О СОХРАНЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ КАРТИНЫ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ ПРИ ПОЯВЛЕНИИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА

В. А. Сыровой

(Москва)

В работе [1] для установления условий сохранения геометрической картины электростатического поля при появлении пространственного заряда ρ исследовалось уравнение Пуассона. Представляет интерес рассмотреть полную систему уравнений пучка и сделать определенные заключения о системах координат, в которых эквипотенциальные поверхности задаются уравнениями $x^1 = \mathrm{const}$ при $\rho \neq 0$.

Моноэнергетический регулярный [2] нерелятивистский пучок заряженных частиц с одним и тем же значением и знаком удельного заряда η в стационарном случае при отсутствии внешнего магнитного поля описывается системой уравнений, которая в произвольной криволинейной системе координат x^i $(i = 1, 2, 3)$ имеет вид

$$g^{ik} v_i v_k = 2\varphi \qquad e^{ikl} \partial v_i / \partial x^k = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g} g^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \right) = \rho, \qquad \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g} g^{ik} \rho v_k \right) = 0 \tag{1}$$

Здесь v_i — ковариантные компоненты скорости, φ — скалярный потенциал, ρ — плотность пространственного заряда. Уравнения (1) записаны в безразмерных переменных r°, V°, φ°, ρ° (r, V — модули радиуса-вектора и вектора скорости)

$$r = ar^\circ, \qquad V = UV^\circ, \qquad \varphi = -\frac{U^2}{\eta} \varphi^\circ, \qquad \rho = \frac{U^2}{4\pi\eta a^2} \rho^\circ$$

причем символ безразмерной величины опущен; a, U — постоянные, имеющие размерность длины и скорости соответственно.

Потенциальность вектора скорости позволяет свести систему (1) к одному нелинейному дифференциальному уравнению четвертого порядка относительно действия W [3,4]

$$\frac{\partial}{\partial x^m} \left\{ g^{mn} \frac{\partial W}{\partial x^n} \frac{\partial}{\partial x^j} \left[\sqrt{g} g^{jl} \frac{\partial}{\partial x^l} \left(g^{ik} \frac{\partial W}{\partial x^i} \frac{\partial W}{\partial x^k} \right) \right] \right\} = 0$$

$$v_i = \frac{\partial W}{\partial x^i} \tag{2}$$

Поставим вопрос об отыскании в эвклидовом пространстве (см. [5])

$$R^p_{\cdot rst} = 0 \tag{3}$$

систем координат x^i $(i = 1, 2, 3)$, в которых $\varphi = \varphi(x^1)$. Ограничимся рассмотрением ортогональных систем на плоскости, заданных уравнениями

$$x^1 = \operatorname{Re} f(z), \quad x^2 = \operatorname{Im} f(z) \qquad (z = x + iy)$$

В этом случае

$$g_{11} = g_{22} = \sqrt{g}$$

Наиболее общий вид физических компонент скорости v_{x^i} $(i = 1, 2)$, удовлетворяющих интегралу энергии при $\varphi = \varphi(x^1)$, определяется выражениями

$$v_{x^1} = \sqrt{g^{11}} v_1 = \sqrt{2\varphi} \sin\vartheta, \qquad v_{x^2} = \sqrt{g^{22}} v_2 = \sqrt{2\varphi} \cos\vartheta, \qquad \vartheta = \vartheta(x^1, x^2)$$

Уравнение (2) и условие потенциальности течения запишутся следующим образом:

$$g^{-1/4} \sin\vartheta \left(\sqrt{\varphi} \varphi''\right)' + \left[(g^{-1/4} \sin\vartheta)_1' + (g^{-1/4} \cos\vartheta)_2'\right] \sqrt{\varphi} \varphi'' = 0 \tag{4}$$

$$g^{1/4} \cos\vartheta\, \varphi' + 2\left[(g^{1/4} \cos\vartheta)_1' - (g^{1/4} \sin\vartheta)_2'\right] \varphi = 0 \tag{5}$$

В формулах (4), (5) штрих означает дифференцирование, а нижний индекс указывает на координату, по которой оно производится.

Условия эвклидовости пространства (3) в рассматриваемом случае сводятся к единственному уравнению

$$\frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} \ln g + \frac{\partial^2}{(\partial x^2)^2} \ln g = 0 \tag{6}$$

Будем считать, что $\vartheta = \vartheta(x^1)$, т. е., что v_{x^i}, как и φ, зависят только от x^1. Тогда уравнения (4), (5) суть линейные уравнения первого порядка в частных производных относительно $\ln g$

$$\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x^1}\ln g + \frac{1}{4}\operatorname{ctg}\vartheta\,\frac{\partial}{\partial x^2}\ln g = (F + \ln\sin\vartheta)', \qquad F' = [\ln(\sqrt{\varphi\varphi''})]' \tag{7}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^1}\ln g + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\vartheta\,\frac{\partial}{\partial x^2}\ln g = (f + 2\ln\cos\vartheta)', \qquad f' = (\ln\varphi)' \tag{8}$$

общие решения которых определяются формулами

$$\ln g = 4F + 4\ln\sin\vartheta + G(\xi), \qquad \xi = x^2 - \ln\sin\vartheta \tag{9}$$

$$\ln g = -2f - 4\ln\cos\vartheta + Q(\zeta), \quad \zeta = x^2 - \ln\cos\vartheta \tag{10}$$

Требуя чтобы выражения (9), (10) были тождественны, получаем

$$G = \beta\xi, \quad Q = \beta\zeta, \quad \beta = \mathrm{const}$$

Таким образом, для $\ln g$ имеем

$$\ln g = \Phi(x^1) + \beta x^2 \tag{11}$$

Видно, что (6) удовлетворяется, если $\Phi(x^1)$ — линейная функция. Следовательно,

$$g = \gamma\exp(\alpha x^1 + \beta x^2)$$

При различных значениях констант α, β, γ формула (11) определяет декартовы x, y, полярные R, ψ и спиральные q_1, q_2 координаты [5].

Можно показать, что при $\vartheta = \vartheta(x^2)$ совместного решения уравнений (4), (5) не существует.

В трехмерном случае $v_x^{\ i}$ удовлетворяют интегралу энергии при $\varphi = \varphi(x^1)$, если

$$v_{x^1} = \sqrt{2\varphi}\cos\Psi\sin\vartheta, \qquad v_{x^2} = \sqrt{2\varphi}\cos\Psi\cos\vartheta, \quad v_{x^3} = \sqrt{2\varphi}\sin\Psi$$

$$\Psi = \Psi(x^1, x^2, x^3), \quad \vartheta = \vartheta(x^1, x^2, x^3)$$

Считая, что $\Psi = \Psi(x^1)$, $\vartheta = \vartheta(x^1)$ и требуя, чтобы уравнения (1) превращались в обыкновенные дифференциальные уравнения, приходим к трем цилиндрическим системам коодинат, соответствующим указанным двумерным системам, а также к сферическим координатам r, θ, ψ. Таким образом, геометрическая картина поля при $\rho \neq 0$ сохраняется между параллельными плоскостями $x = \mathrm{const}$, коаксиальными цилиндрами $R = \mathrm{const}$, концентрическими сферами $r = \mathrm{const}$, а также между наклоненными плоскостями $\psi = \mathrm{const}$, спиральными цилиндрами $q_1 = \mathrm{const}$, $q_2 = \mathrm{const}$ и конусами $\theta = \mathrm{const}$. Первые три случая, соответствующие классическим решениям Чайлда — Лэнгмюра — Блоджетт, хорошо известны. Для этих геометрий реализуются одномерные (однокомпонентные $v_1 = dW/dx^1$, $v_2 = v_3 = 0$) течения. Все другие из перечисленных потоков не обладают этим свойством.

Так как решение уравнений пучка заранее неизвестно, то, по-видимому, постановка вопроса о сохранении геометрической картины поля имеет смысл лишь в тех случаях, когда его изучение облегчает нахождение такого решения. Можно ожидать, что это имеет место только для четырех упоминавшихся координатных систем [6,7], хотя в рассмотренной постановке удалось доказать более слабые утверждения.

Поступила 22 XII 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Цырлин Л. Э. Условия сохранения геометрической картины электростатического поля при появлении объемного заряда. Ж. техн. физ., 1957, т. 27, № 7.
2. Gabor D. Dynamics of Electron Beams. Proc. IRE, 1945, vol. 33, No. 11.
3. Spangenberg K. Use of the Action Function to Obtain the General Differential Equations of Space-Charge Flow in More Than One Dimension. J. Franklin Inst., 1941, vol. 232, No. 4.
4. Meltzer B. Single-Component Stationary Electron Flow Under Space-Charge Conditions. J. Electr., 1956, vol. 2, No. 2.
5. Сыровой В. А. Об однокомпонентных пучках одноименно заряженных частиц ПМТФ, 1964, № 3.
6. Сыровой В. А. Инвариантно-групповые решения уравнений плоского стацио нарного пучка заряженных частиц. ПМТФ, 1962, № 4.
7. Сыровой В. А. Инвариантно-групповые решения уравнений пространственного стационарного пучка заряженных частиц. ПМТФ, 1963, № 3.