УДК 532.5

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАКРИТИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ В НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ ВИХРЯ ПОД СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ ВЕСОМОЙ ЖИДКОСТИ

В. П. Житников, Н. М. Шерыхалина, О. И. Шерыхалин

Уфимский государственный авиационный технический университет, 450000 Уфа

Предложен усовершенствованный метод Леви-Чивиты, в котором учтены особенности искомой функции путем добавления слагаемых, содержащих степенные особенности. Приведены результаты численного исследования нелинейной задачи об обтекании вихря ограниченным потоком идеальной весомой жидкости ($\mathrm{Fr} > 1$). Исследованы предельные режимы течения: волны Стокса с одним и двумя горбами, выход критической точки на поверхность, отрыв вихря от солитона и равномерного потока. Показана возможность образования непериодических волн в локальной зоне вблизи критической точки.

Обтеканием точечного вихря может моделироваться течение около подводного крыла, если его размеры малы по сравнению с расстояниями до дна и свободной поверхности. Эта задача рассмотрена в [1–6]. В данной работе приведены результаты, позволяющие построить общую качественную картину решений солитонного вида для закритических режимов ($\mathrm{Fr} > 1$). Найдены решения, переходящие в предельные с критическими точками на свободной поверхности (типа волны Стокса с изломом поверхности, образующим угол 120° или 360°, или без излома).

1. Постановка задачи. Рассматривается задача об обтекании вихря с интенсивностью Γ, расположенного в точке A под свободной поверхностью, ограниченным потоком идеальной весомой жидкости (рис. 1,*а*). Ускорение свободного падения g направлено вертикально вниз. В критической точке F скорость равна нулю (при $\Gamma > 0$ эта точка расположена выше точки A); h — невозмущенная толщина потока, V_0 — скорость на бесконечности. Форма потока симметрична относительно оси y. Течение полагается потенциальным и соленоидальным, тогда решение задачи можно искать в виде аналитической функции комплексной переменной (комплексного потенциала $w(z)$ [6]). В этом случае значение, комплексно сопряженное скорости, в любой точке $z = x + iy$ потока получается дифференцированием $\bar{V} = dw/dz$. Для определения $w(z)$ необходимо решить краевую задачу. Краевыми условиями для функции $w(z)$ являются условия непротекания $\operatorname{Im} w = 0$ на BD, $\operatorname{Im} w = Q$ на CD ($Q = hV_0$ — расход жидкости в струе).

Поскольку форма свободной поверхности неизвестна, решение можно искать в параметрическом виде $w(\zeta)$, $z(\zeta)$, где ζ — параметрическая переменная, область изменения которой известна, например половина круга единичного радиуса в комплексной плоскости (рис. 1,*б*). Для определения аналитической функции $z(\zeta)$ также решается краевая задача. На прямолинейной границе BD $y = \operatorname{Im} z = 0$. На свободной поверхности CD выполняется уравнение Бернулли

$$(V/V_0)^2 + 2y/(\mathrm{Fr}^2 h) = \mathrm{const} = 1 + 2/\mathrm{Fr}^2, \qquad \mathrm{Fr} = V_0/\sqrt{gh}. \tag{1.1}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Федеральной целевой программы «Государственная поддержка интеграции высшего образования и фундаментальной науки на 1997–2000 гг.».

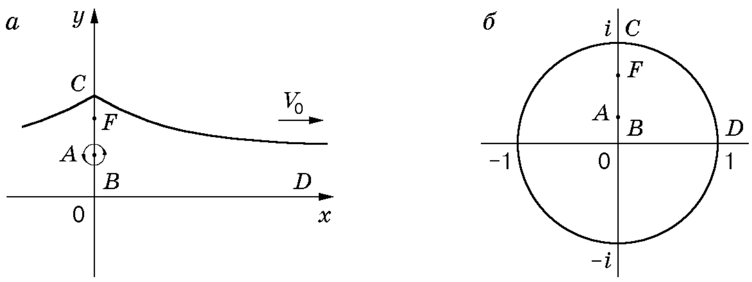

Рис. 1

Зависимость комплексного потенциала w от ζ можно представить в виде [5]

$$w(\zeta) = \frac{2hV_0}{\pi} \ln \frac{1+\zeta}{1-\zeta} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \frac{(\zeta - ip)(\zeta + i/p)}{(\zeta + ip)(\zeta - i/p)}. \tag{1.2}$$

В критической точке F ($\zeta = iq$) комплексная скорость dw/dz равна нулю. Отсюда и из (1.2) следуют равенства

$$\frac{dw}{d\zeta} = \frac{2}{\pi}\Big[\frac{2}{1-\zeta^2} + \frac{\gamma p(1-p^2)}{2} \frac{1-\zeta^2}{(\zeta^2+p^2)(p^2\zeta+1)}\Big] = 0, \qquad \gamma = \frac{\Gamma}{hV_0}; \tag{1.3}$$

$$q = \sqrt{\frac{-[2+2p^4-\gamma p(1-p^2)] + 2(1+p^2)\sqrt{1-p^2}\sqrt{1-p^2-\gamma p}}{4p^2+\gamma p(1-p^2)}}. \tag{1.4}$$

2. Метод прямого конформного отображения. Задача решается усовершенствованным методом Леви-Чивиты с выделением особенностей [7, 8].

Функцию $z(\zeta)$ будем искать в виде суммы степенного ряда и некоторых функций, учитывающих заданные особенности в точках $\zeta = \pm 1$, $\zeta = \pm i$:

$$z(\zeta) = (2h/\pi)[z_0(\zeta) + z_1(\zeta) + z_2(\zeta) + z_3(\zeta)], \tag{2.1}$$

где $z_0(\zeta) = \ln((1+\zeta)/(1-\zeta))$ — функция, отображающая полукруг на полосу; $z_1(\zeta) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} C_{2m+1}\zeta^{2m+1}$ — степенной ряд, коэффициенты которого подбираются так, чтобы выполнялось уравнение Бернулли (1.1); $z_2(\zeta) = A_1[(1-\zeta)^\alpha - (1+\zeta)^\alpha]$ — функция, учитывающая особенности решения $z(\zeta)$ при $\zeta = \pm 1$; $z_3(\zeta) = iA_2[((1+i\zeta)/2)^{2/3} - ((1-i\zeta)/2)^{2/3}]$ — функция, учитывающая особенности в точке излома свободной поверхности ($\zeta = i$). Число α определяется из решения трансцендентного уравнения Стокса

$$\alpha \frac{\pi}{2} \operatorname{ctg}\Big(\alpha \frac{\pi}{2}\Big) = \frac{1}{\mathrm{Fr}^2}, \qquad 0 < \alpha < 1. \tag{2.2}$$

3. Решение с помощью функции Жуковского. Как показали исследования, в некоторых случаях необходим учет особенностей решения более высокого порядка малости. Поэтому решение удобнее искать в виде функции Жуковского

$$\omega = \theta + i\tau = i \ln\Big(\frac{1}{V_0} \frac{dw}{dz}\Big), \tag{3.1}$$

где θ — угол наклона вектора скорости к оси x. Краевым условием для определения функции $\omega(\zeta)$ на свободной поверхности служит уравнение (1.1). На других участках границы имеют место следующие краевые условия: $\theta = 0$ на AB, BD, FC, $\theta = \pi$ на AF (рис. 1,a).

В этом случае конформное отображение ζ на z осуществляется с помощью численного интегрирования

$$z = \frac{1}{V_0}\int \mathrm{e}^{i\omega}\Big(\frac{dw}{d\zeta}\Big)d\zeta. \tag{3.2}$$

Представим $\omega(\zeta)$ в виде суммы

$$\omega(\zeta) = \omega_0(\zeta) + \omega_1(\zeta) + \omega_2(\zeta), \tag{3.3}$$

где

$$\omega_0(\zeta) = i\ln\frac{(\zeta^2+q^2)(p^2\zeta^2+1)}{(\zeta^2+p^2)(q^2\zeta^2+1)} \tag{3.4}$$

($\omega_0(\zeta)$ — функция Жуковского для аналогичной задачи о невесомой жидкости [5]); $\omega_1(\zeta) = i\,\dfrac{1-\zeta^2}{2}\sum\limits_{m=0}^{\infty} C_{2m}\zeta^{2m}$ — степенной ряд, множитель $(1-\zeta^2)/2$ введен для того, чтобы $\omega_1(1) = 0$;

$$\omega_2(\zeta) = iB_1\Big(\frac{1-\zeta^2}{2}\Big)^{\alpha} + iB_2\Big(\frac{1-\zeta^2}{2}\Big)^{2\alpha} + iB_3\Big(\frac{1-\zeta^2}{2}\Big)^{\alpha+1} \tag{3.5}$$

($\omega_2(\zeta)$ — функция, учитывающая особенности решения $\omega(\zeta)$ при $\zeta = 1$ с включением членов более высокого порядка);

$$\omega_3(\zeta) = \frac{i}{3}\ln\frac{1+\zeta^2}{2} + iC_1\Big[\Big(\frac{1+\zeta^2}{2}\Big)^{\beta} - 1\Big] \tag{3.6}$$

($\omega_3(\zeta)$ — функция, введенная для учета особенностей в точке излома свободной поверхности).

Подставляя (3.3) в (1.1) и приравнивая слагаемые одинакового порядка при $\zeta \to 1$, можно убедиться в справедливости уравнения (2.2) для α и определить коэффициенты B_2 и B_3:

$$B_2 = B_1^2(3/2)\operatorname{ctg}^2(\alpha\pi/2), \qquad B_3 = \alpha B_1. \tag{3.7}$$

Подставляя (3.3) в (1.1) при $\zeta \to i$ и приравнивая члены одного порядка, получаем

$$\begin{gathered}\tau_1\frac{\pi}{2} = -C_1 + \sum_{m=1}^{\infty} d_{2m}(-1)^m = \frac{1}{3}\Big[\ln\Big(\frac{3}{\pi}\,\frac{1}{\mathrm{Fr}}\Big) + \ln\Big(1 - \frac{\gamma p}{1-p^2}\Big)\Big],\\ (\beta+1)(\pi/2)\operatorname{ctg}(\beta\pi/2) = 1/\sqrt{3}, \qquad 0 < \beta < 1.\end{gathered} \tag{3.8}$$

4. Численное решение. Задача сводится к решению уравнения (1.1), решать ее будем методом коллокаций [7, 8]. В бесконечной сумме z_1 в уравнении (2.1) сохраняется конечное число N слагаемых, а равенство (1.1) удовлетворяется в дискретных точках $\sigma_m = \pi m/(2N)$, $m = \overline{1, N}$. Полученные N нелинейных уравнений образуют систему, которая решается методом Ньютона с выбором шага [8] по параметрам C_{2m+1}, $m = \overline{0, N-4}$, A_1, A_2, Fr. Этим же способом задача решается в случае использования функции (3.2). Оценка погрешности производится по правилу Рунге путем сравнения значений параметров (например, числа Fr, координаты точки C и др.), полученных при последовательном возрастании N, а также по максимальной невязке $\Delta_{\max}$ уравнения (1.1), рассчитанной в промежуточных точках между узлами коллокаций σ_m.

Для проверки разработанных методов расчета решена задача об уединенной волне с особенностью Стокса [8–11]. Это решение получается при $\gamma = 0$.

Проведен сравнительный анализ трех способов решения задачи: при представлении решения в виде функции $z(\zeta)$ (2.1) или $\omega(\zeta)$ (3.3) с выделением только главных членов особенностей ($B_2 = B_3 = C_1 = 0$) и при использовании выражений (3.5), (3.6). Получены значения числа Fr и других параметров для $N = 5 \div 1280$. Из анализа результатов следует, что в качестве оценки погрешности значения числа Fr можно использовать максимальную невязку уравнения (1.1). При параметрическом исследовании решений задачи это позволяет избежать громоздких расчетов по увеличению N в каждой расчетной точке.

Из численных экспериментов следует, что как по значениям числа Fr, так и по величине погрешности и скорости ее уменьшения при удвоении N результаты, полученные первыми двумя способами, близки. Наибольшая погрешность при вычислении числа Фруда составляет $\Delta_{\mathrm{Fr}} \sim 10^{-7}$.

Учет коэффициентов B_2, B_3, C_1 и равенств (3.7), (3.8) позволяет уменьшить погрешность приблизительно на четыре порядка и существенно ускорить сходимость метода. При этом наибольшая погрешность при вычислении числа Фруда, согласно оценке по правилу Рунге, составляет $\Delta_{\mathrm{Fr}} \sim 10^{-12}$. Результаты решения задачи тремя способами совпали в рамках полученных для каждого способа оценок погрешности.

Сравним значение $\mathrm{Fr} \approx 1{,}290\,890\,455\,863$, полученное путем уточнения по схеме Ричардсона, с известными результатами. Значение числа Фруда, вычисленное в [9], составляет $\mathrm{Fr} \approx 1{,}290\,906$, в [10] — $\mathrm{Fr} \approx 1{,}290\,889$, в [11] — $\mathrm{Fr} \approx 1{,}290\,890\,53$, в [8] — $\mathrm{Fr} \approx 1{,}290\,890\,455$. В первом случае погрешность составляет $1{,}6 \cdot 10^{-5}$, во втором — $1{,}5 \cdot 10^{-6}$, в третьем — $7{,}5 \cdot 10^{-8}$, в четвертом — $8 \cdot 10^{-10}$.

5. Анализ результатов. На рис. 2 представлены зависимости 1/Fr от ординаты y_C точки C (см. рис. 1) для различных значений интенсивности вихря γ ($y_C < 1$ при $\gamma = 0{,}125$; $0{,}25$; $0{,}375$; $0{,}5$; $0{,}625$; $y_C > 1$ при $\gamma = -0{,}5$; -1; $-1{,}5$; -2; -3; -5; -6; -7; -8; -10; -20; $y_C > 1$ (второе решение) при $\gamma = 0$; 1; 2). Значения координат x и y на графиках нормированы на величину h. Высота расположения вихря $y_A = 0{,}5$. В области $y_C < 1$ находятся решения со впадиной (вместо горба) при $\gamma > 0$. Видно, что для $0 < \gamma < 0{,}5$ кривая $\gamma = \mathrm{const}$ состоит из двух кривых, одна из которых начинается на прямой $\mathrm{Fr} = \infty$ и заканчивается на прямой $\mathrm{Fr} = 1$, другая начинается на прямой $\mathrm{Fr} = 1$ (второе решение), а заканчивается на кривой a, соответствующей предельному режиму выхода критической точки F на свободную поверхность. Формы свободной поверхности для $\gamma = 0{,}5$ при $y_C = 0{,}82$ ($\mathrm{Fr} = \infty$); $0{,}75$; $0{,}65$; $0{,}51$ показаны на рис. 3,*а* (кривые *1*).

Формулы для расчета предельного режима выхода критической точки F на свободную поверхность можно получить из (1.4), (3.4) при $q \to 1$:

$$p = \frac{\sqrt{\gamma^2 + 4} - \gamma}{2}, \qquad \omega_0(\zeta) = i \ln \frac{p^2 \zeta^2 + 1}{\zeta^2 + p^2}. \tag{5.1}$$

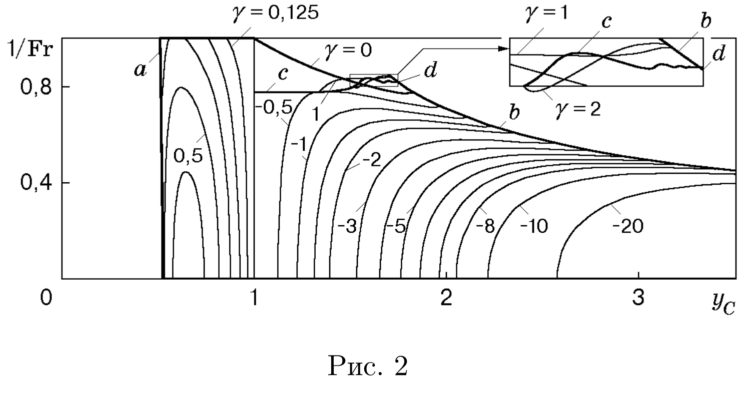

Рис. 2

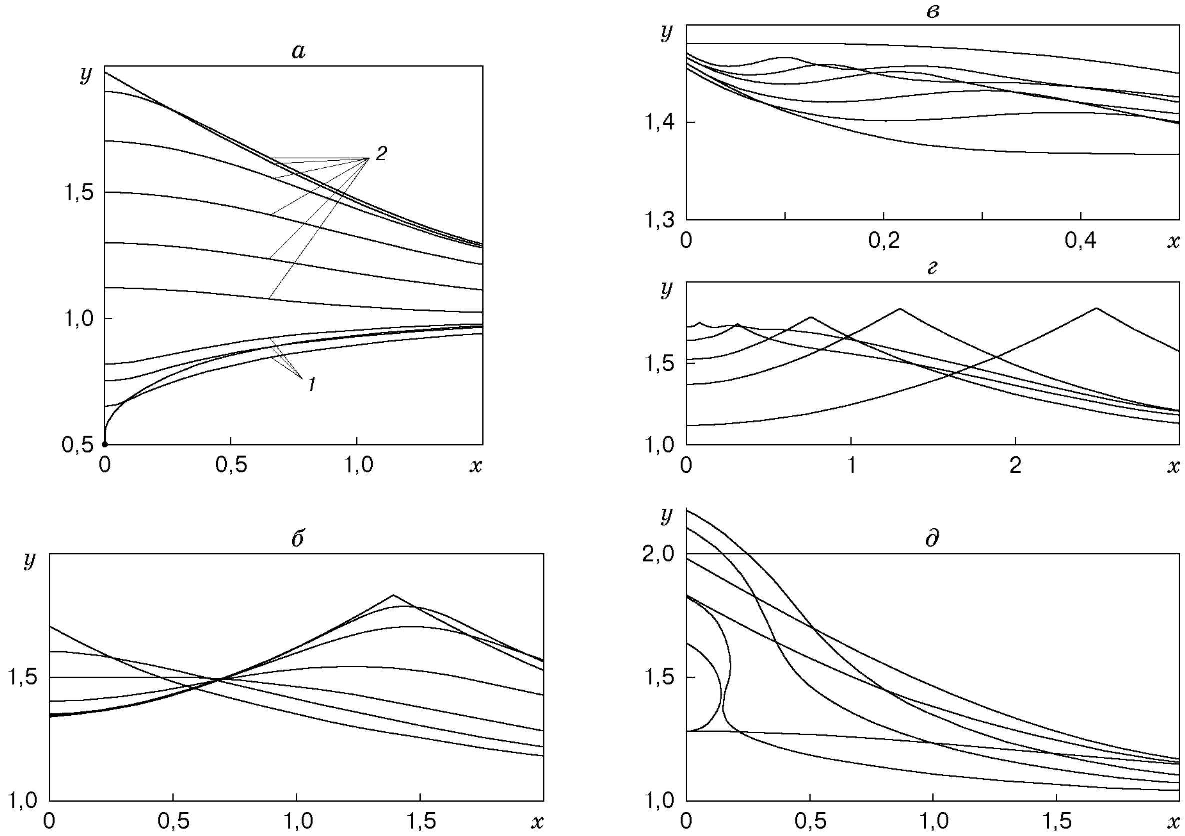

Рис. 3

Отметим, что в этом предельном случае скорость в точке C не равна нулю, т. е. при выходе на поверхность критическая точка исчезает. Течение при этом располагается на двулистной римановой поверхности, а вектор скорости при переходе по свободной поверхности через точку C меняет направление на угол 2π. В частном случае такое течение имеет место при $\mathrm{Fr} = \infty$. Функция ω_0 (5.1) есть точное решение этой задачи.

Все решения, рассмотренные выше, не имеют особенности Стокса на свободной поверхности, поэтому слагаемые z_3 и ω_3 при расчете исключаются из соответствующих сумм (2.1), (3.3).

Кривые $\gamma = \mathrm{const} < 0$ (см. рис. 2; $y_C > 1$) начинаются на прямой, соответствующей предельному значению $\mathrm{Fr} = \infty$ (обтекание вихря невесомой жидкостью), и заканчиваются на предельной кривой, соответствующей волне с особенностью Стокса (кривая b на рис. 2). Соответствующие формы свободной поверхности для $\gamma = -0{,}5$ при $y_C = 1{,}12$ ($\mathrm{Fr} = \infty$); 1,3; 1,5; 1,7; 1,9; 1,95 приведены на рис. 3,*а* (кривые *2*).

Решение $\gamma > 0$ с горбами на свободной поверхности начинается с предельного режима типа волны Стокса (кривая b на рис. 2), а заканчивается волной Стокса с двумя горбами (см. рис. 2, кривые для $\gamma = 1$; 2; рис. 3,*б*). Предельная кривая, соответствующая режимам с двумя горбами (кривая c на рис. 2), начинается при $\gamma = 0$ ($y_C = 1$), а заканчивается, соединяясь с крайней точкой кривой b и образуя новый нестоксовский предельный режим с критической точкой в вершине горба без излома свободной поверхности (кривая d на рис. 2). При приближении к этому пределу на свободной поверхности образуются волны, количество которых растет, а амплитуда уменьшается (рис. 3,*в*). Значение γ, при котором достигается этот предел, является максимальным при данном y_A. При уменьшении γ происходит увеличение расстояния между горбами (рис. 3,*г*), и при $\gamma \to 0$ обе волны уходят в бесконечность, между ними образуется равномерный поток.

Нестоксовское течение с критической точкой в вершине волнового горба рассчитывается по формуле (3.3), где

$$\omega_0(\zeta) = i \ln \frac{p^2\zeta^2+1}{\zeta^2+p^2} + 2i \ln \frac{1+\zeta^2}{2}, \qquad z_3 = \omega_3 = 0.$$

В отличие от (5.1) точка C является критической, однако свободная поверхность при этом остается гладкой.

Течение с двумя стоксовскими волнами рассчитывается путем добавления слагаемого ω_3, аналогичного (3.6):

$$\omega_3 = \frac{i}{3} \ln \frac{1-2\zeta^2\cos 2\sigma_0+\zeta^4}{4\sin^2\sigma_0} + iC_1\Big[\Big(\frac{1-2\zeta^2\cos 2\sigma_0+\zeta^4}{4\sin^2\sigma_0}\Big)^\beta - 1\Big],$$

имеющего особенность в точке окружности $\zeta = \mathrm{e}^{i\sigma_0}$, положение которой определяется при расчете.

Множество решений задачи об обтекании вихря представляет собой трехпараметрическое семейство кривых. Для того чтобы достаточно полно исследовать решения и отобразить их на графике, недостаточно одного сечения с $y_A = 0{,}5$, рассмотренного выше (см. рис. 2). Как минимум необходимо рассмотреть еще сечения с $\gamma = \mathrm{const}$. Как показали исследования, кривые $1/\mathrm{Fr}(y_C)$ для $\gamma > 0$ подобны кривым, изображенным на рис. 2. На рис. 4 приведены зависимости параметров при различных y_A, соответствующие значению $\gamma = -0{,}5$. При $y_A \leqslant 1$ кривые начинаются на прямой, соответствующей предельному значению $\mathrm{Fr} = \infty$, и заканчиваются на предельной кривой типа волны Стокса. Для некоторого $y_A^* > 1$ кривые (для каждого y_A) состоят из двух кривых (например, кривая $y_A = 1{,}25$), одна из которых, как и для $y_A \leqslant 1$, начинается на прямой, соответствующей $\mathrm{Fr} = \infty$, и заканчивается волной Стокса, другая также начинается на прямой, соответствующей $\mathrm{Fr} = \infty$ (второе решение), а заканчивается предельными режимами с отделением вихря от солитона (кривая a на рис. 4) или от равномерного потока (кривая b). При увеличении y_A два решения при $\mathrm{Fr} = \infty$ сливаются и исчезают, а две кривые объединяются в одну (кривая $y_A = 1{,}5$ на рис. 4).

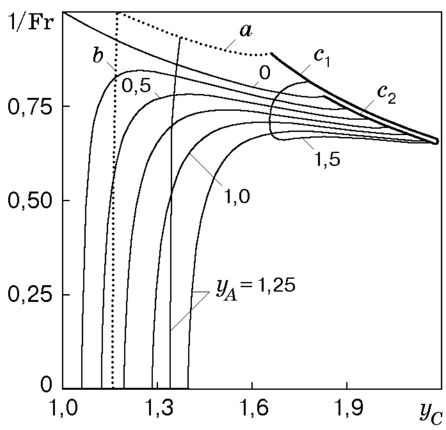

Рис. 4

Формы свободной поверхности для волн типа Стокса для $\gamma = -0{,}5$ при $y_C = 1{,}82$ ($y_A = 0$); 1,98; 2,16; 2,10; 1,823; 1,63 показаны на рис. 3,*д*. На рис. 4 этим решениям соответствует кривая c (волна с особенностью Стокса). Следует отметить, что для волн Стокса (см. (1.1)) $y_C/h = 1 + \mathrm{Fr}^2/2$, но на рис. 4 для наглядности кривая c изображена состоящей из двух несовпадающих кривых c_1 и c_2.

Решим предельную задачу об отделении вихря (см. рис. 4), в которой $w = aV_0'\gamma'/(\pi i)\ln\zeta$ — комплексный потенциал, $\gamma' = \Gamma/(aV_0')$; a — расстояние от нижней точки вихревого течения до вихря; V_0' — скорость жидкости в нижней точке. Используя выражение (3.3) при $\omega_0(\zeta) = -i\cdot 2\ln\zeta - \pi$, $\omega_2 = 0$, находим локальное значение числа Фруда $\mathrm{Fr}' = V_0/\sqrt{ga}$. Затем определяем значение

$$\gamma' = \Big(-\frac{1}{\pi}\int\limits_1^0 \mathrm{e}^{i\omega(\zeta)}\,\frac{d\zeta}{\zeta}\Big)^{-1}.$$

Отметим, что впервые решение задачи о замкнутом циркуляционном течении для достаточно больших Fr' найдено в [12].

Далее, используя известное решение о солитоне на свободной поверхности [8] в виде зависимости $\mathrm{Fr}(V_0'/V_0)$, решаем нелинейное уравнение

$$(V_0'/V_0)^{3/2}\mathrm{Fr}(V_0'/V_0) = \sqrt{\gamma/\gamma'}\,\mathrm{Fr}', \tag{5.2}$$

тем самым устанавливая связь между солитоном и вихревым течением. Отметим, что уравнение (5.2) имеет решение, только если $\sqrt{\gamma/\gamma'}\,\mathrm{Fr}' \leqslant 1$. В противном случае имеет место отделение вихря от равномерного потока. При этом $V_0' = V_0$, а значение числа Фруда $\mathrm{Fr} = \sqrt{\gamma/\gamma'}\,\mathrm{Fr}'$.

На рис. 2, 4 изображены только решения с $\mathrm{Fr} \geqslant 1$. Наряду с этим описанными выше методами были получены и решения солитонного типа при $\mathrm{Fr} < 1$ (см. [3, 4]). Однако, поскольку при $\mathrm{Fr} < 1$ уравнение (2.2) не имеет решений, условием их существования является выполнение равенств $A_1 = 0$, $B_1 = 0$, т. е. отсутствие степенных особенностей, показатель которых находится в диапазоне $0 < \alpha < 1$. В этом случае асимптотическое поведение решения определяется следующим по порядку решением трансцендентного уравнения (2.2) при $2 < \alpha < 3$, которое возможно для всех значений числа Fr.

6. Выводы. В данной работе проведено численное исследование задачи об обтекании вихря потоком весомой жидкости. Описаны предельные режимы течения. Особый интерес представляют решения с волнами на поверхности жидкости при $\mathrm{Fr} > 1$, ранее для таких решений характерным считался диапазон чисел Фруда $\mathrm{Fr} < 1$ (докритические режимы [4]).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Salvesen N., Kerczek C.** Non-linear aspect of subcritical shallow-water flow past two-dimensional obstructions // J. Ship Res. 1978. V. 22, N 4. P. 203–211.
2. **Liao S. J.** A general numerical method for solution of gravity wave problems. Pt 2. Steady non-linear gravity waves // Intern. J. Numer. Methods Fluids. 1992. V. 14, N 10. P. 1173–1191.
3. **Tuck E. O.** Ship-hydrodynamics free-surface problems without waves // J. Ship Res. 1991. V. 35, N 4. P. 277–287.
4. **Маклаков Д. В.** Нелинейные задачи потенциальных течений с неизвестными границами. М.: Янус-К, 1997.
5. **Житников В. П., Шерыхалин О. И.** О решениях солитонного вида в докритических течениях весомой жидкости при наличии источника и вихря // Гидродинамика больших скоростей: Тр. VI Всерос. науч. шк., Чебоксары, 27 мая – 5 июня 1996 г. Чебоксары: Чуваш. ун-т, 1996. С. 63–67.
6. **Гуревич М. И.** Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979.
7. **Житников В. П.** Гравитационные волны на ограниченном участке поверхности жидкости // ПМТФ. 1996. Т. 37, № 2. С. 83–89.
8. **Шерыхалина Н. М.** Разработка численных алгоритмов решения задач гидродинамики с особыми точками на свободной поверхности и экспериментальное исследование скорости их сходимости / Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т. Уфа, 1995. Деп. в ВИНИТИ 6.06.95, № 2550-В95.
9. **Hunter J. K., Vanden-Broek J.-M.** Accurate computations for steep solitary waves // J. Fluid Mech. 1983. V. 136. P. 63–71.
10. **Williams J. M.** Limiting gravity waves in water of finite depth // Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1981. V. 302, N 1466. P. 139–188.
11. **Evans W. A. B., Ford M. J.** An exact integral equation for solitary waves (with new numerical results for some internal properties) // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1996. V. 452. P. 373–390.
12. **Маклаков Д. В.** Струйное циркуляционное течение тяжелой жидкости внутри или вне круга // Тр. семинара по краевым задачам. Казань, 1975. Вып. 12. С. 161–171.

Поступила в редакцию 14/VII 1998 г.,
в окончательном варианте — 20/XI 1998 г.