

УДК 539.3:534.1

## СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С ПРИСОЕДИНЕННОЙ МАЛОЙ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ МАССОЙ

Г. С. Лейзерович, С. В. Серегин

Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет,  
681013 Комсомольск-на-Амуре, Россия  
E-mail: Seregin-komshome@yandex.ru

В рамках теории пологих оболочек изучается влияние малой присоединенной массы на частоту и форму свободных колебаний тонкой оболочки. В предложенной математической модели предполагается, что массовая асимметрия даже в линейной постановке приводит к связанным изгибно-радиальным колебаниям. С помощью модальных уравнений, полученных методом Бубнова — Галеркина, выявлены особенности взаимодействия формообразующих волн. Обнаружено расщепление изгибного частотного спектра, обусловленное не только наличием присоединенной массы, но и параметрами волнообразования оболочки. Установлены диапазоны относительных длин и толщин оболочки, в которых взаимодействием изгибных и радиальных колебаний можно пренебречь.

**Ключевые слова:** круговая цилиндрическая оболочка, присоединенная масса, изгибно-радиальные колебания, расщепление изгибного частотного спектра.

DOI: 10.15372/PMTF20160510

**Введение.** Деформирование, прочность, колебания, статическая и динамическая устойчивость тонкостенных элементов конструкций в форме замкнутых круговых цилиндрических оболочек являются объектом многочисленных исследований, интерес к которым обусловлен использованием этих оболочек в качестве основных несущих конструктивных элементов в авиационной, ракетной, космической технике, подводных аппаратах, конструкциях тоннелей и резервуаров, а также в корпусах современных энергетических установок. Такие оболочечные конструкции характеризуются включениями типа малых присоединенных масс, обусловленных конструктивной, эксплуатационной или иной необходимостью. В качестве присоединенной массы в системе оболочка — масса используются двигатели, системная аппаратура, транспортируемый груз, топливные баки, а также различное подвесное оборудование и архитектурные включения.

Известно, что наличие присоединенной массы приводит к взаимодействию сопряженных изгибных форм и расщеплению изгибного частотного спектра круговой цилиндрической оболочки [1–10]. В работе [3] показано, что уменьшение основной частоты системы оболочка — масса обусловлено только величиной присоединенной массы. Однако анализ

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 16-31-00045 мол.а).

экспериментальных данных [3–5] и численные исследования [6, 7] показывают, что частота зависит также от геометрических параметров оболочки.

В работе [8] для случая бесконечно длинной круговой цилиндрической оболочки предложена уточненная математическая модель, согласно которой наличие присоединенной массы даже в линейной постановке приводит к взаимодействию низкочастотных изгибных колебаний с высокочастотными радиальными колебаниями. В работе [9] данный подход использовался для случая колебаний оболочки конечной длины, несущей присоединенную массу, распределенную вдоль образующей.

Результаты работ [8, 9] качественно и количественно согласуются с экспериментальными данными [2–4] и численными расчетами [6, 7].

В настоящей работе, являющейся продолжением цикла исследований, на примере оболочки с присоединенной сосредоточенной массой показана применимость предложенного подхода для изучения собственных динамических характеристик таких конструкций.

**1. Математическая модель.** Исследуются колебания в окрестности основного резонанса цилиндрической оболочки массой  $M_0$ , радиусом  $R$ , длиной  $l$  и толщиной  $h$ , к которой при  $x = x_0$ ,  $y = y_0$  присоединена масса  $M$ .

1.1. *Уравнения движения.* Как и в работе [3], используются уравнения движения теории пологих оболочек [10]

$$\begin{aligned} \frac{D}{h} \nabla^4 w &= \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{M}{h} \delta(x - x_0, y - y_0) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\ \frac{1}{E} \nabla^4 \Phi &= -\frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $D = Eh^3/[12(1-\mu^2)]$  — цилиндрическая жесткость;  $E$  — модуль Юнга;  $\mu$  — коэффициент Пуассона;  $\nabla^4$  — бигармонический оператор Лапласа;  $w(x, y, t)$  — прогиб;  $\Phi(x, y, t)$  — функция напряжений;  $\rho$  — плотность;  $t$  — время;  $\delta(x, y)$  — функция Дирака.

1.2. *Условие “возврата”.* Для замкнутой оболочки все величины, определяющие ее напряженно-деформированное состояние, должны принимать свои начальные значения после обхода контура поперечного сечения.

1.3. *Граничные условия.* К уравнениям движения (1) необходимо добавить граничные условия. Полагается, что на торцах оболочки выполняются краевые условия Навье  $w = 0$ ,  $\partial^2 w / \partial x^2 = 0$ ,  $N_1 = T = 0$  ( $N_1$ ,  $T$  — погонные продольное и касательное усилия соответственно).

1.4. *Конечномерная модель.* В рамках традиционного подхода при построении конечномерной модели полагается, что наличие присоединенной массы приводит к взаимодействию сопряженных изгибных форм  $\sin \beta y \sin \alpha x$  и  $\cos \beta y \sin \alpha x$  ( $\beta = n/R$ ;  $\alpha = \pi/l$ ;  $n$  — число волн в окружном направлении). Этим формам собственных колебаний симметричной оболочки соответствует одна и та же частота. Тогда упругий прогиб свободно опертой по торцам оболочки с присоединенной массой в первом приближении можно аппроксимировать выражением

$$w(x, y, t) = [f_1(t) \sin \beta y + f_2(t) \cos \beta y] \sin \alpha x, \quad (2)$$

где  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$  — обобщенные координаты.

В настоящей работе предлагается уточненная конечномерная модель (2), согласно которой наличие присоединенной массы приводит к взаимодействию не только сопряженных изгибных форм, но и низкочастотных изгибных колебаний оболочки с высокочастотными радиальными колебаниями. При данном подходе выражение для прогиба оболочки имеет вид

$$w(x, y, t) = [f_1(t) \sin \beta y + f_2(t) \cos \beta y + f_3(t)] \sin \alpha x, \quad (3)$$

где дополнительная координата  $f_3(t)$  соответствует радиальным формам колебаний.

1.5. *Модальные уравнения.* Подставляя (3) во второе уравнение (1), можно найти функцию напряжений

$$\Phi(x, y, t) = [\Phi_1(t) \sin \beta y + \Phi_2(t) \cos \beta y + \Phi_3(t)] \sin \alpha x, \quad (4)$$

удовлетворяющую условиям “возврата”, а также граничным условиям  $N_1 = T = 0$ . Здесь

$$\Phi_1(t) = \frac{E\alpha^2}{R(\alpha^2 + \beta^2)^2} f_1(t), \quad \Phi_2(t) = \frac{E\alpha^2}{R(\alpha^2 + \beta^2)^2} f_2(t), \quad \Phi_3(t) = \frac{E}{R\alpha^2} f_3(t).$$

Подставляя (3), (4) в первое уравнение (1) и используя условие ортогональности полученного выражения форме прогиба (3), получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{f}_1 + f_1 + \frac{4M}{M_0} (\ddot{f}_1 \sin^2 \beta y_0 + \ddot{f}_2 \cos \beta y_0 \sin \beta y_0 + \ddot{f}_3 \sin \beta y_0) \sin^2 \alpha x_0 &= 0, \\ \ddot{f}_2 + f_2 + \frac{4M}{M_0} (\ddot{f}_1 \sin \beta y_0 \cos \beta y_0 + \ddot{f}_2 \cos^2 \beta y_0 + \ddot{f}_3 \cos \beta y_0) \sin^2 \alpha x_0 &= 0, \\ \ddot{f}_3 + \left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2 f_3 + \frac{2M}{M_0} (\ddot{f}_1 \sin \beta y_0 + \ddot{f}_2 \cos \beta y_0 + \ddot{f}_3) \sin^2 \alpha x_0 &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $p^2 = 1 + \varepsilon\theta^4/[12(1 - \mu^2)]$ ,  $\omega_n^2 = \varepsilon(1 + \theta^2)^2/[12(1 - \mu^2)] + \theta^4/(1 + \theta^2)^2$  — квадраты безразмерных частот радиальных и изгибных колебаний оболочки при отсутствии присоединенной массы соответственно;  $\varepsilon = (n^2 h/R)^2$ ,  $\theta = \pi R/(nl)$  — параметры волнообразования, характеризующие относительную толщину и длину оболочки; точки обозначают дифференцирование по безразмерному времени  $\tau = \lambda_n t$ , где  $\lambda_n^2 = E\omega_n^2/(\rho R^2)$  — квадрат собственной частоты.

Из системы модальных уравнений (5) следует, что наличие присоединенной массы приводит к взаимодействию не только сопряженных изгибных форм, но и изгибных колебаний оболочки с радиальными. При этом радиальные колебания являются дополнительной инерционной связью между сопряженными изгибными формами.

**2. Частоты колебаний.** Из частотного уравнения, соответствующего системе (5), найдены три безразмерные собственные частоты колебаний оболочки с малой присоединенной массой  $\Omega_{n0i} = \omega_{n0i}/\omega_n$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Расчеты показывают, что первым двум частотам  $\Omega_{n01}$ ,  $\Omega_{n02}$  соответствуют преимущественно изгибные колебания, а третьей  $\Omega_{n03}$  — преимущественно радиальные колебания. При этом все частоты не зависят от круговой координаты  $y_0$  точки крепления массы.

В рассматриваемом решении меньшая из расщепленных собственных частот  $\Omega_{n01}$  зависит не только от величины присоединенной массы, но и от параметров  $\varepsilon$  и  $\theta$  (рис. 1, 2) [11]. Расчеты выполнены для случая, когда масса прикреплена в сечении оболочки  $x = l/2$ . Результаты, полученные с использованием аппроксимаций прогиба (2), (3), совпадают только для относительно длинных ( $\theta < 0,5$ ) оболочек. В случае относительно коротких оболочек (например, при  $\varepsilon = 0,75$ ,  $\theta = 2$ ,  $M/M_0 = 0,1$ ) результаты, полученные с использованием аппроксимаций (2), (3), различаются более чем на 7 %, и при увеличении массы  $M/M_0$  это различие увеличивается. Большая из расщепленных собственных частот  $\Omega_{n02} = 1$  и в предлагаемом, и в традиционном решениях.

Зависимости частоты  $\Omega_{n03}$ , которой соответствуют преимущественно радиальные колебания, от параметров волнообразования и присоединенной массы представлены на рис. 3, 4. Видно, что  $\Omega_{n03}$  зависит от  $\varepsilon$ ,  $\theta$  и практически не зависит от  $M$ .

Зависимости отношения безразмерной частоты преимущественно радиальных колебаний к частоте радиальных колебаний оболочки без присоединенной массы  $\omega_{n03}/p$  от параметров волнообразования приведены на рис. 5, 6. Видно, что при наличии присоединенной массы частота  $\omega_{n03}$  может как уменьшаться, так и увеличиваться.

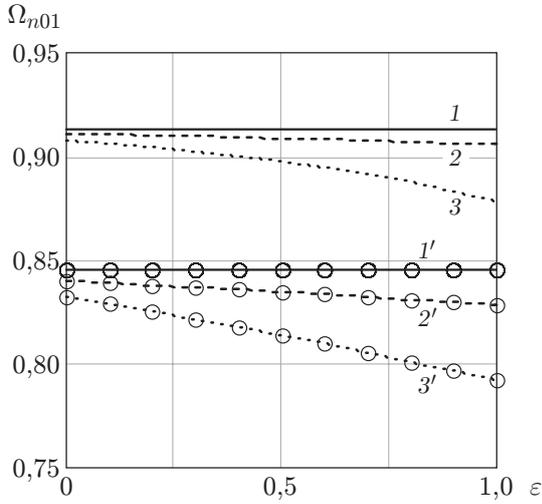


Рис. 1

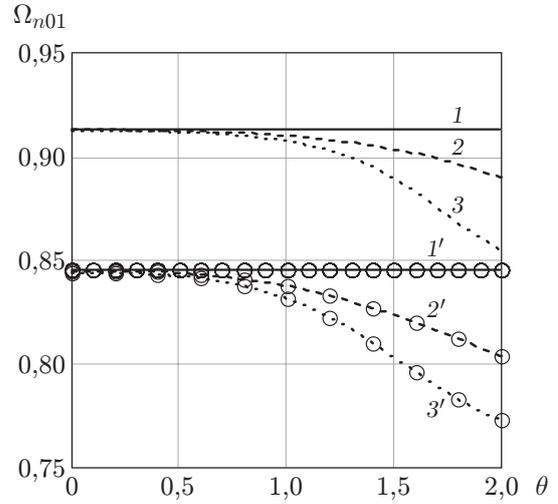


Рис. 2

Рис. 1. Зависимость частоты колебаний оболочки  $\Omega_{n01}$  от параметра волнообразования  $\varepsilon$  при различных значениях присоединенной массы  $M/M_0$  и параметра волнообразования  $\theta$ : сплошные линии — модель (2), штриховые и пунктирные — уточненное решение (3); 1-3 —  $M/M_0 = 0,05$ , 1'-3' —  $M/M_0 = 0,1$ ; 2, 2' —  $\theta = 1,0$ , 3, 3' —  $\theta = 1,5$

Рис. 2. Зависимость частоты колебаний оболочки  $\Omega_{n01}$  от параметра волнообразования  $\theta$  при различных значениях присоединенной массы  $M/M_0$  и параметра волнообразования  $\varepsilon$ : 2, 2' —  $\varepsilon = 0,25$ , 3, 3' —  $\varepsilon = 0,75$  (остальные обозначения те же, что на рис. 1)

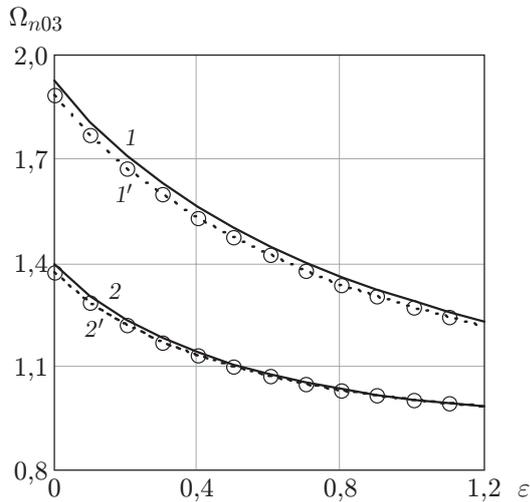


Рис. 3

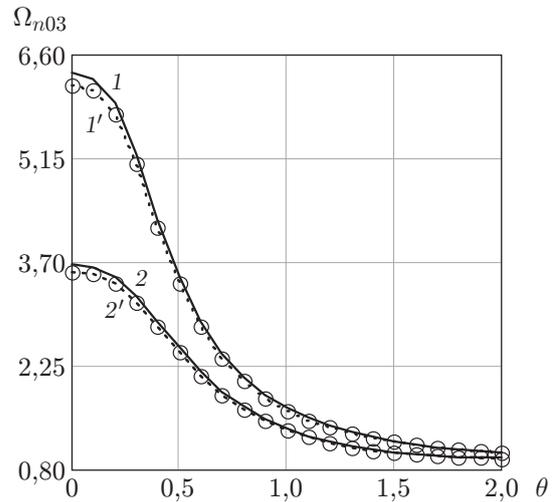


Рис. 4

Рис. 3. Зависимость частоты колебаний оболочки  $\Omega_{n03}$  от параметра волнообразования  $\varepsilon$  при различных значениях присоединенной массы  $M/M_0$  и параметра волнообразования  $\theta$ : 1, 2 —  $M/M_0 = 0,05$ , 1', 2' —  $M/M_0 = 0,1$ ; 1, 1' —  $\theta = 1,0$ , 2, 2' —  $\theta = 1,5$

Рис. 4. Зависимость частоты колебаний оболочки  $\Omega_{n03}$  от параметра волнообразования  $\theta$  при различных значениях присоединенной массы  $M/M_0$  и параметра волнообразования  $\varepsilon$ : 1, 2 —  $M/M_0 = 0,05$ , 1', 2' —  $M/M_0 = 0,1$ ; 1, 1' —  $\varepsilon = 0,25$ , 2, 2' —  $\varepsilon = 0,75$

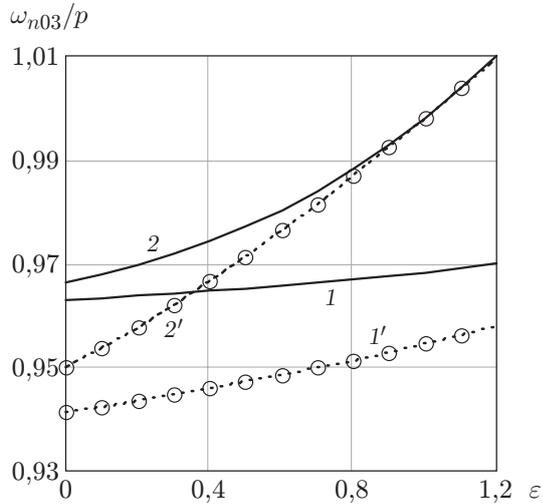


Рис. 5

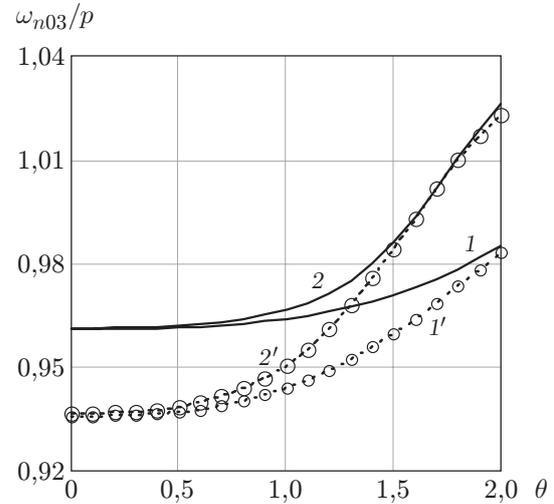


Рис. 6

Рис. 5. Зависимость частоты радиальных колебаний  $\omega_{n03}/p$  от параметра волнообразования  $\varepsilon$  при различных значениях присоединенной массы  $M/M_0$  и параметра волнообразования  $\theta$  (обозначения те же, что на рис. 3)

Рис. 6. Зависимость частоты радиальных колебаний  $\omega_{n03}/p$  от параметра волнообразования  $\theta$  при различных значениях присоединенной массы  $M/M_0$  и параметра волнообразования  $\varepsilon$  (обозначения те же, что на рис. 4)

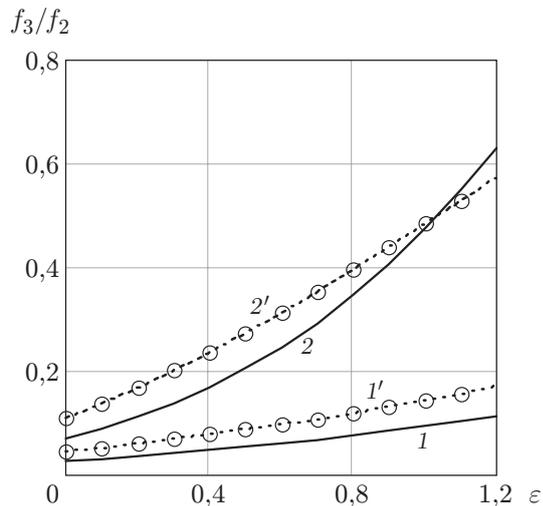


Рис. 7

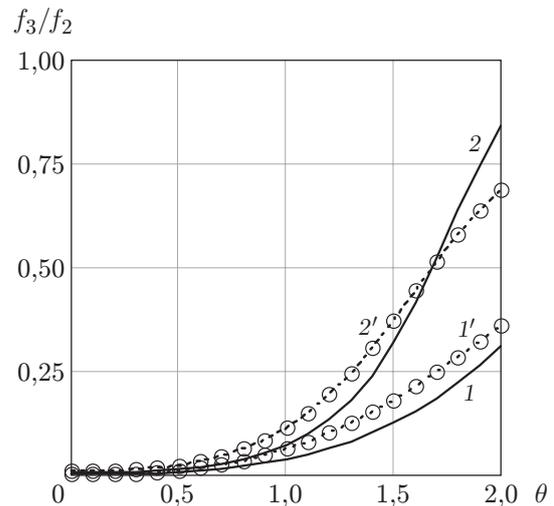


Рис. 8

Рис. 7. Зависимость отношения амплитуд  $f_3/f_2$  от параметра волнообразования  $\varepsilon$  при различных значениях присоединенной массы  $M/M_0$  и параметра волнообразования  $\theta$  (обозначения те же, что на рис. 3)

Рис. 8. Зависимость отношения амплитуд  $f_3/f_2$  от параметра волнообразования  $\theta$  при различных значениях присоединенной массы  $M/M_0$  и параметра волнообразования  $\varepsilon$  (обозначения те же, что на рис. 4)

**3. Формы колебаний.** Колебания оболочки с частотой  $\Omega_{n02} = 1$  происходят только по форме  $\sin \beta y \sin \alpha x$ , в этом случае масса неподвижна. При колебаниях с частотами  $\Omega_{n01}$ ,  $\Omega_{n03}$  наблюдается взаимодействие изгибной косинусоидальной  $\cos \beta y \sin \alpha x$  и радиальной  $\sin \alpha x$  форм, масса подвижна. Таким образом, при наличии присоединенной массы узлы в окружном направлении являются неподвижными.

На рис. 7, 8 представлена зависимость отношения амплитуд  $f_3/f_2$  от  $\varepsilon$ ,  $\theta$  и  $M$  при частоте  $\Omega_{n01}$ . Видно, что частоте  $\Omega_{n01}$  соответствуют преимущественно изгибные колебания. При этом с увеличением  $\varepsilon$  и (или)  $\theta$  амплитуды радиальных колебаний  $f_3$  становятся более существенными. Для количественной оценки частоты при  $\theta \leq 0,5$  взаимодействием изгибных и радиальных колебаний можно пренебречь (см. рис. 7, 8).

Представленные результаты для случая колебаний оболочки с присоединенной сосредоточенной массой аналогичны результатам, полученным для оболочки с присоединенной массой, равномерно распределенной вдоль образующей, и массой, распределенной вдоль образующей по линейному закону [9, 12].

**Заключение.** Наличие присоединенной сосредоточенной массы способствует взаимодействию сопряженных изгибных форм колебаний круговой цилиндрической оболочки, а также низкочастотных изгибных колебаний с незначительными высокочастотными радиальными колебаниями.

Предложенная аппроксимация формы прогиба позволила установить, что наличие присоединенной массы приводит к расщеплению изгибного частотного спектра, при этом меньшая из расщепленных собственных частот уменьшается, а большая не изменяется по сравнению со случаем колебаний оболочки без присоединенной массы. При этом меньшая из расщепленных собственных частот не зависит от круговой координаты точки крепления присоединенной массы, однако зависит от величины присоединенной массы и параметров волнообразования  $\varepsilon$  и  $\theta$ , характеризующих относительную толщину и длину оболочки.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Tobjas S. A.** A theory of imperfection for the vibration of elastic bodies of revolution // Engineering. 1951. V. 44, N 70. P. 409–420.
2. **Amabili M.** Nonlinear vibrations and stability of shells and plates. N. Y.: Cambridge Univ. Press, 2008.
3. **Кубенко В. Д.** Нелинейное взаимодействие форм изгибных колебаний цилиндрических оболочек / В. Д. Кубенко, П. С. Ковальчук, Т. С. Краснопольская. Киев: Наук. думка, 1984.
4. **Андреев Л. В.** Динамика тонкостенных конструкций с присоединенными массами / Л. В. Андреев, А. И. Станкевич, А. Л. Дышко, И. Д. Павленко. М.: Моск. авиац. ин-т, 2012.
5. **Sivak V. F., Sivak V. V.** Experimental investigation into the vibrations of shells of revolution with added masses // Intern. Appl. Mech. 2002. V. 38, N 5. P. 623–627.
6. **Серегин С. В.** Влияние площади контакта и величины линейно распределенной и сосредоточенной массы с круговой цилиндрической оболочкой на частоты и формы свободных колебаний // Вестн. Моск. гос. строит. ун-та. 2014. № 7. С. 64–74.
7. **Серегин С. В.** Об эффекте расщепления изгибного частотного спектра тонких круговых цилиндрических оболочек, несущих присоединенную массу // Строит. механика и расчет сооружений. 2014. № 6. С. 59–61.
8. **Серегин С. В., Лейзерович Г. С.** Свободные колебания бесконечно длинной круговой цилиндрической оболочки с начальными неправильностями и малой присоединенной массой // Учен. зап. Комс.-на-Амуре гос. техн. ун-та. 2014. Т. 1, № 4. С. 36–43.

9. **СерEGIN С. В.** Численное и аналитическое исследование свободных колебаний круговых цилиндрических оболочек, несущих присоединенную массу, линейно распределенную вдоль образующей // Вычисл. механика сплошных сред. 2014. Т. 7, № 4. С. 378–384.
10. **Вольмир А. С.** Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972.
11. **СерEGIN С. В., Лейзерович Г. С.** Влияние присоединенной массы на динамические характеристики тонкой оболочки // Пробл. машиностроения и автоматизации. 2015. № 4. С. 83–89.
12. **СерEGIN С. В.** Динамика тонких цилиндрических оболочек с присоединенной массой. Комсомольск-на-Амуре: Комс.-на-Амуре гос. техн. ун-т, 2016.

*Поступила в редакцию 6/V 2014 г.,  
в окончательном варианте — 16/VI 2015 г.*

---