* соответственно). Вертикальная прямая *4* соответствует течению без сдвига ($A^2B_0 = 8$).

В случае центрированной простой волны, когда $k = x/t$, из (3.1) и (3.7) получаем распределение давления в простой волне $p(x,t) = ((1-\beta)A^{-2})^{(1-\beta)^{-1}}(x/t)^{2(1-\beta)^{-1}}$. График распределения давления для $\beta = 2/3$, $A = 5$ представлен на рис. 3.

23

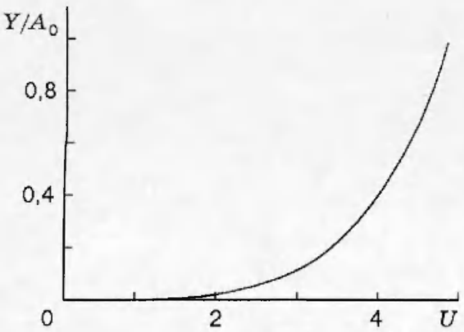

Рис. 1

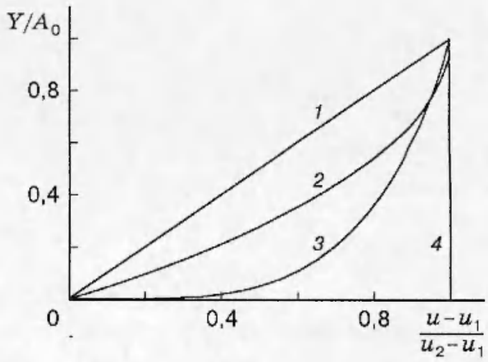

Рис. 2

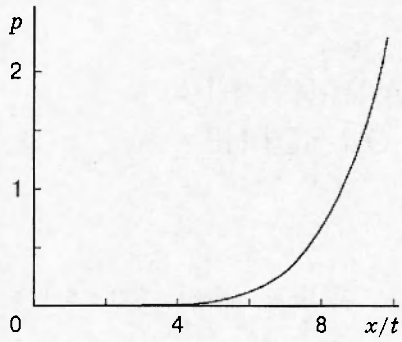

Рис. 3

В итоге установлено, что к любому сдвиговому потоку может примыкать по характеристике простая волна и она в зависимости от свойств монотонности функции $k(p)$ является либо волной сжатия, либо волной разрежения. В среде с постоянной энтропией простая волна разрежения существует для всех $t > 0$, а волна сжатия опрокидывается. Найден класс точных решений системы уравнений длинных волн, которые описывают простые волны, распространяющиеся в баротропном газе со скоростью k.

Автор выражает благодарность профессору В. М. Тешукову за помощь в работе.

Работа выполнена при поддержке интеграционного проекта СО РАН № 43 «Исследование поверхностных и внутренних гравитационных волн в жидкости».

ЛИТЕРАТУРА

1. **Тешуков В. М.** Модель длинноволновой аппроксимации для сдвигового течения газа в канале переменного сечения // ПМТФ. 1998. Т. 39, № 1. С. 15–27.
2. **Тешуков В. М.** О гиперболичности уравнений длинных волн // Докл. АН СССР. 1985. Т. 284, № 3. С. 555–559.
3. **Тешуков В. М.** Длинные волны в завихренной баротропной жидкости // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 6. С. 17–26.
4. **Freeman N. C.** Simple waves on shear flows: Similarity solutions // J. Fluid Mech. 1972. V. 56, N 2. P. 257–263.
5. **Blythe P. A., Kazakia Y., Varley E.** The interaction of large amplitude shallow-water waves with ambient flow // Ibid. P. 241–256.
6. **Тешуков В. М.** Простые волны на сдвиговом потоке идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей // ПМТФ. 1997. Т. 38, № 2. С. 48–57.
7. **Елемесова Б. Н.** Простые волны в слое баротропной завихренной жидкости // ПМТФ. 1997. Т. 38, № 5. С. 56–64.
8. **Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.** Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
9. **Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.** Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978.

Поступила в редакцию 21/IV 1997 г.