ПМТФ, № 2, 1960

ОБ ОБЩЕМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ПОЛЕЙ[1]

И. И. Данилюк

(*Новосибирск*)

Условие несжимаемости и отсутствие источников и вихрей в поле осесимметрического течения жидкости в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x}(rV_x) + \frac{\partial}{\partial r}(rV_r) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial x}V_r - \frac{\partial}{\partial r}V_x = 0 \tag{0.1}$$

где V_x и V_r — проекции скорости $\mathbf{V}$ на оси x и r. Если ввести обозначения

$$f(x,y) = V_r + iV_x, \qquad z = x + ir, \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial r}\right)$$

то два уравнения (0.1) эквивалентны комплексному уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} - \frac{1}{4ir}f - \frac{1}{4ir}\bar{f} = 0 \tag{0.2}$$

К исследованию уравнения (0.2) не применима теория обобщенных аналитических функций [1], поскольку в области, содержащей часть оси $r = 0$ в качестве границы, коэффициенты уравнения не принадлежат L_p, $p > 2$.

Однако каждое решение (0.2) допускает аналитическое продолжение в область комплексных значений аргументов x и r с достаточно малыми мнимыми частями. Положим $z = x + ir$, $\zeta = x - ir$, так что $z = \bar{\zeta}$ тогда и только тогда, когда переменные x и r действительны, и определим новую функцию $F(z, \zeta)$ по формуле

$$F(z,\zeta) = f\left(\frac{z+\zeta}{2}, \ \frac{z-\zeta}{2i}\right)$$

Функция $F(z, \zeta)$ аналитична по переменным z и ζ, и областью ее определения будет некоторая четырехмерная окрестность плоскости $\Sigma : z = \bar{\zeta}$ расположенная в комплексном двумерном пространстве. В силу (0.2) она удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial F(z, \zeta)}{\partial \zeta} - \frac{1}{2}\frac{1}{z-\zeta}F(z, \zeta) - \frac{1}{2}\frac{1}{z-\zeta}F^*(\zeta, z) = 0 \tag{0.3}$$

Здесь и в дальнейшем $F^*(\zeta, z)$ обозначает функцию, определенную по формуле

$$F^*(\zeta, z) = \overline{F(\bar{\zeta}, \bar{z})}$$

При $z = \bar{\zeta}$ уравнение (0.3) совпадает с уравнением (0.2), а любое решение $F(z, \zeta)$ совпадает с некоторым решением $f(x,r)$ уравнения (0.2).

В работе получено общее представление всех регулярных решений (0.3) через одну аналитическую функцию, а также установлены необходимые и достаточные условия ограниченности решений на оси $r = 0$.

§ 1. О связи между уравнениями первого и второго порядка. Рассмотрим уравнение вида (0.3)

$$\frac{\partial F(z, \zeta)}{\partial \zeta} + A(z, \zeta)F(z, \zeta) + B(z, \zeta)F^*(\zeta, z) = 0 \tag{1.1}$$

в котором $A(z, \zeta)$ и $B(z, \zeta)$ — заданные аналитические функции в некоторой цилиндрической области $(D_z \times D_\zeta)$ пространства двух комплексных переменных z и ζ, причем область D_ζ получается из области D_z зеркальным отражением относительно действительной оси. Поменяв в этом уравнении переменные z и ζ на $\bar{\zeta}$ и $\bar{z}$ соответственно и перейдя к комплексносопряженным значениям, получим эквивалентное уравнение:

$$\frac{\partial F^*(\zeta, z)}{\partial z} + A^*(\zeta, z)F^*(\zeta, z) + B^*(\zeta, z)F(z, \zeta) = 0 \tag{1.2}$$

---

[1] Основные результаты работы без доказательств опубликованы в статье [8].

Дифференцируя (1.1) по z, получим:

$$\frac{\partial^2 F(z,\zeta)}{\partial z \partial \zeta} + A(z,\zeta)\frac{\partial F(z,\zeta)}{\partial z} + B(z,\zeta)\frac{\partial F^*(\zeta,z)}{\partial z} + \\ + \frac{\partial A(z,\zeta)}{\partial z}F(z,\zeta) + \frac{\partial B(z,\zeta)}{\partial z}F^*(\zeta,z) \equiv 0$$

В силу (1.2) последнее соотношение можно представить в виде:

$$\frac{\partial^2 F(z,\zeta)}{\partial z \partial \zeta} + A(z,\zeta)\frac{\partial F(z,\zeta)}{\partial z} + \left[\frac{\partial A(z,\zeta)}{\partial z} - B(z,\zeta)B^*(\zeta,z)\right]F(z,\zeta) + \\ + \left[\frac{\partial B(z,\zeta)}{\partial z} - B(z,\zeta)A^*(\zeta,z)\right]F^*(\zeta,z) \equiv 0 \qquad (1.3)$$

Предположим, что для некоторой аналитической функции $C_1(z,\zeta)$ с той же областью $(D_z \times D_\zeta)$ определения и регулярности имеют место тождества

$$\frac{\partial A(z,\zeta)}{\partial z} - B(z,\zeta)B^*(\zeta,z) = -C_1(z,\zeta)A(z,\zeta) \qquad (1.4)$$

$$\frac{\partial B(z,\zeta)}{\partial z} - B(z,\zeta)A^*(\zeta,z) = -C_1(z,\zeta)B(z,\zeta)$$

Тогда из (1.3) получим уравнение

$$\frac{\partial^2 F(z,\zeta)}{\partial z \, \partial \zeta} + A(z,\zeta)\frac{\partial F(z,\zeta)}{\partial z} + C_1(z,\zeta)\frac{\partial F(z,\zeta)}{\partial \zeta} = 0 \qquad (1.5)$$

Таким образом, в предположении (1.4) всякое решение уравнения (1.1) является решением и уравнения (1.5). Обратное утверждение, очевидно, не имеет места, поскольку общее представление решений уравнения (1.5) содержит две произвольные аналитические функции одного комплексного аргумента [3], а общее представление всех регулярных решений уравнения (1.1) содержит одну произвольную аналитическую функцию одного комплексного аргумента [2]. Поэтому для того, чтобы имело место и обратное утверждение относительно некоторого класса решений между двумя аналитическими функциями из общего представления решений (1.5), должна существовать некоторая зависимость.

Обозначим через $G(z, \zeta, t, \tau)$ функцию Римана уравнения (1.5).

С ее помощью все регулярные решения уравнения (1.5) представляются по формуле [3]:

$$F(z,\zeta) = \alpha G(z_0,\zeta_0,z,\zeta) + \int_{z_0}^{z} \varphi(t)G(t,\zeta_0,z,\zeta)\,dt + \int_{\zeta_0}^{\zeta} \varphi_1(\tau)G(z_0,\tau,z,\zeta)\,d\tau \qquad (1.6)$$

Здесь

$$\alpha = F(z_0,\zeta_0), \qquad \varphi(z) = \frac{\partial F(z,\zeta_0)}{\partial z} + C_1(z,\zeta_0)F(z,\zeta_0) \qquad (1.7)$$

$$\varphi_1(\zeta) = \frac{\partial F(z_0,\zeta)}{\partial \zeta} + A(z_0,\zeta)F(z_0,\zeta)$$

и z_0, ζ_0 — произвольно зафиксированные точки, $z_0 \in D_z$, $\zeta_0 \in D_\zeta$. Обратно, формула (1.6) для любых α, z_0, ζ_0, $\varphi(t)$, $\varphi_1(\tau)$ дает регулярное решение уравнения (1.5), причем функции $F(z,\zeta)$, $\varphi(t)$ и $\varphi_1(\tau)$ связаны соотношениями (1.7). В силу уравнения (1.1) последнее из соотношений (1.7) может быть переписано

$$\varphi_1(\zeta) = -B(z_0,\zeta)F^*(\zeta,z_0), \qquad \zeta \in D_\zeta$$

или (1.8)

$$\overline{\varphi_1(\bar z)} = -\overline{B(z_0,\bar z)}F(z,\bar z_0), \qquad z \in D_z$$

Точки z_0 и ζ_0 можно фиксировать так, чтобы $z_0 = \bar\zeta_0$. Тогда из (1.8) получим:

$$F(z,\zeta_0) = -\frac{1}{\overline{B(z_0,\bar z)}}\overline{\varphi_1(\bar z)}$$

в предположении, что $B(z_0, \zeta)$ не обращается в нуль. Но тогда из второго соотношения (1.7) после простых вычислений получаем: (1.9)

$$\varphi(z) = -\frac{1}{\overline{B(z_0, \bar{z})}} \frac{d\overline{\varphi_1(\bar{z})}}{dz} + \frac{1}{\overline{B^2(z_0, \bar{z})}} \left[\frac{\partial \overline{B(z_0, \bar{z})}}{\partial z} - C_1(z, \zeta_0) \overline{B(z_0, \bar{z})}\right] \overline{\varphi_1(\bar{z})}$$

Таким образом, всякое решение уравнения (1.1) представимо по формуле (1.6), причем аналитические функции $\varphi(z)$ и $\varphi_1(\zeta)$, $z \in D_z$, $\zeta \in D_\zeta$, связаны дифференциальным уравнением (1.9).

Докажем теперь обратное утверждение. С этой целью положим

$$\frac{\partial F(z, \zeta)}{\partial \zeta} + A(z, \zeta) F(z, \zeta) + B(z, \zeta) F^*(\zeta, z) \equiv \Omega(z, \zeta) \qquad (1.10)$$

и докажем, что $\Omega(z, \zeta) \equiv 0$. Дифференцируя по z, получим:

$$\frac{\partial^2 F(z, \zeta)}{\partial z \partial \zeta} + A(z, \zeta) \frac{\partial F(z, \zeta)}{\partial z} + B(z, \zeta) \frac{\partial F^*(\zeta, z)}{\partial z} + \\ + \frac{\partial A(z, \zeta)}{\partial z} F(z, \zeta) + \frac{\partial B(z, \zeta)}{\partial z} F^*(\zeta, z) \equiv \frac{\partial \Omega(z, \zeta)}{\partial z}$$

Однако $F(z, \zeta)$ удовлетворяет уравнению (1.5), поэтому предыдущее тождество, с учетом соотношений (1.4), можно представить в виде:

$$-C_1(z, \zeta) \frac{\partial F(z, \zeta)}{\partial \zeta} + [B(z, \zeta) B^*(\zeta, z) - C_1(z, \zeta) A(z, \zeta)] F(z, \zeta) + \\ + [B(z, \zeta) A^*(\zeta, z) - C_1(z, \zeta) B(z, \zeta)] F^*(\zeta, z) + B(z, \zeta) \frac{\partial F^*(\zeta, z)}{\partial z} \equiv \\ \equiv -C_1(z, \zeta)\left[\frac{\partial F(z, \zeta)}{\partial \zeta} + A(z, \zeta) F(z, \zeta) + B(z, \zeta) F^*(\zeta, z)\right] + \\ + B(z, \zeta)\left[\frac{\partial F^*(\zeta, z)}{\partial z} + A^*(\zeta, z) F^*(\zeta, z) + B^*(\zeta, z) F(z, \zeta)\right] \equiv \frac{\partial \Omega(z, \zeta)}{\partial z}$$

так что в силу (1.10) имеем

$$\frac{\partial \Omega(z, \zeta)}{\partial z} + C_1(z, \zeta) \Omega(z, \zeta) - B(z, \zeta) \Omega^*(\zeta, z) \equiv 0 \qquad (1.11)$$

Это значит, что функция (1.10) удовлетворяет уравнению, незначительно отличающемуся от (1.1). В силу (1.10) третье соотношение (1.7) дает

$$\Omega(z_0, \zeta) = \frac{\partial F(z_0, \zeta)}{\partial \zeta} + A(z_0, \zeta) F(z_0, \zeta) + B(z_0, \zeta) F^*(\zeta, z_0) = \\ = \varphi_1(\zeta) + B(z_0, \zeta) F^*(\zeta, z_0) \qquad (1.12)$$

Продифференцируем это тождество по ζ и учтем второе соотношение (1.7); получим:

$$\frac{\partial \Omega(z_0, \zeta)}{\partial \zeta} = \frac{d\varphi_1(\zeta)}{d\zeta} + B(z_0, \zeta) \frac{\partial F^*(\zeta, z_0)}{\partial \zeta} + \frac{\partial B(z_0, \zeta)}{\partial \zeta} F^*(\zeta, z_0) = \qquad (1.13) \\ = \frac{d\varphi_1(\zeta)}{d\zeta} + B(z_0, \zeta)[\overline{\varphi(\bar{\zeta})} - C_1^*(\zeta, z_0) F^*(\zeta, z_0)] + \frac{\partial B(z_0, \zeta)}{\partial \zeta} F^*(\zeta, z_0) \equiv \\ \equiv \frac{d\varphi_1(\zeta)}{d\zeta} + B(z_0, \zeta) \overline{\varphi(\bar{\zeta})} + \left[\frac{\partial B(z_0, \zeta)}{\partial \zeta} - B(z_0, \zeta) C_1^*(\zeta, z_0)\right] F^*(\zeta, z_0)$$

Исключив из тождеств (1.12) и (1.13) $F^*(\zeta, z_0)$, получим:

$$\frac{\partial \Omega(z_0, \zeta)}{\partial \zeta} - \frac{d\varphi_1(\zeta)}{d\zeta} + B(z_0, \zeta) \overline{\varphi(\bar{\zeta})} + \left[\frac{\partial B(z_0, \zeta)}{\partial \zeta} - B(z_0, \zeta) C_1^*(\zeta, z_0)\right] \times \\ \times \frac{\Omega(z_0, \zeta) - \varphi_1(\zeta)}{B(z_0, \zeta)} \equiv \left\{\frac{d\varphi_1(\zeta)}{d\zeta} + B(z_0, \zeta)\left[\overline{\varphi(\bar{\zeta})} - \frac{1}{B^2(z_0, \zeta)} \times \right.\right. \\ \left.\left. \times \left(\frac{\partial B(z_0, \zeta)}{\partial \zeta} - B(z_0, \zeta) C_1^*(\zeta, z_0)\right) \varphi_1(\zeta)\right]\right\} + \\ + \frac{1}{B(z_0, \zeta)}\left[\frac{\partial B(z_0, \zeta)}{\partial \zeta} - B(z_0, \zeta) C_1^*(\zeta, z_0)\right] \Omega(z_0, \zeta) \qquad (1.14)$$

Однако из тождества (1.9) следует, что

$$\overline{\varphi(\bar{\zeta})} = -\frac{1}{B(z_0, \zeta)}\frac{d\varphi_1(\zeta)}{d\zeta} + \frac{1}{B^2(z_0, \zeta)}\left[\frac{\partial B(z_0, \zeta)}{\partial \zeta} - C_1^*(\zeta, z_0) B(z_0, \zeta)\right]\varphi_1(\zeta)$$

так что фигурная скобка в (1.14) равна нулю и мы получаем:

$$\frac{\partial \Omega(z_0, \zeta)}{\partial \zeta} = \frac{1}{B(z_0, \zeta)}\left[\frac{\partial B(z_0, \zeta)}{\partial \zeta} - B(z_0, \zeta) C_1^*(\zeta, z_0)\right]\Omega(z_0, \zeta) \qquad (1.15)$$

Если задана только функция $\varphi(z)$, то $\varphi_1(\zeta)$ определится однозначно, если мы зададим значение $\varphi_1(\zeta)$ в некоторой точке ζ_1. Положим:

$$\zeta_1 = \zeta_0, \qquad \varphi_1(\zeta_0) = -B(z_0, \zeta_0) F^*(\zeta_0, z_0) = -\bar{\alpha} B(z_0, \zeta_0) \qquad (1.16)$$

Тогда из (1.12) получим $\Omega(z_0, \zeta_0) = 0$ и так как (1.15) представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение относительно функции $\psi(\zeta) \equiv \Omega(\zeta_0, \zeta)$, то из условия $\psi(\zeta_0) = 0$ следует, что $\psi(\zeta) \equiv \Omega(z_0, \zeta) \equiv 0$. Однако, как показано в статье [2], решения уравнения вида (1.1), удовлетворяющие начальному условию $F(z_0, \zeta) = 0$, тождественно равны нулю. Поэтому $\Omega(z, \zeta) \equiv 0$.

Теорема 1.1. Пусть коэффициенты в (1.1) удовлетворяют условиям (1.4), причем $B(z_0, \zeta) \neq 0$ при $\zeta \in D_\zeta$, $z_0 \in D_z$, $\zeta_0 = \bar{z}_0$. Тогда любое регулярное в области $(D_z \times D_\zeta)$ решение уравнения (1.1) может быть представлено по формуле (1.6), в которой $G(z, \zeta, t, \tau)$ — функция Римана уравнения (1,5), причем функции $\varphi(z)$ и $\varphi_1(\zeta)$ связаны уравнением (1.9) и соотношением (1.16). Обратно, если две аналитические функции $\varphi(z)$ и $\varphi_1(\zeta)$, $z \in D_z$, $\zeta \in D_\zeta$, связаны уравнением (1.9), причем выполняется условие (1.16), то формула (1.6) при любом значении постоянной α дает решение уравнения (1.1).

§ 2. Общее представление всех регулярных решений уравнения (1.1). Это представление получим из формулы (1.6), если вместо $\varphi(t)$ подставим ее выражение через $\overline{\varphi_1(\bar{t})} \equiv \varphi_1^*(t)$ согласно уравнению (1.9):

$$F(z, \zeta) = \alpha G(z_0, \zeta_0, z, \zeta) + \int_{\zeta_0}^{\zeta} \varphi_1(\tau) G(z_0, \tau, z, \zeta)\, d\tau + \int_{z_0}^{z}\left\{-\frac{1}{B^*(\zeta_0, t)}\frac{d\varphi_1^*(t)}{dt} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{B^{*2}(\zeta_0, t)}\left[\frac{\partial B^*(\zeta_0, t)}{\partial t} - C_1(t, \zeta_0) B^*(\zeta_0, t)\right] \varphi_1^*(t)\right\} G(t, \zeta_0, z, \zeta)\, dt$$

Воспользовавшись формулой интегрирования по частям для преобразования второго интеграла, получим:

$$F(z, \zeta) = \alpha G(z_0, \zeta_0, z, \zeta) + \frac{\varphi_1^*(z_0)}{B^*(\zeta_0, z_0)} G(z_0, \zeta_0, z, \zeta) - \frac{\varphi_1^*(z)}{B^*(\zeta_0, z)} G(z, \zeta_0, z, \zeta) +$$

$$+ \int_{z_0}^{z}\left[\frac{\partial G(t, \zeta_0, z, \zeta)}{\partial t} - C_1(t, \zeta_0) G(t, \zeta_0, z, \zeta)\right]\frac{\varphi_1^*(t)}{B^*(\zeta_0, t)}\, dt + \int_{\zeta_0}^{\zeta} G(z_0, \tau, z, \zeta) \varphi_1(\tau)\, d\tau$$

Заметим, что в силу условия (1.16) первые два слагаемых в последней формуле взаимно сокращаются. Поэтому окончательно получаем:

$$F(z, \zeta) = -\frac{\varphi_1^*(z)}{B^*(\zeta_0, z)} G(z, \zeta_0, z, \zeta) + \int_{\zeta_0}^{\zeta} G(z_0, \tau, z, \zeta) \varphi_1(\tau)\, d\tau +$$

$$+ \int_{z_0}^{z}\left[\frac{\partial G(t, \zeta_0, z, \zeta)}{\partial t} - C_1(t, \zeta_0) G(t, \zeta_0, z, \zeta)\right]\frac{\varphi_1^*(t)}{B^*(\zeta_0, t)}\, dt \qquad (2.1)$$

В этой формуле содержатся все регулярные решения уравнения (1.1), если $\varphi_1(\zeta)$ пробегает множество всех регулярных аналитических в области D_ζ функций, поскольку постоянная α в формуле (1,6) выбирается произвольно. Из формулы (2.1) следует, что функции:

$$\Gamma_1(z, \zeta, t, \zeta_0) = \frac{-1}{G(z, \zeta_0, z, \zeta)}\left[\frac{\partial G(t, \zeta_0, z, \zeta)}{\partial t} - C_1(t, \zeta_0) G(t, \zeta_0, z, \zeta)\right]$$

$$\Gamma_2(z, \zeta, z_0, \tau) = -\frac{1}{G(z, \zeta_0, z, \zeta)} G(z_0, \tau, z, \zeta) B(z_0, \tau) \tag{2.2}$$

являются резольвентами [2] общего представления решений (1.1).

§ 3. Общее представление множества регулярных решений уравнений (0.3). Уравнение (0.3) получается из (1.1) при

$$A(z, \zeta) = -\frac{1}{2}\frac{1}{z-\zeta}, \qquad B(z, \zeta) = -\frac{1}{2}\frac{1}{z-\zeta} \tag{3.1}$$

Эти функции аналитичны на топологическом произведении верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ на нижнюю $\operatorname{Im}\zeta < 0$. Легко проверяется, что условия (1.4) имеют место при следующем значении функции $C_1(z, \zeta)$:

$$C_1(z, \zeta) = \frac{1}{2}\frac{1}{z-\zeta}$$

Поэтому уравнение (1.5) в этом случае имеет вид

$$\frac{\partial^2 F(z, \zeta)}{\partial z \partial \zeta} - \frac{1}{2}\frac{1}{z-\zeta}\frac{\partial F(z, \zeta)}{\partial z} + \frac{3}{2}\frac{1}{z-\zeta}\frac{\partial F(z, \zeta)}{\partial \zeta} = 0 \tag{3.2}$$

Это уравнение есть частный случай уравнения Эйлера — Пуассона

$$\frac{\partial^2 F(z, \zeta)}{\partial z \partial \zeta} - \frac{\beta'}{z-\zeta}\frac{\partial F(z, \zeta)}{\partial z} + \frac{\beta}{z-\zeta}\frac{\partial F(z, \zeta)}{\partial \zeta} = 0 \tag{3.3}$$

соответствующий значениям

$$\beta' = \frac{1}{2}, \qquad \beta = \frac{3}{2}$$

Известно (см., напр., [4], гл. III), что функция Римана уравнения (3.3) выражается через гипергеометрическую функцию $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$:

$$G(z, \zeta, t, \tau) = (\tau - z)^{-\beta'}(\zeta - t)^{-\beta}(\zeta - z)^{\beta+\beta'} F(\beta', \beta, 1, \sigma)$$

где для краткости введено обозначение

$$\sigma = \frac{(z-t)(\zeta-\tau)}{(z-\tau)(\zeta-t)}$$

Поэтому функцией Римана уравнения (3.2) будет

$$G(z, \zeta, t, \tau) \equiv (\zeta - z)^2(\tau - z)^{-1/2}(\zeta - t)^{-3/2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1, \sigma\right) \tag{3.4}$$

с тем же значением σ. Если z и t меняются в верхней полуплоскости, а ζ и τ — в нижней, то при $z = \bar{\zeta}$, а значит, и в некоторой окрестности плоскости Σ величина σ по модулю меньше 1. Воспользовавшись известной формулой ([5], стр. 307, № 39)

$$F(\alpha, \beta, \gamma, \sigma) = (1-\sigma)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, \sigma)$$

для нашего случая получим:

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1, \sigma\right) = (1-\sigma)^{-1} F\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, \sigma\right)$$

и так как ([6], стр. 330)

$$E(\sqrt{\sigma}) = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, \sigma\right)$$

где $E(z)$ — полный эллиптический интеграл второго рода:

$$E(z) = \int_0^{\pi/2} (1 - z^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}\, d\varphi$$

то окончательно:

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1, \sigma\right) = (1-\sigma)^{-1} \frac{2}{\pi} E(\sqrt{\sigma}) \equiv \frac{(z-\tau)(\zeta - t)}{(z-\zeta)(\tau - t)} \frac{2}{\pi} E(\sqrt{\sigma})$$

Поэтому формулу (3.4) можно представить в виде:

$$G(z, \zeta, t, \tau) = \frac{2}{\pi} \frac{\zeta - z}{\tau - t} \sqrt{\frac{\tau - z}{\zeta - t}}\, E(\sqrt{\sigma})$$

Отсюда получим функции, входящие в представления (1.6) и (2.1):

$$G(z, \zeta_0, z, \zeta) = \sqrt{\frac{\zeta_0 - z}{\zeta - z}}$$

$$G(z_0, \zeta_0, z, \zeta) = \frac{2}{\pi} \frac{\zeta_0 - z_0}{\zeta - z} \sqrt{\frac{\zeta - z_0}{\zeta_0 - z}}\, E(\sqrt{\sigma_0}), \quad \sigma_0 = \frac{(z_0 - z)(\zeta_0 - \zeta)}{(z_0 - \zeta)(\zeta_0 - z)}$$

$$G(t, \zeta_0, z, \zeta) = \frac{2}{\pi} \frac{\zeta_0 - t}{\zeta - z} \sqrt{\frac{\zeta - t}{\zeta_0 - z}}\, E(\sqrt{\sigma_1}), \quad \sigma_1 = \frac{(t - z)(\zeta_0 - \zeta)}{(t - \zeta)(\zeta_0 - z)}$$

$$G(z_0, \tau, z, \zeta) = \frac{2}{\pi} \frac{\tau - z_0}{\zeta - z} \sqrt{\frac{\zeta - z_0}{\tau - z}}\, E(\sqrt{\sigma_2}), \quad \sigma_2 = \frac{(z_0 - z)(\tau - \zeta)}{(z_0 - \zeta)(\tau - z)}$$

Поэтому из формулы (1.6) получим:

$$F(z, \zeta) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\zeta - z} \left\{ \alpha(\zeta_0 - z_0) \sqrt{\frac{\zeta - z_0}{\zeta_0 - z}}\, E(\sqrt{\sigma_0}) + \right. \tag{3.5}$$

$$\left. + \int_{z_0}^{z} \varphi(t)(\zeta_0 - t) \sqrt{\frac{\zeta - t}{\zeta_0 - z}}\, E(\sqrt{\sigma_1})\, dt + \int_{\zeta_0}^{\zeta} \varphi_1(\tau)(\tau - z_0) \sqrt{\frac{\zeta - z_0}{\tau - z}}\, E(\sqrt{\sigma_2})\, d\tau \right\}$$

Поскольку

$$\overline{B(z_0, \bar{z})} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\zeta_0 - z}, \qquad \frac{\overline{\partial B(z_0, \bar{z})}}{\partial z} = -\frac{1}{2} \frac{1}{(\zeta_0 - z)^2}, \qquad \zeta_0 = \bar{z}_0$$

то из (1.9) имеем также

$$\varphi(z) = 2(\zeta_0 - z) \frac{d\varphi_1^*(z)}{dz} - 5\varphi_1^*(z) \tag{3.6}$$

Формула (3.5) определяет весь класс регулярных решений уравнения (0.3) в бицилиндре $D_z \times D_\zeta$ где D_z — некоторая область в верхней полуплоскости, возможно примыкающая к действительной оси, а D_ζ — область в нижней полуплоскости, симметричная D_z относительно $r = 0$. При этом $z, t \in D_z$, $\zeta, \tau \in D_\zeta$. Полагая в формуле (3.5) $z = \bar{\zeta}$, получим бесконечное множество регулярных решений уравнения (0.2) в области D_z:

$$f(x, r) \equiv F(z, \bar{z}) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{ir} \left\{ \alpha(\zeta_0 - z_0) \sqrt{\frac{\bar{z} - z_0}{\zeta_0 - z}}\, E(\sqrt{\sigma_0'}) + \right. \tag{3.7}$$

$$\left. + \int_{z_0}^{z} \varphi(t)(\zeta_0 - t) \sqrt{\frac{\bar{z} - t}{\zeta_0 - z}}\, E(\sqrt{\sigma_1'})\, dt + \int_{\zeta_0}^{\bar{z}} \varphi_1(\tau)(\tau - z_0) \sqrt{\frac{\bar{z} - z_0}{\tau - z}}\, E(\sqrt{\sigma_2'})\, dt \right\}$$

где

$$\sigma_0' = \frac{(z_0 - z)(\zeta_0 - \bar{z})}{(z_0 - \bar{z})(\zeta_0 - z)}, \qquad \sigma_1' = \frac{(t - z)(\zeta_0 - \bar{z})}{(t - \bar{z})(\zeta_0 - z)}, \qquad \sigma_2' = \frac{(z_0 - z)(\tau - \bar{z})}{(z_0 - \bar{z})(\tau - z)}$$

На вопрос о том, исчерпывает ли формула (3.7) все регулярные решения в области D_z, дан положительный ответ в рабатах И. Н. Векуа.

Поскольку функция $f(x, r)$, как нетрудно получить из результатов § 2, удовлетворяет эллиптическому уравнению второго порядка, то в силу одной теоремы из книги [3] (§ 9, стр. 40), аналитическое продолжение $F(z, \zeta)$ решения $f(x, r)$ в области аргументов z и ζ определено и регулярно в бицилиндре $(D_z \times D_\zeta)$, в котором определено и регулярно продолжение коэффициентов уравнения.

§ 4. Необходимые условия ограниченности решения на оси $r = 0$. Введем обозначение:

$$\Phi(z, \zeta) = \frac{2}{\pi}\left\{\alpha(\zeta_0 - z_0) E(\sqrt{\sigma_0}) \sqrt{\frac{\zeta - z_0}{\zeta_0 - z}} + \right. \tag{4.1}$$

$$\left. + \int_{z_0}^{z} \varphi(t)(\zeta_0 - t) \sqrt{\frac{\zeta - t}{\zeta_0 - z}} E(\sqrt{\sigma_1})\, dt + \int_{\zeta_0}^{\zeta} \varphi_1(\tau)(\tau - z_0) \sqrt{\frac{\zeta - z_0}{\tau - z}} E(\sqrt{\sigma_2})\, d\tau \right\}$$

Тогда функция $F(z, \zeta)$ может быть записана в виде:

$$F(z, \zeta) = \frac{\Phi(z, \zeta)}{\zeta - z} \tag{4.2}$$

а функция $F(z, \bar{z})$ в виде:

$$f(x, r) = F(z, \bar{z}) = \frac{\Phi(z, \bar{z})}{-2ir} \tag{4.3}$$

Очевидно, что для ограниченности $f(x, r)$ при $r \to 0$ необходимо, чтобы функция $\Phi(x, x) = \lim \Phi(x + ir,\ x - ir)$ при $r \to 0$ обращалась в нуль при любом допустимом x. Вычислим выражения $\Phi(x, x)$, пользуясь (4.1):

$$\Phi(x, x) = \frac{2}{\pi}\left\{\alpha(\zeta_0 - z_0) \sqrt{\frac{x - z_0}{\zeta_0 - x}} + \int_{z_0}^{x} \varphi(t)(\zeta_0 - t) \sqrt{\frac{x - t}{\zeta_0 - x}}\, dt + \right.$$

$$\left. + \int_{\zeta_0}^{x} \varphi_1(\tau)(\tau - z_0) \sqrt{\frac{x - z_0}{\tau - x}}\, d\tau \right\} \tag{4.4}$$

и вспомним теперь формулы (1.8), (3.1), в силу которых

$$\varphi_1^*(x) = \lim_{\tau \to x} \varphi_1^*(\tau) = \frac{1}{2} \frac{1}{\bar{z}_0 - x} F(x, \bar{z}_0) \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{2} \frac{1}{\bar{z}_0 - x} f\left(\frac{x + x_0 - ir_0}{2},\ \frac{x - x_0 + ir_0}{2i}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{\bar{z}_0 - x} f\left(\frac{x + x_0}{2} - i\frac{r_0}{2},\ \frac{r_0}{2} + \frac{x - r_0}{2i}\right), \qquad r_0 > 0,\ z_0 = x_0 + ir_0$$

Отсюда следует, что при достаточно малых $r_0 > 0$ и $x - x_0$ функция $\varphi_1^*(x)$ аналитична. Это значит, что и функция $\varphi(x)$ аналитична на действительной оси и имеет место уравнение (3.6). Из (4.4) и (3.6) следует:

$$\frac{\pi}{2}\Phi(x, x) = \alpha(\zeta_0 - z_0) \sqrt{\frac{x - z_0}{\zeta_0 - x}} + \int_{\zeta_0}^{x} \varphi_1(\tau)(\tau - z_0) \sqrt{\frac{x - z_0}{\tau - x}}\, d\tau +$$

$$+ \int_{z_0}^{x} \left[2(\zeta_0 - t)\overline{\frac{d\varphi_1(\bar{t})}{dt}} - 5\overline{\varphi_1(\bar{t})}\right](\zeta_0 - t) \sqrt{\frac{x - t}{\zeta_0 - x}}\, dt =$$

$$= \alpha(\zeta_0 - z_0) \sqrt{\frac{x - z_0}{\zeta_0 - x}} + 2\int_{z_0}^{x} (\zeta_0 - t)^2 \overline{\frac{d\varphi_1(\bar{t})}{dt}} \sqrt{\frac{x - t}{\zeta_0 - x}}\, dt -$$

$$- 5\int_{z_0}^{x} \overline{\varphi_1(\bar{t})}(\zeta_0 - t) \sqrt{\frac{x - t}{\zeta_0 - x}}\, dt + \int_{\zeta_1}^{x} \varphi_1(\tau)(\tau - z_0) \sqrt{\frac{x - z_0}{\tau - x}}\, d\tau \tag{4.5}$$

Преобразуя теперь интеграл, содержащий производную $d\overline{\varphi_1(\bar t)}/dt$, согласно формуле интегрирования по частям, получаем:

$$\int_{z_0}^{x} (\zeta_0 - t)^2 \sqrt{\frac{x-t}{\zeta_0 - x}} \frac{d\overline{\varphi_1(\bar t)}}{dt} dt = (\zeta_0 - t)^2 \sqrt{\frac{x-t}{\zeta_0 - x}} \overline{\varphi_1(\bar t)} \Big|_{t=z_0}^{t=x} -$$
$$- \int_{z_0}^{x} \overline{\varphi_1(\bar t)} \left[-2(\zeta_0 - t)\sqrt{\frac{x-t}{\zeta_0 - x}} + (\zeta_0 - t)^2 \frac{-1}{2\sqrt{(\zeta_0 - x)(x-t)}}\right] dt =$$
$$= -(\zeta_0 - z_0)^2 \sqrt{\frac{x - z_0}{\zeta_0 - x}} \overline{\varphi_1(\bar z_0)} + \int_{z_0}^{x} \frac{\zeta_0 - t}{\sqrt{\zeta_0 - x}} \left(2\sqrt{x-t} + \frac{\zeta_0 - t}{2\sqrt{x-t}}\right) \overline{\varphi_1(\bar t)}\, dt \tag{4.6}$$

Учтем также, что согласно соотношению (1.16):

$$\overline{\varphi_1(\bar z_0)} = \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\zeta_0 - z_0}$$

Подставляя формулу (4.6) в формулу (4.5), после простых преобразований получим

$$\frac{\pi}{2}\Phi(x, x) = \int_{\zeta_0}^{x} \varphi_1(\tau)(\tau - z_0)\sqrt{\frac{x - z_0}{\tau - x}} d\tau - \int_{z_0}^{x} \overline{\varphi_1(\bar t)}(t - \zeta_0)\sqrt{\frac{x - \zeta_0}{t - x}} dt$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\pi}{2}\Phi(x, x) = \int_{\zeta_0}^{x} \varphi_1(\tau)(\tau - z_0)\sqrt{\frac{x - z_0}{\tau - x}} - \int_{\bar z_0}^{x} \overline{\varphi_1(\tau)}(\bar\tau - \bar z_0)\sqrt{\frac{x - \bar\zeta_0}{\bar\tau - x}} d\bar\tau =$$
$$= -2i \quad \mathrm{e}\left\{i\int_{\zeta_0}^{x} \varphi_1(\tau)(\tau - z_0)\sqrt{\frac{x - z_0}{\tau - x}} d\tau\right\}$$

поскольку $z_0 = \bar\zeta_0$. Поэтому необходимым условием ограниченности решения $f(x, r)$ на оси $r = 0$ является тождество

$$\mathrm{Re}\left\{i\int_{\zeta_0}^{x} \varphi_1(\tau)(\tau - z_0)\sqrt{\frac{x - z_0}{\tau - x}} d\tau\right\} = 0 \tag{4.7}$$

для всех x граничного отрезка L действительной оси.

Функции $\varphi(z)$ и $\varphi_1(\zeta)$ из формул (1.6) и (1.7) зависят от двух точек z и z_0: $\varphi(z) \equiv \varphi(z, z_0)$, $\varphi_1(\zeta) = \varphi_1(\zeta, z_0)$, если решение $f(x, r)$ задано. В силу же формул (1.8) и (3.1) имеем:

$$\varphi_1^*(z, z_0) = \frac{1}{2}\frac{1}{\bar z_0 - z} F(z, \zeta_0) \equiv f\left(\frac{z + \zeta_0}{2}, \frac{z - \zeta_0}{2i}\right)\frac{1}{2}\frac{1}{\bar z_0 - z} =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\bar z_0 - z} f\left(\frac{x + x_0}{2} + i\frac{r - r_0}{2}, \frac{r + r_0}{2} + \frac{x - x_0}{2i}\right)$$

Отсюда следует, что существует предел $\varphi_1^*(z) = \lim \varphi_1^*(z, z_0)$ при $r_0 \to 0$ (причем этот предел является аналитической функцией по z, когда z меняется строго внутри области D_z), и

$$\varphi_1^*(z) \equiv \frac{1}{2}\frac{1}{x_0 - z} f\left(\frac{x + x_0}{2} + i\frac{r}{2}, \frac{r}{2} + \frac{x - x_0}{2i}\right)$$

так что произведение $\Phi_1^*(z) = (x_0 - z)\varphi_1^*(z)$ при $z \to x_0$ имеет ограниченный предел:

$$\Phi^*(x_0) = \lim_{z \to x_0}[(x_0 - z)\varphi_1^*(z)] = \frac{1}{2} f(x_0, 0)$$

по любому некасательному пути. Кроме того, $\Phi_1^*(z)$ имеет также предел

$$\Phi_1^*(x) = \lim_{z\to x} [(x_0 - z)\,\varphi_1^*(z)] = \frac{1}{2} f\left(\frac{x + x_0}{2}, \frac{x - x_0}{2i}\right)$$

в силу аналитичности $f(x, r)$ по x и r в области $D_z + D_\zeta + L$. Совершая теперь предельный переход в тождестве (4.7) при $z_0 \to x_0$, получаем

$$\operatorname{Re}\left\{i \int_{x_0}^{x} \varphi_1(\tau)(\tau - x_0) \sqrt{\frac{x - x_0}{\tau - x}}\, d\tau\right\} = 0 \tag{4.8}$$

Считая, что интегрирование производится вдоль оси $r = 0$, получаем однородное уравнение Абеля, откуда следует, что

$$u_1(x) = \operatorname{Re}\Phi_1(x) \equiv 0 \text{ на } L, \Phi_1(\tau) = -(\tau - x_0)\,\varphi_1(\tau)$$

Таким образом, функция

$$\Phi_1(\zeta) = \begin{cases} (\zeta - x_0)\,\varphi_1(\zeta), & \zeta \in D_\zeta \\ -(\zeta - x_0)\,\overline{\varphi_1(\bar{\zeta})}, & \zeta \in D_z \end{cases} \tag{4.9}$$

будет аналитической в области $D_z + D_\zeta + L$.

Из уравнения (3.6) следует, что предел $\varphi(z) = \lim \varphi(z, \zeta_0)$ при $z_0 \to x_0$ существует и также является аналитической функцией по z, причем функция

$$\Phi(z) = \begin{cases} (x_0 - z)\,\varphi(z), & z \in D_z \\ -(x_0 - z)\,\overline{\varphi(\bar{z})}, & z \in D_\zeta \end{cases} \tag{4.10}$$

аналитична в области $D_z + D_\zeta + L$.

Если в формуле (3.5) совершить предельный переход при $z_0 \to x_0$, то получим представление

$$F(z, \zeta) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\zeta - z}\left\{\int_{x_0}^{z} \Phi(t) \sqrt{\frac{t - \zeta}{z - x_0}}\, E(\sqrt{\sigma_{10}})\, dt + \right.$$

$$\left. + \int_{x_0}^{\zeta} \Phi_1(\tau) \sqrt{\frac{\zeta - x_0}{\tau - z}}\, E(\sqrt{\sigma_{20}})\, d\tau\right\} \tag{4.11}$$

где

$$\sigma_{10} = \frac{(t - z)(x_0 - \zeta)}{(t - \zeta)(x_0 - z)}, \qquad \sigma_{20} = \frac{(\tau - \zeta)(x_0 - z)}{(\tau - z)(x_0 - \zeta)}, \qquad x_0 \in L$$

Соответствено формула (3.7) перепишется в виде

$$f(x, r) \equiv F(z, \bar{z}) = -\frac{1}{\pi} \frac{1}{ir}\left\{\int_{x_0}^{z} \Phi(t) \sqrt{\frac{t - \bar{z}}{z - x_0}}\, E(\sqrt{\sigma_1})\, dt + \right.$$

$$\left. + \int_{x_0}^{\bar{z}} \Phi_1(\tau) \sqrt{\frac{\bar{z} - x_0}{\tau - z}}\, E(\sqrt{\tilde{\sigma}_2})\, d\tau\right\}$$

$$\sigma_1 = \frac{(t - z)(x_0 - \bar{z})}{(t - \bar{z})(x_0 - z)}, \qquad \tilde{\sigma}_2 = \frac{(\tau - \bar{z})(x_0 - z)}{(\tau - z)(x_0 - \bar{z})}, \quad r > 0 \tag{4.12}$$

для всякого регулярного решения $f(x, r)$.

Теорема 4.1. Всякое регулярное на оси $r = 0$ решение уравнения (0.2) может быть представлено по формуле (4.12); функции $\Phi(z)$ и $\Phi_1(\zeta)$ допускают аналитическое продолжение согласно формулам (4.9), (4.10) в область $D_z + D_\zeta + L$ и связаны уравнением

$$\Phi(z) = 2(x_0 - z)\frac{d\Phi_1^*(z)}{dz} - 3\Phi_1^*(z) \tag{4.13}$$

Соответствующая функция $F(z, \zeta)$ представляется по формуле (4.11).

§ 5. Достаточные условия ограниченности решений на оси $r = 0$. Докажем утверждение, обратное теореме 4.1. Для этого нужно показать, что функция $f(x, r)$, построенная по формуле (4.12), регулярна при $r = 0$ и удовлетворяет уравнению (0.2) или, что то же самое, функция $F(z, \zeta)$, построенная по формуле (4.11), удовлетворяет уравнению (0.3), если функции $\Phi(z)$ и $\Phi_1(z)$ удовлетворяют условиям теоремы 4.1.

Допустим, что $\Phi_1(z)$ определена в области $D_z + D_\zeta + L$ и удовлетворяет условию

$$\Phi_1^*(z) \equiv -\overline{\Phi_1(\bar z)} = \Phi_1(z), \qquad z \in D_z + D_\zeta + L \tag{5.1}$$

эквивалентному (4.9). По функции Φ_1 согласно (4.13) построим функцию $\Phi(z, x_0)$, а согласно формуле (4.11) — функцию $F(z, \zeta)$, аналитическую по z и ζ в области $\operatorname{Im} z > 0$, $\operatorname{Im} \zeta < 0$ и удовлетворяющую уравнению (0.3). Для доказательства регулярности функции $f(x, r)$ на оси $r = 0$ мы найдем значение $\lim f(x, r)$ при $r \to 0$. С этой целью обозначим тождественно:

$$g(x) = \beta \int_0^x \Phi_1(\tau) \sqrt{\frac{x}{x - \tau}}\, d\tau$$

где β — некоторая постоянная. Функция $g(x)$ аналитична по x и в точке $x = 0$ имеет нуль. Это условие является интегральным уравнением Абеля:

$$\int_0^x \Phi_1(\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{x - \tau}} = \frac{g(x)}{\beta \sqrt{x}} \tag{5.2}$$

Отсюда

$$\Phi_1(\tau) = \frac{1}{\pi\beta} \frac{d}{d\tau} \int_0^\tau \frac{g(x)}{\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{\tau - x}}$$

для допустимых действительных значений $\tau \in L$. Считая, что функция $g(x)$ аналитически продолжена в область комплексного переменного t, в некоторой окрестности действительной оси получим:

$$\Phi_1(\bar z) = \frac{1}{\pi\beta} \frac{d}{d\bar z} \int_0^{\bar z} \frac{g(t)}{\sqrt{t}} \frac{dt}{\sqrt{\bar z - t}}$$

В силу (5.2) отношение $g(t) / \sqrt{t}$ обращается в нуль в точке $t = 0$, поэтому после интегрирования по частям получаем

$$\Phi_1(\bar z) = \frac{1}{2\pi\beta} \int_0^{\bar z} \frac{t g'(t) - g(t)}{t \sqrt{t}} \frac{dt}{\sqrt{\bar z - t}} \tag{5.3}$$

Система (0.1), как следует из второго его уравнения, допускает потенциал $\omega(x, r)$, так что

$$V_r = \frac{\partial \omega}{\partial r}, \qquad V_x = \frac{\partial \omega}{\partial x}, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(r \frac{\partial \omega}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial \omega}{\partial r}\right) = 0$$

Как известно, решение этого уравнения $\omega(x, r)$, обращающееся на оси $r = 0$ в заданную функцию $g(x)$, может быть представлено в виде (см., например [7], стр. 223):

$$\omega(x, r) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi g(x + ir\cos\theta)\, d\theta$$

Поэтому функция

$$f_1(x, r) \equiv F_1(z, \bar z) \equiv V_r + iV_x \equiv \frac{i}{\pi} \int_0^\pi g'(x + ir\cos\theta)(1 + \cos\theta)\, d\theta \tag{5.4}$$

есть решение уравнения (0.2), так что $F_1(z, \zeta)$ представляет некоторое решение уравнения (0.3).

Введем новую переменную интегрирования $t = x + ir\cos\theta$. Тогда:

$$\cos\theta = \frac{t-x}{ir}, \qquad 1+\cos\theta = \frac{t-\bar{z}}{ir}, \qquad d\theta = \frac{idt}{\sqrt{z\bar{z}+t^2-tz-t\bar{z}}}$$

поэтому

$$F_1(z, \bar{z}) = -\frac{2}{\pi}\int_z^{\bar{z}} g'(t)\,\frac{t-\bar{z}}{z-\bar{z}}\,\frac{dt}{\sqrt{z\bar{z}+t^2-tz-t\bar{z}}}$$

Отсюда

$$F_1(0, \bar{z}) = \frac{2}{\pi\bar{z}}\int_0^{\bar{z}} g'(t)\sqrt{\frac{t-\bar{z}}{t}}\,dt$$

Пользуясь этой формулой, вычислим функцию $\overset{(1)}{\varphi}_1(\bar{z})$, которая входит в представление (1.6) решения $F_1(z, \zeta)$ уравнения (0.3). Для этого вспомним третью формулу (1.7) и первую формулу (3.1) и положим для простоты $\zeta_0 = 0$. Тогда простые вычисления дают формулу:

$$\overset{(1)}{\varphi}_1(\bar{z}) \equiv \frac{\partial F_1(0, \bar{z})}{\partial \bar{z}} + A(0, \bar{z})F_1(0, \bar{z}) = -\frac{1}{\pi\bar{z}i}\int_0^{\bar{z}} \frac{tg'(t)-g(t)}{t\sqrt{t}}\,\frac{dt}{\sqrt{\bar{z}-t}}$$

так что из формулы (5.3) получаем

$$\overset{(1)}{\varphi}(\bar{z}) = 2\beta i\,\frac{\Phi_1(\bar{z})}{\bar{z}}$$

С другой стороны, как следует из формулы (4.9), $\Phi_1(\bar{z})$ и $\varphi_1(\bar{z})$ связаны тождеством

$$\Phi_1(\bar{z}) \equiv \bar{z}\varphi_1(\bar{z})$$

Поэтому, если положить $2\beta = -i$, то из предыдущего соотношения получим $\overset{(1)}{\varphi}_1(\bar{z}) \equiv \varphi_1(\bar{z})$. В силу теоремы (1.1) отсюда заключаем, что функции (4.12) и (5.4) тождественно совпадают в области D_z. Исходя из формулы (5.4), легко вычислить предельные значения при $r \to 0$ функции $F_1(z, \bar{z})$:

$$f_1(x, 0) = \lim_{r\to 0} F_1(z, \bar{z}) = \frac{i}{\pi}g'(x)\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)\,d\theta = ig'(x)$$

Поэтому

$$f(x, 0) = \lim_{r\to 0} f(x, g) = ig'(x)$$

или

$$f(x, 0) = \lim_{r\to 0} f(x, r) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\int_0^x \Phi_1(\tau)\sqrt{\frac{x}{x-\tau}}\,d\tau \tag{5.5}$$

Преобразовав интеграл при помощи интегрирования по частям и вычислив производную, получим также:

$$f(x, 0) = \lim_{r\to 0} f(x, r) = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{d\Phi_1(\tau)}{d\tau}\,\frac{2x-\tau}{\sqrt{x(x-\tau)}}\,d\tau \tag{5.6}$$

Теорема 5.1. Формула (4.12) всегда представляет регулярное на отрезке L оси $r = 0$ решение уравнения (0.2), если функции $\Phi(z)$ и $\Phi_1(z)$ аналитичны в $D_z + D_\zeta + L$, удовлетворяют условию (5.1) и диффиренциальному уравнению (4.13). При этом предельные значения $\lim f(x, r)$ при $r \to 0$ выражаются по формулам (5.5) или (5.6).

В заключение заметим, что, как следует из условия (4.8), действительная часть $V_r = \operatorname{Re} f(x, r)$ равна нулю на оси $r = 0$.

§ 6. Заключительные замечания. В заключение сделаем несколько дополнительных замечаний. Первое замечание касается обобщения предыдущих рассуждений на случай системы первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\alpha}{r} v = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \tag{6.1}$$

где α — некоторое действительное число; случай $\alpha = 1$ приводит к системе (0.1). Как нетрудно проверить,

$$A(z, \zeta) = -\frac{\alpha}{2(z-\zeta)}, \qquad B(z, \zeta) = -\frac{\alpha}{2(z-\zeta)}, \qquad C_1(z, \zeta) = \frac{2+\alpha}{2(z-\zeta)}$$

так что все результаты § 1, 2, 3 остаются справедливыми для любого α. Функция Римана выписывается явно по формуле § 4, после чего вопрос о поведении решений на оси $r = 0$ может быть рассмотрен аналогично методам § 5 и 6. К системе (6.1) при $\alpha = n-2$ приводится изучение гармонических функций в пространстве n измерений, зависящих от переменных x_1 и $r = (x_2^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$ (так называемых осесимметрических потенциалов). При произвольных α система (6.1) встречается также и в других весьма важных задачах.

Второе замечание касается неоднородной системы вида (0.1); правые части в этом случае характеризуют заданное распределение источников и вихрей. Считая, что эти функции аналитически продолжимы в область аргументов z и ζ, мы получаем неоднородное уравнение вида (0.3)

$$\frac{\partial F(z, \zeta)}{\partial \zeta} - \frac{1}{2(z-\zeta)} F(z, \zeta) - \frac{1}{2(z-\zeta)} F^*(\zeta, z) = U(z, \zeta) \tag{6.2}$$

Общее решение уравнения (6.2) состоит из одного частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения. Последнее изучено в предыдущих параграфах. Предыдущие формулы позволяют получить также и одно частное решение неоднородного уравнения (6.2). Таким решением будет функция (см. [2])

$$F_0(z, \zeta) = G(z, \zeta_0, z, \zeta)\left\{ \int_{\zeta_0}^{\zeta} U(z, \tau)\, d\tau + \int_{\zeta_0}^{\zeta} d\tau \int_{z_0}^{z} \Gamma_1(z, \zeta, t, \tau)\, U(t, \tau)\, dt + \right.$$
$$\left. + \int_{\zeta_0}^{\zeta} d\tau \int_{z_0}^{z} \Gamma_2(z, \zeta, t, \tau)\, U^*(\tau, t)\, dt \right\}$$

где Γ_1 и Γ_2 определены по формулам (2.2).

Поступила
28 VI 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции, М., Физматгиз 1959.
2. Векуа И. Н. Системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа и граничные задачи с применением к теории оболочек. Матем. сб., 31, (73): 2, (1952), 217—314
3. Векуа И. Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. Гостехиздат, М., 1948.
4. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. М., 1957.
5. Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1848.
6. Лебедев Н. Специальные функции и их приложения. М., 1953.
7. Уиттекер Е. Т. и Ватсон Г. Н. Курс современного анализа, ч. II. ГТТИ, 1934.
8. Данилюк И. И. Об общем представлении решений осесимметрической стационарной задачи. ДАН, 1960, 132, № 4.