

6. Rideal E. K., Robertson A. J. B. The spontaneous ignition of nitrocellulose. III Sympos. on Comb. and Flame Explos. Phenomena, Baltimore, Williams and Wilkins Co, Md., 1949, p. 536.
7. Похил П. Ф. О механизме горения бездымных порохов. Сб. «Физика взрыва», М., Изд-во АН СССР, 1953, № 2, стр. 181.
8. Wolfgram M. L., Frazer J. H., Kuhn L. P., Dickey E. E., Olin S. M., Bower R. S., Maher G. G., Murdock J. D., Chaney A., Carpenter E. The controlled thermal decomposition of Cellulose nitrate. J. Amer. Chem. Soc., 1955, vol. 77, No. 24, pp. 6573—6580; 1956, vol. 78, No. 18, pp. 4695—4704.
9. Виль В. Исследование стойкости нитроклетчатки. Морской сборник, 1904, № 1, стр. 87; № 2, стр. 153.
10. Сапожников А. В., Ягеллович В. Разложение нитроклетчатки при температурах ниже воспламенения. Ж. Русск. физ.-хим. об-ва, 1905, т. 37, вып. 7, стр. 822.
11. Сапожников А. В. Разложение нитроклетчатки при температурах ниже воспламенения (статья вторая). Ж. Русск. физ.-хим. об-ва, 1906, т. 38, вып. 7, стр. 1186.
12. Манелис Г. Б., Рубцов Ю. И., Смирнов Л. П., Дубовицкий Ф. И. Кинетика термического разложения пироксилина. Кинетика и катализ, 1962, т. 3, вып. 1, стр. 42.
13. Штейнберг А. С., Улыбин В. Б., Барзыкин В. В., Мержанов А. Г. О заживании конденсированных веществ в условиях постоянства температуры на поверхности. Инж.-физ. ж., 1966, т. 10, № 4, стр. 482.
14. Коробейничев О. П., Александров В. В., Ляхов Н. З. Исследования кинетики и механизма высокотемпературного распада пироксилина с помощью время-пролетного масс-спектрометра. Изв. АН СССР, Сер. хим., 1969, № 10.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНОГО РЕЖИМА ГОРЕНИЯ ТВЕРДОГО ТОПЛИВА

Г. Л. Комиссарова, И. М. Сулима

(Киев)

В работе Я. Б. Зельдовича [1] получена зависимость скорости стационарного горения твердого топлива от начальной температуры. А. Г. Истратов и В. Б. Либрович [2] исследовали устойчивость стационарного горения твердого топлива с учетом непостоянства температуры поверхности твердого топлива.

В данной работе изучено влияние тепловыделения в зонах реакции и неоднородности температурных и скоростных полей на устойчивость стационарного режима горения твердого топлива. Предположения о механизме горения твердого топлива, лежащие в основе данного исследования, изложены в работе [2].

Исследование устойчивости проводится методом малых возмущений. В работе получен новый критерий устойчивости стационарного режима горения твердого топлива. Как показали вычисления, проведенные на БЭСМ-2М, параметрами, существенно влияющими на устойчивость, оказываются σ , z_2/c_p , θ_r , Δ_2/c_p , $v_{\xi_2}^*$.

Задача решается в одномерной постановке. Полагаем, что система координат неизменно связана с границей, отделяющей твердое топливо от продуктов его распада. Ось x направлена от поверхности твердого топлива к поверхности горения.

Область 1 описывается уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} = a_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}, \quad a_1 = \frac{\lambda_1}{c_{p1} \rho_1} \quad (1)$$

Процессы, происходящие в области 2, описываются системой уравнений, полученной в работе [3]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p_2^*}{\partial x} + \frac{4}{3} \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_2 u_2)}{\partial x} &= 0, \quad c_{p2} \left(\frac{\partial T_2}{\partial t} + u_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \right) = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial s_2}{\partial t} + u_2 \frac{\partial s_2}{\partial x} &= \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial}{\partial x} \left(D_{\rho_2} \frac{\partial s_2}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

Область 3, где находятся газообразные продукты сгорания, описывается уравнением теплопроводности.

$$\frac{\partial T_3}{\partial t} + u_3 \frac{\partial T_3}{\partial x} = a_3 \frac{\partial^2 T_3}{\partial x^2}, \quad a_3 = \frac{\lambda_3}{c_{p3} \rho_3} \quad (3)$$

Здесь T, u, ρ, p^*, s — температура, скорость, плотность, давление и концентрация соответственно; c_p, μ, D, λ — теплоемкость, коэффициент динамической вязкости, коэффициент диффузии и коэффициент теплопроводности соответственно; t — время. Индекс 1 относится к k -фазе твердого топлива, индексы 2 и 3 к газовой фазе в областях 2 и 3.

Запишем уравнения (1) — (3) в безразмерном виде. Безразмерные величины введем по формулам]

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_b - T_0}, \quad \xi = \frac{u_1^0 \rho_1 c_{p1}}{\lambda_1} x, \quad \tau = \frac{u_1^0 \rho_1 c_{p1}}{\lambda_1} t$$

$$R_2 = \frac{\rho_2}{\rho_3^0}, \quad p = \frac{p^*}{\rho_3^0 u_n^2}, \quad U = \frac{u}{u_n}$$

Здесь u_1^0 — линейная скорость стационарного горения, u_n — нормальная скорость стационарного распространения пламени, ρ_3^0 — плотность газа в области 3 при стационарном горении, T_0 — начальная температура твердого топлива, T_b — температура сгорания.

Систему уравнений (1) — (3) необходимо дополнить уравнением состояния, которое для случая несжимаемого газа (скорость пламени мала по сравнению со скоростью звука) сводится к связи между плотностью газа и его температурой [4]

$$R_2 = \frac{1}{1 + \beta \theta_2}, \quad \beta = \frac{1 - \alpha}{\alpha} \quad (4)$$

Здесь α — отношение плотностей горючего и холодного газа.

Введя обозначения для массовой скорости горения $m = RU$ и принимая во внимание уравнение состояния (4), систему уравнений (1) — (3) можно записать в виде

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial \tau} + m_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \xi^2} \quad (m_1 = \frac{\rho_1 u_1}{\rho_1 u_1^0}, \quad \rho_1 u_1 = \rho_3^0 u_n)$$

$$\varepsilon \frac{\partial m_2}{\partial \tau} + \varepsilon \frac{\beta m_2}{1 + \beta \theta_2} \frac{\partial \theta_2}{\partial \tau} + m_2 (1 + \beta \theta_2) \frac{\partial m_2}{\partial \xi} + \beta m_2^2 \frac{\partial \theta_2}{\partial \xi} = - \frac{\partial p_2}{\partial \xi} +$$

$$+ \frac{4}{3} \frac{P}{v} \left[(1 + \beta \theta_2) \frac{\partial^2 m_2}{\partial \xi^2} + 2\beta \frac{\partial m_2}{\partial \xi} \frac{\partial \theta_2}{\partial \xi} + \beta m_2 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \xi^2} \right]$$

$$- \frac{\varepsilon \beta}{(1 + \beta \theta_2)^2} \frac{\partial \theta_2}{\partial \tau} + \frac{\partial m_2}{\partial \xi} = 0, \quad \varepsilon \frac{1}{1 + \beta \theta_2} \frac{\partial \theta_2}{\partial \tau} + m_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial \xi} = \frac{1}{v} \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \xi^2}$$

$$\varepsilon \frac{1}{1 + \beta \theta_2} \frac{\partial s_2}{\partial \tau} + m_2 \frac{\partial s_2}{\partial \xi} = \frac{1}{vL} \frac{\partial^2 s_2}{\partial \xi^2}, \quad \varepsilon \frac{\partial \theta_3}{\partial \tau} + \frac{\partial \theta_3}{\partial \xi} = \frac{1}{v} \frac{\partial^2 \theta_3}{\partial \xi^2}$$

$$\left(\varepsilon = \frac{\rho_3^0}{\rho_1}, \quad \lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\lambda_3}{\lambda_1}, \quad c_p = \frac{c_{p2}}{c_{p1}} = \frac{c_{p3}}{c_{p1}}, \quad v = \frac{c_p}{\lambda} \right)$$

Здесь P, L — числа Прандля и Льюиса соответственно.

Составим граничные условия. Решения уравнений (5) должны удовлетворять условиям на бесконечности

$$\theta_1 \rightarrow 0 \quad \text{при } \xi \rightarrow -\infty, \quad \theta_3 < \infty \quad \text{при } \xi \rightarrow +\infty \quad (6)$$

и условиям на стыке областей. Полагаем, что сами поверхности реакции могут испытывать малые смещения. Координата зоны реакции в k -фазе твердого топлива в неподвижной системе координат равна

$$x_{n1} = x_{n0} - \int_0^t u_1 dt$$

где x_{n0} — начальное положение поверхности твердого топлива. Отсюда имеем

$$u_1 = - dx_{n1} / dt$$

Полагаем, что

$$\xi_{n1} = \xi_{n0} - (\tau + fe^{\omega\tau})$$

Тогда

$$m_1 = 1 + \omega fe^{\omega\tau}$$

В подвижной системе координат $\xi_1 = 0$. Полагаем, что координата зоны реакции в газе

$$\xi_2 = \xi_2^0 + ge^{\tau\omega}$$

Здесь ξ_2^0 — стационарное положение зоны реакции. Согласно [3] ширина области 2 имеет порядок $\mu_2 / \rho_2 u_2$. Следовательно

$$\xi_2^0 \sim \frac{u_1^0 \rho_1 c_{p1}}{\lambda_1} \frac{\mu_2}{\rho_2 u_2} = \frac{\rho_1 u_1^0}{\rho_2 u_2} \frac{P}{v} \quad \left(P = \frac{\mu_2 c_{p2}}{\lambda_2} \right)$$

Для стационарного процесса горения $\rho_1 u_1^0 = \rho_2 u_2$. Тогда имеем

$$\xi_2^0 \sim P / v \quad (7)$$

Будем полагать [4], что изменения скорости химических реакций w_1 и w_2 , к которым приведет возмущение стационарного состояния, обусловлены изменением температуры T_s и T_r на соответствующих поверхностях в k -фазе и газе. Такое предположение естественно при больших энергиях активации химических реакций E_1 и E_2 . Тогда скорости реакции в k -фазе и газе соответственно можно записать в виде

$$m_1 = \frac{\rho_1 w_1}{\rho_1 u_1^0} = 1 + z_1 (\theta_s^0 + \theta_s'), \quad z_1 = \frac{E_1 (T_b - T_0)}{2RT_s^2}$$

$$m_2 = \frac{\rho_2 w_2}{\rho_1 u_1^0} = 1 + z_2 (\theta_r^0 + \theta_r'), \quad z_2 = \frac{E_2 (T_b - T_0)}{2RT_b^2}$$

Граничные условия в безразмерном виде на стыке областей имеют вид при $\xi_1 = 0$

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta_s, \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial \xi} - \lambda \frac{\partial \theta_2}{\partial \xi} - (\theta_s + \theta_0^0) (1 - c_p) m_1 = \frac{q_1 m_1}{c_{p1} (T_b - T_0)} \quad (8)$$

$$m_1 = m_2 = 1 + \omega fe^{\omega\tau}, \quad m_2 s_2 - \frac{1}{vL} \frac{\partial s_2}{\partial \xi} = m_1 \quad \left(\theta_0^0 = \frac{T_0}{T_b - T_0} \right)$$

при $\xi = \xi_2$

$$\theta_2 + \xi_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial \xi} = \theta_3 = \theta_r, \quad \lambda \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\theta_2 + \xi_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial \xi} \right) - \lambda \frac{\partial \theta_3}{\partial \xi} = \frac{q_2 m_1}{c_{p1} (T_b - T_0)}$$

$$s_2 + \xi_2 \frac{\partial s_2}{\partial \xi} = 0, \quad -\frac{1}{vL} \left(\frac{\partial s_2}{\partial \xi} + \xi_2 \frac{\partial^2 s_2}{\partial \xi^2} \right) = m_2$$

Здесь q_1 и q_2 — тепловой эффект реакции в k -фазе и газе соответственно.

Таким образом, имеем систему шести дифференциальных уравнений (5) с шестью неизвестными $\theta_1, \theta_2, \theta_3, p_2, m_2, s_2$, решение которой должно удовлетворять граничным условиям (6) и (8).

В дальнейшем значение p_2 не потребуется, поэтому второе уравнение (5) может быть опущено; в дальнейшем оно не рассматривается.

Исследование устойчивости проведем методом малых возмущений. Будем искать решения полученной системы уравнений в виде

$$f(\xi, \tau) = F(\xi) + [\varepsilon f^0(\xi) + \varepsilon f^1(\xi)] e^{\xi} \quad (9)$$

Подставляя решение вида (9) в уравнения (5), а также в граничные условия (6) и (8), оставляя в них члены вида $F(\xi)$ и приравнявая коэффициенты при ε^0 , получим систему уравнений и граничных условий, описывающих стационарный процесс и возмущенное состояние. Решение стационарной задачи имеет вид

$$\theta_1 = \theta_s e^{\xi}, \quad M_2 = \text{const} = 1 \quad (10)$$

$$\theta_2 = \theta_r - \frac{\Delta_2}{c_p} \left[1 - \frac{1}{1 + v \xi_2^0} \exp v(\xi - \xi_2^0) \right] \quad \left(\Delta_i = \frac{q_i}{c_{p1} (T_b - T_0)}, \quad i = 1, 2 \right)$$

$$s_2 = 1 - \frac{1}{1 + vL \xi_2^0} \exp vL(\xi - \xi_2^0), \quad \theta_3 = \theta_r$$

$$\left(\theta_s = \frac{1}{c_p} \left[\Delta_1 + \Delta_2 \frac{e^{v \xi_2^0}}{1 + v \xi_2^0} + \theta_0^0 (1 - c_p) \right], \quad \theta_2 = \frac{1}{c_p} \left[\Delta_1 + \Delta_2 + \theta_0^0 (1 - c_p) \right] \right)$$

После сокращения на общий множитель $e^{i\omega t}$ систему уравнений для возмущения можно записать в виде

$$\frac{d^2\theta_1^\circ}{d\xi^2} - \frac{d\theta_1^\circ}{d\xi} - \omega\theta_1^\circ = -\omega f \Theta_s e^{\xi}, \quad \frac{1}{v} \frac{d^2\theta_2^\circ}{d\xi^2} - \frac{d\theta_2^\circ}{d\xi} = m_2^\circ \frac{d\theta_2^\circ}{d\xi} \quad (11)$$

$$\frac{dm_2^\circ}{d\xi} = 0, \quad \frac{1}{vL} \frac{d^2s_2^\circ}{d\xi^2} - \frac{ds_2^\circ}{d\xi} = m_2^\circ \frac{dS_2}{d\xi}, \quad \frac{1}{v} \frac{d^2\theta_3^\circ}{d\xi^2} - \frac{d\theta_3^\circ}{d\xi} = 0 \quad (12)$$

Граничные условия

$$\theta_1^\circ \rightarrow 0 \quad \text{при } \xi \rightarrow -\infty, \quad \theta_3^\circ < \infty \quad \text{при } \xi \rightarrow +\infty$$

при $\xi = 0$

$$\theta_1^\circ = \theta_2^\circ = \theta_s^\circ, \quad \frac{d\theta_1^\circ}{d\xi} - \lambda \frac{d\theta_2^\circ}{d\xi} - \theta_s^\circ (1 - c_p) - \omega f (\Theta_s + \theta_0^\circ) (1 - c_p) = \Delta_1 z_1 \theta_s^\circ$$

$$m_1^\circ = m_2^\circ = \omega f, \quad z_2 \theta_s^\circ = \omega f, \quad s_2^\circ + \omega f S_2 - \frac{1}{vL} \frac{ds_2^\circ}{d\xi} = z_1 \theta_s^\circ$$

при $\xi = \xi_2$

$$\theta_2^\circ + g \frac{d\theta_2^\circ}{d\xi} + \xi_2^\circ \frac{d\theta_2^\circ}{d\xi} = \theta_2^\circ = \theta_r^\circ, \quad \lambda \frac{d\theta_2^\circ}{d\xi} + \lambda g \frac{d^2\theta_2^\circ}{d\xi^2} + \lambda \xi_2^\circ \frac{d^2\theta_2^\circ}{d\xi^2} - \lambda \frac{d\theta_3^\circ}{d\xi} = \Delta_2 z_2 \theta_r^\circ$$

$$s_2^\circ + g \frac{ds_2^\circ}{d\xi} + \xi_2^\circ \frac{ds_2^\circ}{d\xi} = 0, \quad -\frac{1}{vL} \left[\frac{ds_2^\circ}{d\xi} + g \frac{d^2s_2^\circ}{d\xi^2} + \xi_2^\circ \frac{d^2s_2^\circ}{d\xi^2} \right] = z_2 \theta_r^\circ$$

Решение системы (11) при условиях (12) будет следующим:

$$\theta_1^\circ = a e^{r\xi} + f \Theta_s e^{\xi}, \quad r = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{1 + 4\omega}), \quad m_0^\circ = \text{const} = \omega f$$

$$\theta_2^\circ = b + c \exp v\xi + f \frac{\Delta_2}{\lambda} \frac{\omega \xi}{1 + v\xi_2^\circ} \exp v(\xi - \xi_2^\circ) \quad (13)$$

$$s_2^\circ = k + l \exp vL\xi - f \frac{lvL\omega \xi}{1 + vL\xi_2^\circ} \exp vL(\xi - \xi_2^\circ)$$

Подставляя решения (13) в граничные условия (12), получаем систему однородных уравнений для определения постоянных a, b, c, d, f, g, k, l . Для существования нетривиального решения необходимо, чтобы определитель этой системы равнялся нулю. Уравнение для определения нулевого приближения комплексной частоты имеет вид

$$2\omega(y - 1) + \sigma\omega + y = (y + \sigma\omega) \sqrt{1 + 4\omega} \quad (14)$$

где

$$y = \frac{z_2}{c_p} \Theta_s, \quad \sigma = \frac{z_2}{z_1 c_p} \quad (15)$$

После несложных преобразований частотное уравнение может быть представлено в виде

$$\omega^3 + \eta_2 \omega^2 + \eta_1 \omega = 0 \quad (16)$$

где

$$\eta_1 = \sigma^{-2} y, \quad \eta_2 = \sigma^{-2} [-(y - 1)^2 + \sigma(y + 1)]$$

Корни этого уравнения следующие:

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_{2,3} = -\frac{1}{2} \eta_2 \pm \frac{1}{2} \sqrt{\eta_2^2 - 4\eta_1} \quad (17)$$

Поскольку при решении уравнения (14) приходилось возводить его в квадрат, полученные корни следует проверить подстановкой в исходное уравнение для исключения лишних корней.

Возмущения, соответствующие корню $\omega_1 = 0$, возникают при смещении вдоль оси x первоначальных стационарных распределений величин без изменения их формы. Согласно [5] определение устойчивости в силу инвариантности постановки задачи относительно сдвига по координате x также должно быть инвариантным относительно этого преобразования.

Корни уравнения (16) комплексные, если $(\eta_2^2 - 4\eta_1) < 0$. Из (17) следует, что в этом случае решение описывает устойчивый процесс ($\text{Re} \omega < 0$), если

$$[-(y - 1)^2 + \sigma(y + 1)] > 0 \quad (18)$$

Из (10) следует

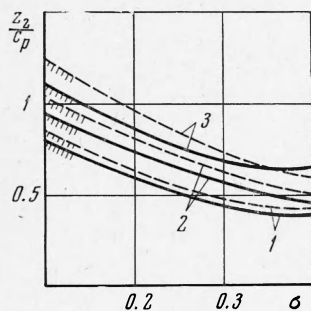
$$\Theta_s = \Theta_r - \frac{\Delta_2}{c_p} \left(1 - \frac{\exp v\xi_2^\circ}{1 + v\xi_2^\circ} \right) \quad (19)$$

И следовательно, температура поверхности твердого топлива при стационарном режиме горения зависит от Θ_r , Δ_2 / c_p , $v\xi_2^\circ$, т. е. от свойств газовой фазы.

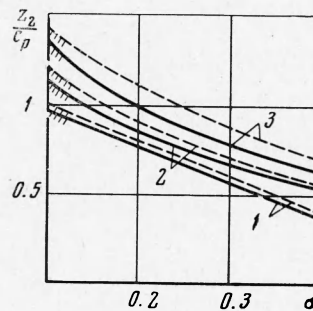
Подставляя в (15) соотношение (19), получаем

$$y = \frac{z_2}{c_p} \left[\Theta_r - \frac{\Delta_2}{c_p} \left(1 - \frac{1}{1 + v\xi_2^\circ} \exp v\xi_2^\circ \right) \right] \quad (v\xi_2^\circ \sim P)$$

Таким образом, полученное условие устойчивости горения твердого топлива (18) зависит от Θ_r , z_2 / c_p , σ , Δ_2 / c_p , $v\xi_2^\circ$. В отличие от известных ранее критериев устойчивости [1,2], Θ_s определяется в результате решения стационарной задачи.



Фиг. 1



Фиг. 2

Для оценки влияния этих параметров на устойчивость горения твердого топлива были проведены вычисления на БЭСМ-2М. Задавались следующие интервалы изменения основных величин:

$$0.1 \leq \sigma \leq 0.4, \quad 0 \leq z_2 / c_p \leq 2.5, \quad 0.8 \leq v\xi_2^\circ \leq 2.5, \quad 0.3 \leq \Delta_2 / c_p \leq 0.85, \quad \Theta_r = 1$$

Результаты этих вычислений приведены на фиг. 1 и 2. На фиг. 1 кривые 1, 2, 3 соответствуют $\Delta_2 / c_p = 0.3, 0.5$ и 0.6 . Сплошные кривые соответствуют $v\xi_2^\circ = 0.8$, пунктирные кривые — $v\xi_2^\circ = 1.1$. На фиг. 2 кривые 1, 2, 3 соответствуют $\Delta_2 / c_p = 0.4, 0.5$ и 0.6 . Сплошные кривые соответствуют $v\xi_2^\circ = 1.5$, пунктирные кривые — $v\xi_2^\circ = 2.5$. Положение областей неустойчивости показано штриховкой. Из этих графиков видно, что с увеличением $v\xi_2^\circ$ при $\Delta_2 / c_p = \text{const}$ область устойчивости и с увеличением Δ_2 / c_p при $v\xi_2^\circ = \text{const}$ область устойчивости смещается вверх по оси z_2 / c_p . Следовательно, с увеличением ширины области подогрева (темная зона) и теплового эффекта реакции в газе область устойчивости смещается вверх по оси z_2 / c_p .

В заключение авторы благодарят Н. А. Кильчевского за обсуждение работы и ценные замечания, В. Г. Ключникову за помощь, оказанную при составлении программы вычислений на БЭСМ-2М.

Поступила 23 IV 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я. Б. К теории горения порохов и взрывчатых веществ. ЖЭТФ, 1942, т. 12, вып. 11, 12.
2. Истратов А. Г., Либрович В. Б. Об устойчивости горения пороха. ПМТФ, 1964, № 5.
3. Комиссарова Г. Л., Сулима И. М. Рівняння руху стисливого вязкого газу в тонких перехідних зонах. Доповіді АН УССР, Сер. А, 1967, № 12.
4. Истратов А. Г., Либрович В. Б. О влиянии процессов переноса на устойчивость плоского фронта пламени. ПММ, 1966, т. 40, вып. 3.
5. Баренблатт Г. И., Зельдович Я. Б. Об устойчивости распространения пламени. ПММ, 1957, т. 21, вып. 6.