ЛИТЕРАТУРА

1. **Эшелби Дж.** Континуальная теория дислокаций.— М.: ИЛ, 1963.
2. **Шермергор Т. Д.** Теория упругости микронеоднородных сред.— М.: Наука, 1977.
3. **Hill R.** Elastic properties of reinforced solids: some theoretical principles/J. Mech. Phys. Solids.— 1963.— V. 11, N 5. Рус. пер. // Механика: Сб. пер.— 1964.— № 5.
4. **Hashin Z., Shtrikmen S.** On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elasticity/J. Mech. Phys. Solids.— 1962.— V. 10, N 4.
5. **Болотин В. В., Москаленко В. Н.** К расчету макроскопических постоянных сильно изотропных композиционных материалов//Изв. АН СССР. МТТ.— 1969.— № 3.
6. **Хорошун Л. П., Маслов Б. П.** Методы автоматизированного расчета физико-механических постоянных композиционных материалов.— Киев: Наук. думка, 1980.
7. **Волков С. Д., Ставров В. П.** Статистическая механика композитных материалов.— Минск: БГУ, 1978.

г. Свердловск *Поступила 15/VIII 1988 г.*

УДК 519.6:532,5

В. М. Белолипецкий, В. Ю. Костюк

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЦИРКУЛЯЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЙ В ТРЕХМЕРНОЙ КАВЕРНЕ

Рассматривается задача о течении вязкой несжимаемой жидкости в трехмерной полости, инициируемом движущейся верхней крышкой. Численное решение уравнений Навье — Стокса ищется на сетке с разнесенными скоростями в переменных векторный потенциал — вихрь. Численно получены новые структуры — угловые вихри и вихри типа Тейлора — Гертлера, присущие трехмерным течениям. Исследована зависимость характера течения от числа Рейнольдса Re и от отношения ширины полости к глубине.

Пространственные эффекты в ряде случаев могут существенно влиять на картину течения несжимаемой жидкости. Поэтому решения, полученные при использовании двумерных приближений, значительно отличаются от экспериментальных данных. Типичный пример — задача о течении вязкой несжимаемой жидкости в трехмерной полости с подвижной верхней крышкой. Применение двумерных уравнений Навье — Стокса предполагает, что ширина полости L (рис. 1) много больше ее глубины H. В известных экспериментах [1, 2] отношение ширины к глубине выемки изменялось от 1 до 3. Наличие торцевых стенок и ограниченность ширины выемки вызывают значительную перестройку течения в сравнении с плоским случаем. В [3, 4] выполнены численные расчеты течений вязкой жидкости в кубической каверне с помощью псевдоспектрального и неявного многосеточного методов.

Постановка задач о течении жидкости в дву- и трехмерной выемках с движущейся крышкой. Для тестирования различных численных алгоритмов типичной является задача о двумерном течении жидкости в полости прямоугольного сечения с движущейся крышкой [5, 6]. Рассматривается течение вязкой несжимаемой жидкости в прямоугольной области длиной B и глубиной H. В начальный момент времени жидкость покоится, а верхняя крышка приводится в движение с постоянной скоростью u_0. На границах каверны задаются условия прилипания. Требуется определить картину стационарного ламинарного течения в зависимости от Re.

Для течений в трехмерной каверне задача ставится следующим образом. Решение ищется в области D (рис. 1):

$$D = \{(x, y, z): 0 \leqslant x \leqslant B,\ 0 \leqslant y \leqslant H,\ 0 \leqslant z \leqslant L\}.$$

Подвижная крышка ($y = 0$) движется справа налево. Граничные условия: $u(x, 0, z) = 1$, $v(x, 0, z) = w(x, 0, z) = 0$ при $y = 0$; на остальных границах составляющие вектора скорости u, v, w равны нулю. Начальные условия выбираются либо как покой ($u = v = w = 0$), либо используются значения искомых параметров при некотором меньшем Re.

Описание алгоритма расчета. В данной работе для изучения течений вязкой несжимаемой жидкости уравнения записываются в переменных векторный потенциал — вихрь. Применяется численный алгоритм, который обеспечивает на каждом шаге по времени соленоидальность вектора вихря и не требует постановки для него граничных условий на твердой поверхности [7, 8].

При решении задач о течении несжимаемой жидкости большое значение имеет вопрос нахождения правильных вихревых характеристик. Рекомендуется применять консервативные разностные схемы [9]. Оказывается, что при аппроксимации уравнения импульсов (в двумерном случае), содержащего только конвективные члены $\partial\mathbf{V}/\partial t + (\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V} = 0$, некоторыми консервативными разностными схемами (Лакса—Вендроффа, «с донорными ячейками», Мак-Кормака), оставляющими без изменений суммарный импульс в области, не обеспечивается сохранение вихря скорости, вносятся фиктивные источники и стоки вихря [10]. Схемы, сохраняющие вихрь при конвективном переносе, назовем ω-консервативными. Предлагается использовать уравнение импульсов в форме Громеки—Лэмба, для которой все дивергентные схемы ω-консервативные. В данной работе применяется схема Мак-Кормака для уравнений в форме Громеки—Лэмба.

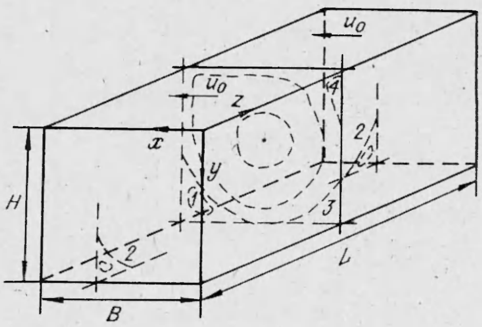

Рис. 1

Результаты расчетов двумерных течений. Важными характеристиками течений в двумерной выемке являются координаты центра вихря и интенсивность циркуляционного течения ψ_{max}. В табл. 1 приводится сравнение найденных значений интенсивности основного циркуляционного течения в квадратной выемке ($B=H$) с «эталонными» решениями [6]. Хорошо согласуются профили скоростей. Например, в сечении $x = B/2$ для $\mathrm{Re} = 1000$, 5000 по результатам расчетов данной работы $u_{max} = 0{,}372$; 0,412, «эталонные» значения максимальной скорости соответственно равны 0,383; 0,436. При измельчении сетки наблюдается сходимость решения к «эталонному». Так, на сетке 80×80 ячеек отклонение найденных решений от «эталонных» по всем параметрам не превосходит 2 %. Использование ω-неконсервативных схем приводит к заметному снижению интенсивности циркуляционного течения (при Re = 1000 на 12 %, Re = 5000 на 30 %) и к искажению профилей скорости в сечениях $x = B/2$ и $y = H/2$.

Проведены расчеты стационарного потока в полости квадратного сечения с заданной скоростью на верхней границе в виде [5] $u = -16\, x^2 \times (1 - x)^2$. В табл. 2 сравниваются значения ψ_{max}, $\max\limits_{y} u(0{,}5, y)$, $\int_0^1 \omega\,(x, 1)dx$ для $\mathrm{Re} = 400$, $\Delta x = \Delta y = 1/20$, полученные авторами с использованием схемы Мак-Кормака, с данными расчетов [5]. Из схем второго порядка [5] представлена схема с более точными результатами. Видно, что данные расчетов по предлагаемому алгоритму ближе к результатам по эрмитову методу четвертого порядка по сравнению с другими, описанными в [5].

Таблица 1

Re	Сетка	ψ_{max}	Источник
1000	128×128 40×40	0,118 0,112	[6] Данная работа
3200	128×128 40×40	0,120 0,109	[6] Данная работа
5000	257×257 60×60	0,119 0,1045	[6] Данная работа

Таблица 2

Метод расчета	Ψ_{max}	$\max\limits_{y} u\ (0{,}5,\ y)$	$\int_0^1 \omega\ (x,\ 1)\ dx$
Схема второго порядка [5]	0,075	0,188	6,94
Эрмитов метод четвертого порядка [5]	0,0844	0,229	8,10
Метод данной работы	0,0784	0,202	7,12

Результаты расчетов течений в трехмерной выемке. Подробные данные экспериментальных исследований течений в трехмерной каверне с движущейся крышкой приводятся в [1, 2]. Основное внимание в этих работах уделяется изучению течения в области заднего вторичного вихря *1*, специфических трехмерных образований — угловых вихрей *2* (рис. 1), вихрей типа Тейлора-Гертлера (ТГ, рис. 2).

Численные расчеты выполнены на равномерной сетке с шагами по пространству $\Delta = \Delta x = \Delta y = \Delta z = 1/16$. Отдельные результаты получены на сетке с шагом $\Delta = 1/32$. Поле скоростей в плоскости симметрии определяется составляющей z векторного потенциала, значения которой используются для сравнения с двумерными расчетами. Численное моделирование проведено для различных Re при $B = H$, $L/H = 1,\ 2,\ 3$. Оно показало, что динамика поля скоростей в области D зависит от отношения L/H и от Re. В двумерном случае для $\mathrm{Re} \leqslant 10^4$ у задачи есть стационарное решение. Однако в трехмерном случае с ростом Re и отношения L/H реализуются нестационарные режимы.

Случай $L/H = 1$. Для $\mathrm{Re} = 100$ характер течения в плоскости симметрии такой же, как и при $L/H = \infty$, однако интенсивность основной циркуляционной зоны меньше на 11 % при $\Delta = 1/16$, на 12 % при $\Delta = 1/32$; задний *1* и передний *3* вторичные вихри (ЗВВ и ПВВ) имеют большие размеры и интенсивность. Поперечные течения слабые: на сетке с $\Delta = 1/16$ $W = \max\limits_{D} w = 0{,}058$, с $\Delta = 1/32$ $W = 0{,}061$; угловых вихрей не обнаружено. При $\mathrm{Re} = 1000$ интенсивность трехмерного течения в плоскости симметрии на 39 % меньше, чем в плоском случае при $\Delta = 1/16$, на 42 % — при $\Delta = 1/32$, что вызвано не только прилипанием на торцевых стенках, но и возросшими поперечными движениями ($W = 0{,}133$; $0{,}151$ для $\Delta = 1/16$; $1/32$), а также появлением угловых вихрей в сечениях $x = B/2$; $3B/4$. Размеры ЗВВ и ПВВ меньше, чем при $\mathrm{Re} = 100$.

Для $\mathrm{Re} = 2000$ происходит дальнейшее ослабление интенсивности циркуляционного течения в плоскости симметрии по сравнению с вариантом $L/H = \infty$ на 46 % при $\Delta = 1/16$, на 52 % при $\Delta = 1/32$. Размеры ЗВВ и ПВВ в плоскости симметрии уменьшаются по сравнению со случаем $\mathrm{Re} = 1000$, что согласуется с экспериментальными наблюдениями, описанными в [1]. Эти тенденции имеют место до $\mathrm{Re} = 3300$. Во всех вариантах решение выходит на стационарный режим.

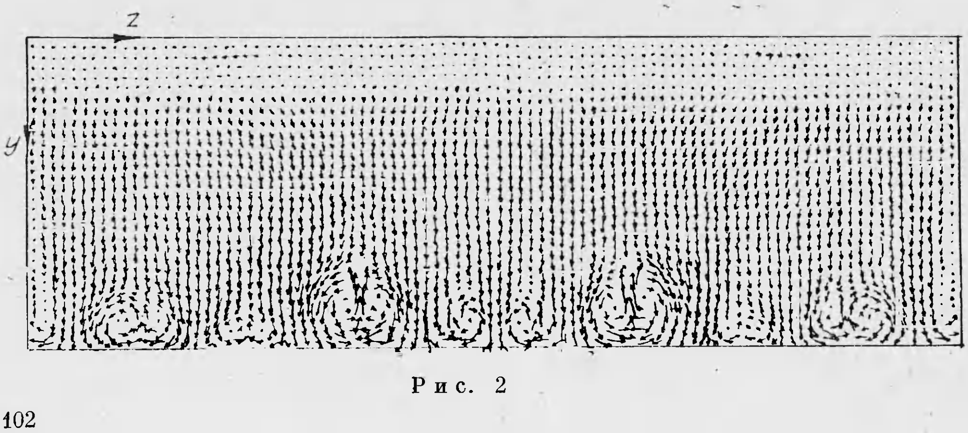

Рис. 2

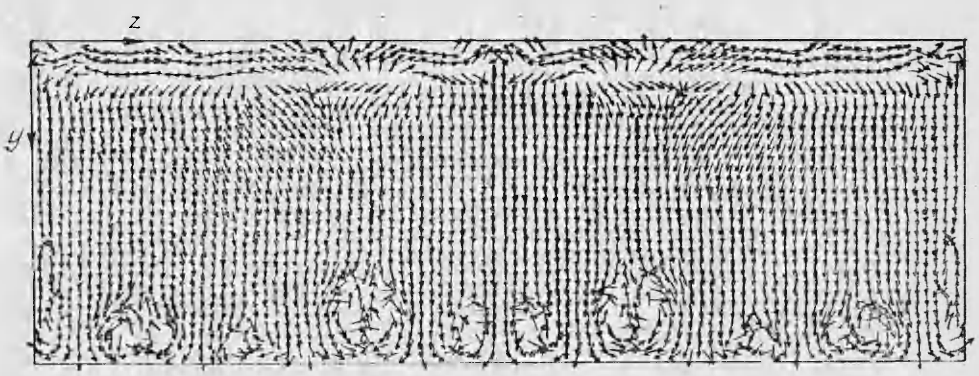

Рис. 3

Случай $L/H = 2$. При Re = 1000 интенсивность течения в плоскости симметрии на 26 % меньше по сравнению с двумерным вариантом ($\Delta = 1/16$). По отношению к варианту $L/H = 1$ возрастают размеры и интенсивность угловых вихрей. Решение выходит на стационарный режим. При Re = 3300 в сечениях $x = 3B/4$ и $y = 3H/4$ образуются вихри типа ТГ, которые с течением времени меняют положение и форму. Для $\Delta = 1/16$ в разные моменты времени имеются от 2 до 5 таких вихрей, для $\Delta = 1/32$ появляются еще один-два небольших вихря малой интенсивности. Возникновение вихрей типа ТГ связывают с искривлением линий тока вблизи ПВВ и ЗВВ и с наличием поперечных сдвиговых напряжений [2]. Изучение полей скорости, полученных с помощью численного моделирования, позволило установить, что такие образования появляются только в зонах расположения вторичных вихрей. Наблюдается сильное влияние вихрей типа ТГ на размер и интенсивность вторичных течений. Это сказывается в периодическом изменении размеров ЗВВ и ПВВ в различных сечениях $z = \text{const}$, что есть следствие зарождения и разрушения вихрей типа ТГ в примыкающих к сечениям участках. Изменения размеров ЗВВ и ПВВ отмечены в экспериментах [2]. Ослабление интенсивности течения в плоскости симметрии по сравнению с двумерным вариантом составляет 42 % при $\Delta = 1/16$ и 45 % при $\Delta = 1/32$. Оно вызвано оттоком части энергии в усилившееся поперечное движение ($W = 0{,}32$) и в образование описанных выше вихревых структур. Режим течения нестационарный.

Случай $L/H = 3$. Для Re = 1000 в плоскости $x = B/2$ образуется интенсивный поток жидкости вдоль оси z, размеры угловых вихрей растут по отношению к случаю $L/H = 2$, решение стационарное. При Re $\geqslant$ 2000 течение становится нестационарным, в различных сечениях $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$ возникают и исчезают вихри типа ТГ. На рис. 2 приведено поле скоростей v, w в сечении $x = 3B/4$ для Re = 3300, отнесенных к максимальному значению скорости в указанном сечении. На рис. 3 нанесены только направления скоростей.

На рисунках отчетливо видны вихри типа ТГ и угловые вихри. Подобная структура течения наблюдается в экспериментах [2], где отмечаются периодическое возникновение и исчезновение указанных вихревых образований, изменение во времени размеров и интенсивности ЗВВ и ПВВ. Там же установлено ослабление интенсивности течения в плоскости симметрии на 30 % по сравнению с данными двумерных расчетов [6]. По результатам расчетов авторов интенсивность течения в плоскости симметрии меньше, чем в двумерном случае, в среднем на 31 %.

Подробный анализ результатов численного эксперимента позволил обнаружить наличие вихрей типа ТГ и в области верхнего вторичного вихря *4* (см. рис. 1) при $L/H = 3$ и Re = 3300.

Проведенные расчеты показали, что для фиксированного отношения L/H течение в пространственной полости с увеличением Re становится нестационарным, появляются новые вихревые структуры — вихри типа Тейлора—Гертлера, количество и интенсивность которых возрастают с увеличением Re. С ростом отношения ширины полости к глубине от 1 до 3 при фиксированном Re влияние торцевых стенок на интенсивность циркуляционного течения в плоскости симметрии ослабевает, а интенсивность поперечных движений увеличивается.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Kosseff J. R., Street R. L.** On end wall effects in a lid-driven cavity flow // J. Fluids Engng.— 1984.— V. 106, N 4. Рус. пер. О влиянии торцевых стенок на течение в каверне с движущейся крышкой // Тр. Амер. о-ва инж.-мех. Сер. Теор. основы инж. расчетов.— 1984.— Т. 106, № 4.
2. **Kosseff J. R., Street R. L.** The lid-driven cavity flows: a synthesis of qualitative and quantitative observations // Ibid. Рус. пер. Течение в каверне с движущейся крышкой // Там же.
3. **Ku H. C., Hirsh R. S., Taylor T. D.** A pseudospectral method for solution of the three-dimensional incompressible Navier—Stokes equations // J. Comput. Phys.— 1987.— V. 70, N 2.
4. **Vanka S. P.** Block-implicit multigrid calculation of three-dimensional recirculating flows // Numer. Meth. Therm. Probl. Pt 1: Proc. 4th Intern. conf., Swansea, 1985.
5. **Peyret R., Taylor T. D.** Computational methods for fluid flow.— Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer-Verlag, 1983. Рус. пер. Вычислительные методы в задачах механики жидкости.— Л.: Гидрометеоиздат, 1986.
6. **Ghia V., Ghia K. N., Shin C. T.** High-Re solutions for incompressible flow using the Navier — Stokes equations and a multigrid method // J. Comput. Phys.— 1982.— V. 48, N 3.
7. **Белолипепкий В. М., Костюк В. Ю.** Численное моделирование стратифицированных течений несжимаемой жидкости в переменных векторный потенциал — вихрь // Применение ЭВМ в моделировании задач математической физики.— Красноярск: ВЦ СО АН СССР, 1985.
8. **Белолипецкий В. М., Костюк В. Ю.** Численное решение задачи протекания для системы уравнений неоднородной жидкости // ЧММСС.— Новосибирск, 1986.— Т. 17, № 2.
9. **Самарский А. А., Попов Ю. П.** Разностные схемы газовой динамики.— М.: Наука, 1975.
10. **Костюк В. Ю.** Эквивалентность разностных схем для уравнений несжимаемой жидкости в переменных скорость—давление и функция тока—вихрь // Математические модели и методы решения задач механики сплошной среды.— Красноярск: ВЦ СО АН СССР, 1986.

г. Красноярск *Поступила 14/IV 1987 г., в окончательном варианте — 24/X 1988 г.*

УДК 532.546

М. Х. Хайруллин

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПАРАМЕТРОВ МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛАСТОВ

Задача об определении коллекторских свойств многослойного нефтяного пласта принадлежит к классу обратных задач подземной гидромеханики, она является некорректно поставленной и нелинейной [1, 2]. Вопросы существования и единственности решения этой задачи в случае радиальной фильтрации при наличии перетоков через слабопроницаемый пласт и инфильтрацию изучались в [3]. В [4] рассматривалась задача об определении коллекторских свойств монопласта на основе метода регуляризации А. Н. Тихонова. Настоящая работа — ее обобщение на случай многослойного пласта при наличии перетоков через слабопроницаемые перемычки.

1. Большинство нефтяных месторождений имеет слоистое строение, обусловленное особенностями процесса осадконакопления. Если отношение коэффициентов проницаемостей двух соседних пропластков меньше 10^{-3}, то применима схема Мятиева—Гиринского [1, 2]. При постановке обратной задачи будем предполагать известной постановку прямой задачи. По схеме Мятиева—Гиринского задача об определении полей давлений $p_1 = p_1(x, y)$ и $p_2 = p_2(x, y)$ в пласте с непроницаемыми кровлей и подошвой, разделенном слабо проницаемой перемычкой, при одновременно