ПМТФ, № 3, 1972

УДК 532.516

ВЛИЯНИЕ ВДУВА НА СОПРОТИВЛЕНИЕ СФЕРЫ В ЛАМИНАРНОМ ПОТОКЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

А. М. Головин

(Москва)

Методом сращивания асимптотических разложений [1-3] получено стационарное поле скоростей в окрестности сферы при числах Рейнольдса R, εR, рассчитанных по скорости вдува и натекающего потока соответственно, удовлетворяющих условиям $\varepsilon R^2 \ll 1$, $\varepsilon R \ll 1$.

Показано, что при интенсивном вдуве ($R \gg 1$) сила сопротивления существенно уменьшается по сравнению с значением, определяемым формулой Стокса. При слабом вдуве ($R \ll 1$) результаты совпадают с решением Озеена.

Движение жидкости описывается уравнениями Навье — Стокса и уравнением непрерывности, которые, как известно [4], приводят к следующему уравнению для функции тока:

$$\frac{R}{r^2 \sin\theta}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial\Psi}{\partial r}\frac{\partial}{\partial\theta} + 2\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial\Psi}{\partial r} - \frac{2}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right)D^2\Psi = D^4\Psi$$

$$\left(\begin{array}{l} D^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{\sin\theta}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}, \quad R = \dfrac{wa}{\nu} \\ v_r r^2 \sin\theta = \partial\Psi / \partial\theta, \quad v_\theta r \sin\theta = -\partial\Psi / \partial r \end{array}\right) \tag{1}$$

Здесь a — радиус сферы, ν — кинематическая вязкость, Ψ, r — безразмерные функции тока и расстояние до центра сферы, w — скорость жидкости на поверхности сферы, v_r, v_θ — компоненты безразмерной скорости в сферической системе координат с полярной осью вдоль направления, u — скорости натекающего потока вдали от сферы. Для перехода к обычным размерным величинам следует заменить r, v_r, v_θ, Ψ на ar, wv_r, wv_θ, $wa^2\Psi$.

Граничные условия

$$\Psi = -\cos\theta, \ \partial\Psi / \partial r = 0 \text{ при } r = 1$$

$$\Psi \to {}^1/{}_2\varepsilon r^2 \sin^2\theta \quad (\varepsilon = u / w) \quad \text{при} \quad r \to \infty \tag{2}$$

Решение уравнения (1) с условиями (2) можно искать в виде

$$\Psi(r, \theta) = -\cos\theta + \varepsilon\Psi_1(r, \theta) + \varepsilon^2\Psi_2(r, \theta) + \ldots$$

Тогда из уравнения (1) следует:

$$\frac{R}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{2}{r}\right)D^2\Psi_1 - D^4\Psi_1 = 0 \tag{3}$$

$$\frac{R}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{2}{r}\right)D^2\Psi_2 - D^4\Psi_2 = \tag{4}$$

$$= \frac{R}{r^2 \sin\theta}\left[\frac{\partial\Psi_1}{\partial r}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} - 2\operatorname{ctg}\theta\right) - \frac{\partial\Psi_1}{\partial\theta}\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{2}{r}\right)\right]D^2\Psi_1$$

Полагая

$$\Psi_1(r,\ \theta) = \psi_1(x)\ \sin^2\theta, \qquad \Psi_2(r,\ \theta) = \psi_2(x)\ \sin^2\theta\cos\theta\ (r = Rx)$$

можно прийти к уравнениям

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^2}\frac{d}{dx} + \frac{2}{x^3}\right)\left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{2}{x^2}\right)\psi_1 = 0 \tag{5}$$

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{6}{x^2} - \frac{1}{x^2}\frac{d}{dx} + \frac{2}{x^3}\right)\left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{6}{x^2}\right)\psi_2 = \Phi_1 \tag{6}$$

$$\left(\Phi_1 = \frac{2}{x^2}\psi_1\left(\frac{d}{dx} - \frac{2}{x}\right)\left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{2}{x^2}\right)\psi_1\right)$$

Граничные условия

$$\psi_1 = \psi_2 = 0, \quad d\psi_1 / dx = d\psi_2 / dx = 0 \ \text{ при } \ x = 1/R \tag{7}$$

$$\psi_1 \to {}^1/_2\, R^2x^2 \text{ при } x \to \infty \tag{8}$$

Из уравнения (5) с точностью до произвольной постоянной A_1 следует:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{2}{x^2}\right)\psi_1 = A_1\left[2x^2 - (2x^2 + 2x + 1)\exp\left(-\frac{1}{x}\right)\right] \tag{9}$$

Второе линейно-независимое решение уравнения (5) отброшено, так как оно приводит к $\psi_1 \sim x^4$ при $x \to \infty$.

Уравнение (9) и условия (7), (8) позволяют получить

$$\psi_1 = \frac{1}{5}A_1x^4\left[1 + \frac{5(1+R)e^{-R} - 5}{3R^2x^2} + \right. \tag{10}$$

$$\left. + \frac{2 - 2(1+R)e^{-R} - 3R^2E_4(R)}{3R^5x^5} - \exp\left(-\frac{1}{x}\right) - \frac{4}{x}E_5\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

$$\left(A_1 = \frac{3R^4}{2(1+R)e^{-R} - 2 + R^2}, \quad E_n(z) = \int_1^\infty e^{-zt}\frac{dt}{t^n}\right)$$

Отсюда следует, что при $x \gg 1$, $Rx \gg 1$

$$\psi_1 = {}^1/_2\ R^2x^2\ (1 - {}^1/_3A_1 / R^2x)$$

При малой скорости вдува ($R \ll 1$) эта формула совпадает с функцией тока вдали от сферы радиуса $r = 1$

$$\psi_1 = {}^1/_2\, R^2x^2\ (1 - 3 / 2\, Rx)$$

При интенсивном вдуве ($R \gg 1$) функция тока вдали от сферы имеет такой же вид, как и при обтекании сферы радиуса $r \sim R$ ($x \sim 1$)

$$\psi_1 = {}^1/_2\, R^2x^2\ (1 - 1/x)$$

Далее можно вычислить правую часть уравнения (6)

$$\Phi_1 = -\frac{2}{5}A_1{}^2\left[1 + \frac{5(1+R)e^{-R} - 5}{3R^2x^2} + \frac{2 - 2(1+R)e^{-R} - 3R^2E_4(R)}{3R^5x^5} - \right.$$

$$\left. - \exp\left(-\frac{1}{x}\right) - \frac{4}{x}E_5\left(\frac{1}{x}\right)\right]\exp\left(-\frac{1}{x}\right)$$

Можно показать, что решение уравнения (6), возрастающее при $x \to \infty$ не быстрее чем x^3, определяется уравнением

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{6}{x^2}\right)\psi_2 = \Phi_2 \tag{11}$$

$$\begin{gathered}
\Phi_2 = -2A_1{}^2x^3\left\{\left[\frac{1}{15} + \frac{(1+R)\,e^{-R} - 1}{3R^2x^2}(4x^2+3x+1) + \right.\right. \\
+ \frac{2(1+R)\,e^{-R} - 2 + 3R^2E_4(R)}{30R^5x^5} - 24E_1\left(\frac{1}{x}\right) + 24\exp\left(\frac{1}{x}\right)E_1\left(\frac{2}{x}\right) + \\
+ 18E_2\left(\frac{1}{x}\right) + 3\exp\left(\frac{1}{x}\right)E_2\left(\frac{2}{x}\right) - 12E_3\left(\frac{1}{x}\right) + 6E_4\left(\frac{1}{x}\right) - \\
- 2E_6\left(\frac{1}{x}\right)\Big]\exp\left(-\frac{1}{x}\right) - \left[\frac{50}{3} + \frac{4(1+R)\,e^{-R} - 4}{3R^2} - 24\ln 2\right]\left(1 - \frac{1}{4x}\right) + \\
\left. + A_2\left[\left(24 + \frac{18}{x} + \frac{6}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)\exp\left(-\frac{1}{x}\right) - 24 + \frac{6}{x}\right]\right\}
\end{gathered}$$

Здесь A_2 — произвольная постоянная.

Из уравнения (11) и условия возрастания ψ при $x \to \infty$ не быстрее чем x^2 следует, что

$$\begin{gathered}
\psi_2 = -2A_1{}^2x^5\left\{\frac{1}{75}\left[E_3\left(\frac{1}{x}\right) - E_8\left(\frac{1}{x}\right)\right] + \frac{(1+R)\,e^{-R} - 1}{15R^2}\left[4E_3\left(\frac{1}{x}\right) + \right.\right. \\
\left. + \frac{3}{x}E_2\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2}E_1\left(\frac{1}{x}\right) - 4E_8\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{3}{x}E_7\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2}E_6\left(\frac{1}{x}\right)\right] + \\
+ \frac{2(1+R)\,e^{-R} - 2 + 3R^2E_4(R)}{150R^5x^2}\left[\left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} + 2\right)\exp\left(-\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^3}E_3\left(\frac{1}{x}\right)\right] - \\
- \left[\frac{1}{10}E_4\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{15}E_3\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{5}{7}E_2\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{12}{7}E_1\left(\frac{1}{x}\right)\right]\exp\left(-\frac{1}{x}\right) + \\
+ \frac{1}{2}E_2\left(\frac{2}{x}\right) + \frac{12}{7}E_1\left(\frac{2}{x}\right) + \frac{18x}{175}\left[E_4\left(\frac{1}{x}\right)\exp\left(-\frac{1}{x}\right) - E_4\left(\frac{2}{x}\right)\right] - \\
- \frac{9}{350}\left[E_4\left(\frac{1}{x}\right)\exp\left(-\frac{1}{x}\right) - E_8\left(\frac{2}{x}\right) - \frac{1}{2x}E_4{}^2\left(\frac{1}{x}\right)\right] + \\
+ \frac{38}{525}\left[E_3\left(\frac{2}{x}\right) - E_8\left(\frac{2}{x}\right)\right] + \frac{1}{21x}\left[E_2\left(\frac{2}{x}\right) - E_7\left(\frac{2}{x}\right)\right] - \\
- \left[\frac{50}{3} + \frac{4(1+R)\,e^{-R} - 4}{3R^2} - 24\ln 2\right]\left(\frac{1}{14} - \frac{1}{24x}\right) + \\
+ 24A_2\left[E_3\left(\frac{1}{x}\right) - E_8\left(\frac{1}{x}\right)\right] + \\
+ \frac{18}{x}A_2\left[E_2\left(\frac{1}{x}\right) - E_7\left(\frac{1}{x}\right)\right] + \frac{6}{x^2}A_2\left[E_1\left(\frac{1}{x}\right) - E_6\left(\frac{1}{x}\right)\right] + \\
+ \frac{1}{x^3}A_2\left[x\exp\left(-\frac{1}{x}\right) - E_5\left(\frac{1}{x}\right)\right] - \frac{12}{7}A_2 + \frac{1}{x}A_2 + \frac{B_2}{x^7} - \\
\left. - \left[\frac{19}{150} + \frac{2(1+R)\,e^{-R} - 2 + 3R^2E_4(R)}{75R^5} - \frac{14}{75}\ln 2\right]\frac{1}{x^2}\right\}
\end{gathered} \tag{12}$$

Постоянные A_2 и B_2 можно определить из граничных условий (7). При $x \gg 1$, $Rx \gg 1$ из (12) следует:

$$\psi_2 = -{}^1/_8 A_1R^2x^2 \tag{13}$$

Полученное решение (12) позволяет утверждать, что при значениях $\varepsilon xR^2 \sim 1$, или $\varepsilon rR \sim 1$, поправка к функции тока $\varepsilon^2\Psi_2$ будет величиной того же порядка, что и $\varepsilon\Psi_1$.

Поэтому для отыскания внешнего разложения следует ввести радиальную координату $y = \varepsilon rR$ и искать функцию тока в виде

$$\Psi(r, \theta) = {}^1/_2 (y^2 / \varepsilon R^2) \sin^2\theta + \psi(y, \theta)$$

Тогда для $\psi(y, \theta)$ получится уравнение Озеена

$$\left(\cos\theta \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\sin\theta}{y}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) D^2\psi = D^4\psi \quad (14)$$

$$\left(D^2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\sin\theta}{y^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$$

Из уравнения (14) следует:

$$D^2\psi = C\left(1 + \frac{2}{y}\right)\sin^2\theta \exp\left[-\frac{y(1-\cos\theta)}{2}\right]$$

где C — некоторая постоянная.

Решение этого уравнения имеет вид

$$\psi = -\cos\theta - 2C(1+\cos\theta)\left\{1 - \exp\left[-\frac{y(1-\cos\theta)}{2}\right]\right\} \quad (15)$$

От известного решения [1-3] функция (15) отличается первым членом, связанным с ненулевым потоком жидкости через поверхность сферы.

Записывая внешнее решение (15) во внутренних переменных и разлагая в ряд для малых εR, можно получить

$$\Psi = -\cos\theta + {}^1/_2 R^2x^2 \sin^2\theta - C\varepsilon R^2 x \sin^2\theta$$

Это решение сращивается с решением (10), если $C = {}^1/_6 A_1 / R^2$.

Таким образом внешнее решение, переписанное во внутренних переменных, имеет вид

$$\Psi = \frac{\varepsilon R^2 x^2}{2}\sin^2\theta - \frac{A_1}{3R^2}(1+\cos\theta)\left\{1 - \exp\left[-\frac{\varepsilon R^2 x}{2}(1-\cos\theta)\right]\right\} - \cos\theta \quad (16)$$

Отношение второго члена этого ряда к первому при фиксированном значении внешней переменной $\varepsilon R^2 x$ по порядку величины равно εR при $R \ll 1$ либо εR^2 при $R \gg 1$.

Внешнее разложение (16) можно срастить с внутренним, которое с точностью до членов порядка ε^2 включительно следует выбрать в виде

$$\Psi = -\cos\theta + \varepsilon\left(1 + {}^1/_{12}\varepsilon A_1\right)\psi_1(x)\sin^2\theta + \varepsilon^2\psi_2(x)\sin^2\theta\cos\theta$$

где ψ_1 и ψ_2 описываются формулами (10) и (12) соответственно.

Сила, действующая на сферу, определяется потоком импульса через ее поверхность. Проекция этой силы на направление скорости натекающего потока $\mathbf{u}$ равна

$$Q = 2\pi a^2 \int_0^\pi \left[\left(-\rho w^2 v_r^2 - p + \sigma_{rr}'\right)\cos\theta - \sigma_{r\theta}'\sin\theta\right]\sin\theta\, d\theta$$

$$\left(R\sigma_{rr}' = 2\rho w^2 \partial v_r / \partial r, \quad R\sigma_{r\theta}' = \rho w^2\left(r^{-1}\partial v_r / \partial\theta + \partial v_\theta / \partial r - v_\theta / r\right)\right) \quad (17)$$

При сферически симметричном распределении скоростей на поверхности сферы конвективный перенос импульса не вносит непосредственный вклад в этот интеграл.

Для расчета силы сопротивления $\mathbf{Q}$ достаточно ограничиться *лишь* членами в давлении p, пропорциональными $\cos\theta$. Прочие члены учитывать не следует либо из-за антисимметрии подынтегральной функции (17) относительно замены θ на $\pi - \theta$, либо как малые величины порядка ε^3.

С помощью уравнения Навье — Стокса с точностью до членов порядка ε^2 включительно можно получить

$$\frac{p}{\rho w^2} = -\frac{2\varepsilon A}{R^4}\left[1 - \frac{2}{R} + \left(1 + \frac{2}{R}\right)e^{-R}\right]\cos\theta + \ldots$$

$$A = A_1\left(1 + {}^1/_{12}\,\varepsilon A_1\right)$$

где точками обозначены члены, не существенные при расчете Q.

Аналогично при расчете σ_{rr}' и $\sigma_{r\theta}'$ достаточно ограничиться лишь членами

$$\sigma_{rr}' = 0, \quad \frac{\sigma_{r\theta}'}{\rho w^2} = -\frac{2\varepsilon A}{R^5}\left[1 - \left(1 + R + \frac{R^2}{2}\right)e^{-R}\right]\sin\theta$$

Таким образом

$$\mathbf{Q} = \frac{8\pi\rho\nu R a \mathbf{u}}{2(1+R)e^{-R} - 2 + R^2}\left[1 - (1+R)\,e^{-R}\right]\left[1 + \frac{\varepsilon}{4}\,\frac{R^4}{2(1+R)\,e^{-R} - 2 + R^2}\right] \tag{18}$$

Первый член этого ряда по степеням ε был получен ранее [5].

При малой скорости вдува ($R \ll 1$) сила сопротивления совпадает с формулой Озеена

$$\mathbf{Q} = 6\pi\rho\nu a\mathbf{u}\left(1 + {}^3/_8\,\varepsilon R\right) \tag{19}$$

При интенсивном вдуве ($R \gg 1$)

$$\mathbf{Q} = (8\pi / R)\,\rho\nu a\mathbf{u}\left(1 + {}^1/_4\,\varepsilon R^2\right) \tag{20}$$

Область применимости этой формулы соответствует $\varepsilon R^2 \ll 1$, что эквивалентно требованию малых чисел Рейнольдса, рассчитанных по скорости потока, обтекающего сферу с эффективным радиусом $r \sim R$. В этой области сила сопротивления может заметно уменьшаться по сравнению со значением, определяемым формулой Стокса.

Поступила 17 XII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Proudman I., Pearson J. R. A. Expansions at small Reynolds numbers for the flow past a sphere and a circular cylinder. J. Fluid Mech., 1957, vol. 2, pt 3, pp. 237—262.
2. Kaplun S., Lagerstrom P. A. Asymptotic expansions of Navier — Stokes solutions for small Reynolds number. J. Math. Mech., 1957, vol. 6, No. 5, pp. 585—593.
3. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967.
4. Современное состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости. М., Изд-во иностр. лит., 1948.
5. Головин А. М. О движении испаряющейся капли. Тезисы докладов на научной конференции Института механики МГУ, М., 1970.