

ПРОЕКТИРОВАНИЕ СЛОИСТОЙ АНИЗОТРОПНОЙ КРИВОЛИНЕЙНОЙ БАЛКИ МИНИМАЛЬНОГО ВЕСА

УДК 539.3

В. В. Алехин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
630090 Новосибирск

Задачи синтеза слоистых тел — одно из перспективных направлений в области структурной оптимизации. Им посвящен ряд работ [1–5], касающихся вопросов проектирования теплозащитных панелей, многослойных волновых фильтров, упругих слоистых тел. В задачах синтеза слоистых конструкций в качестве управляющих параметров выбираются структура конструкции и ее геометрические размеры. Управлением, характеризующим структуру слоистого тела, является *кусочно-постоянная функция* с дискретной областью значений. Поэтому при выводе необходимых условий оптимальности и при построении численного алгоритма необходимо использовать методы теории оптимального управления. Структура и размеры слоистой конструкции определяются в процессе оптимизации, хотя заранее количество, размеры и материалы слоев не известны.

В данной работе рассматривается задача синтеза из конечного набора упругих однородных ортотропных и изотропных материалов многослойной криволинейной балки минимального веса, изогнутой равномерно распределенной нагрузкой, при заданных ограничениях на прочность балки и ее толщину. Получены необходимые условия оптимальности, построен вычислительный алгоритм, и приведен пример расчета оптимальной балки.

1. Постановка задачи. Пусть имеется набор W , состоящий из k однородных ортотропных и изотропных материалов. Из данного набора требуется синтезировать слоистую криволинейную балку минимального веса.

Пусть r_1, r_2 — радиусы внутренней и внешней поверхности криволинейной балки (см. рисунок), шарнирно опертой по концам и нагруженной внешним давлением q [6]. Общий центр окружностей, ограничивающих балку, примем за начало координат, а ось симметрии — за полярную ось r . Опорные реакции образуют с осью симметрии одинаковые углы β . Обозначим через 2φ угол между крайними сечениями балки. В силу симметрии задачи будем рассматривать половину балки. Напряженно-деформированное состояние многослойной криволинейной балки в случае плоского напряженного состояния в полярной системе координат (r, θ) описывается краевой задачей, включающей в себя уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} = 0; \quad (1.1)$$

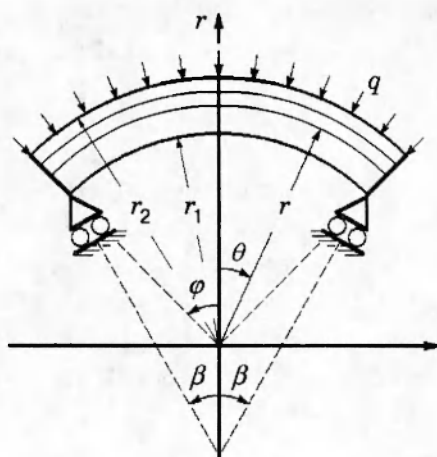
соотношения закона Гука

$$\varepsilon_r = \frac{\sigma_r}{E_r} - \nu_{\theta r} \frac{\sigma_\theta}{E_\theta}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{\sigma_\theta}{E_\theta} - \nu_{r\theta} \frac{\sigma_r}{E_r}, \quad 2\varepsilon_{r\theta} = \frac{\sigma_{r\theta}}{G_{r\theta}}, \quad \nu_{\theta r} E_r = \nu_{r\theta} E_\theta, \quad (1.2)$$

где компоненты тензора деформации выражаются через радиальное смещение $u_r(r, \theta)$ и окружное $u_\theta(r, \theta)$ в виде

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \quad 2\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}; \quad (1.3)$$

и граничные условия:



на криволинейных сторонах балки

$$\sigma_r(r_1, \theta) = 0, \quad \sigma_{r\theta}(r_1, \theta) = 0, \quad \sigma_r(r_2, \theta) = -q, \quad \sigma_{r\theta}(r_2, \theta) = 0; \quad (1.4)$$

на торце балки выполнены интегральные условия

$$\int_{r_1}^{r_2} \sigma_\theta dr = -qr_2 \frac{\sin \varphi \sin(\varphi - \beta)}{\cos \beta}, \quad \int_{r_1}^{r_2} \sigma_{r\theta} dr = qr_2 \frac{\sin \varphi \cos(\varphi - \beta)}{\cos \beta}, \quad \int_{r_1}^{r_2} \sigma_\theta(r - r_1) dr = 0; \quad (1.5)$$

на оси симметрии

$$u_\theta(r, 0) = 0, \quad \sigma_{r\theta}(r, 0) = 0; \quad (1.6)$$

в точке шарнирной опоры

$$u_r(r_1, \varphi) \cos(\varphi - \beta) - u_\theta(r_1, \varphi) \sin(\varphi - \beta) = 0. \quad (1.7)$$

Здесь $E_r(r)$, $E_\theta(r)$, $G_{r\theta}(r)$, $\nu_{\theta r}(r)$, $\nu_{r\theta}(r)$ — распределенные характеристики среды: модули Юнга, сдвига и коэффициенты Пуассона материалов слоев балки.

На внутренних границах $r_i \in (r_1, r_2)$ слоев балки, где терпят разрыв характеристики среды, необходимо задавать условия сопряжения (непрерывность смещений u_r , u_θ и напряжений σ_r , $\sigma_{r\theta}$):

$$[u_r(r_i, \theta)] = [u_\theta(r_i, \theta)] = [\sigma_r(r_i, \theta)] = [\sigma_{r\theta}(r_i, \theta)] = 0. \quad (1.8)$$

Пусть σ , R , ρ_* — величины, имеющие размерность напряжения, длины и плотности. Введем новые безразмерные переменные (в дальнейшем звездочка у безразмерных величин опущена):

$$u_i^* = u_i/R, \quad r_i^* = r_i/R, \quad \sigma_{ij}^* = \sigma_{ij}/\sigma, \quad \sigma_{ij}^{\pm*} = \sigma_{ij}^{\pm}/\sigma,$$

$$E_i^* = E_i/\sigma, \quad G_{r\theta}^* = G_{r\theta}/\sigma, \quad q^* = q/\sigma, \quad \rho^* = \rho/\rho_*$$

($\sigma_{ij}^{\pm}$, ρ — пределы прочности и плотности материалов из множества W). Сделаем замену координат

$$r = r_1 + x(r_2 - r_1), \quad x \in [0, 1], \quad (1.9)$$

переводящую переменную область задания $[r_1, r_2]$ в постоянную $[0, 1]$. Введем кусочно-постоянную функцию

$$\alpha(x) = \{\alpha_j; x \in [x_j, x_{j+1}), j = 1, \dots, n\}, \quad x_1 = 0, \quad x_{n+1} = 1, \quad (1.10)$$

и отрезок

характеризующую структуру многослойной балки: количество, размеры и материалы составляющих ее слоев. Значения α_j принадлежат дискретному конечному множеству

$$U = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}, \quad (1.11)$$

соответствующему заданному набору материалов W . Теперь все характеристики материалов из множества W будут функциями распределения $\alpha(x)$ на отрезке $[0, 1]$. Удобно в качестве множества U задавать набор целых чисел $U = \{1, \dots, k\}$. Тогда запись $\alpha(x) = i$, $x \in [x_j, x_{j+1})$ означает, что j -й слой балки состоит из i -го материала множества W .

Так как структура слоистой балки определяется функцией $\alpha(x)$, а геометрия — ее размерами r_1 , r_2 и углом раствора φ , в качестве управления рассмотрим пару $\{\alpha(x), r_1\}$ (для определенности внешний радиус r_2 и угол φ считаем фиксированными), где $\alpha(x) \in U$ (1.11) и

$$r_1 \in [a, b] \quad (1.12)$$

(a, b — заданные пределы, в которых может варьироваться толщина балки).

Задача оптимального проектирования заключается в следующем. Среди кусочно-постоянных функций $\alpha(x)$ (1.10) с областью значений U (1.11) и параметров r_1 из отрезка $[a, b]$ требуется найти управление $\{\alpha(x), r_1\}$, доставляющее минимум функционалу веса

$$F[\alpha, r_1] = 2\varphi \int_{r_1}^{r_2} \rho(\alpha) r dr = \int_0^1 \Phi(\alpha, r_1, x) dx \quad (1.13)$$

при заданном ограничении на прочность

$$\eta(x, \theta, u_r, u_\theta, \sigma_r, \sigma_{r\theta}, \alpha, r_1) \leq 0. \quad (1.14)$$

В качестве ограничения (1.14) рассмотрим критерий прочности О. Хоффмана для однонаправленных композитов [7], который в случае плоского напряженного состояния записывается в виде

$$\eta = \sigma_\theta [(\sigma_\theta - \sigma_r)/(\sigma_\theta^+ \sigma_\theta^-) + (\sigma_\theta^- - \sigma_\theta^+)/(\sigma_\theta^+ \sigma_\theta^-)] + (\sigma_{r\theta}/\sigma_{r\theta}^\pm)^2 + \sigma_r [\sigma_r/(\sigma_r^+ \sigma_r^-) + (\sigma_r^- - \sigma_r^+)/(\sigma_r^+ \sigma_r^-)] - 1 \leq 0, \quad (1.15)$$

где σ_θ^+ , σ_θ^- , σ_r^+ , σ_r^- , $\sigma_{r\theta}^\pm$ — пределы прочности материалов из множества W при растяжении, сжатии в направлении осей θ, r и при сдвиге. Для изотропных материалов критерий (1.15) переходит в условие текучести Мизеса. Неравенство (1.15) можно записать в терминах u_r , u_θ , σ_r , $\sigma_{r\theta}$, используя соотношения закона Гука (1.2).

2. Необходимые условия оптимальности. Чтобы получить необходимые условия оптимальности в задаче (1.1)–(1.15), требуется построить выражения для вариаций целевого функционала (1.13) и ограничения (1.15) через вариации управления $\{\alpha(x), r_1\}$. С этой целью преобразуем краевую задачу (1.1)–(1.8). В [6] приведено решение данной задачи для однородной анизотропной криволинейной балки в напряжениях. Поэтому в каждом однородном слое многослойной балки решение задачи (1.1)–(1.8) в смещениях u_r , u_θ и напряжениях σ_r , $\sigma_{r\theta}$ имеет вид

$$\begin{aligned} u_r(r, \theta) &= u_1(r) + u_2(r) \cos \theta + u_3(r) \theta \sin \theta, \\ u_\theta(r, \theta) &= v_1(r) \theta + v_2(r) \sin \theta + u_3(r) \theta \cos \theta, \\ \sigma_r(r, \theta) &= \sigma_1(r) + \tau(r) \cos \theta, \quad \sigma_{r\theta}(r, \theta) = \tau(r) \sin \theta. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Условия сопряжения (1.8) на внутренних границах слоев балки и соотношения (1.9), (2.1) позволяют ввести непрерывные на отрезке $[0, 1]$ фазовые переменные

$$Z(x) = (u_1, v_1, \sigma_1, u_2, v_2, \tau, u_3)^T \quad (2.2)$$

(индекс t означает транспонирование вектора или матрицы).

Теперь исходную задачу (1.1)–(1.8) можно представить в виде краевой задачи относительно неизвестных $\mathbf{Z}(x)$ (2.2):

$$\mathbf{Z}'(x) = A(\alpha, r_1, x)\mathbf{Z}(x); \quad (2.3)$$

$$z_3(0) = z_5(0) = z_6(0) = 0, \quad z_3(1) = -q, \quad z_6(1) = 0; \quad (2.4)$$

$$\int_0^1 z_6(r_2 - r_1)dx = qr_2 \frac{\cos(\varphi - \beta)}{\cos \beta}, \quad \int_0^1 z_3 r(r_2 - r_1)dx = qr_2 \left[r_1 \frac{\sin \varphi \sin(\varphi - \beta)}{\cos \beta} - r_2 \right]. \quad (2.5)$$

Здесь ненулевые элементы a_{ij} матрицы $A(\alpha, r_1, x)$ имеют вид

$$a_{11} = a_{12} = a_{44} = a_{45} = a_{47} = -\frac{\nu_{\theta r}}{r}(r_2 - r_1), \quad a_{13} = a_{46} = \left(\frac{1}{E_r} - \frac{\nu_{\theta r}^2}{E_{\theta}} \right)(r_2 - r_1),$$

$$a_{22} = a_{54} = a_{55} = -a_{57} = \frac{r_2 - r_1}{r}, \quad a_{31} = a_{32} = a_{64} = a_{65} = a_{67} = \frac{F_{\theta}}{r^2}(r_2 - r_1),$$

$$a_{33} = \frac{\nu_{\theta r} - 1}{r}(r_2 - r_1), \quad a_{56} = \frac{r_2 - r_1}{G_{r\theta}}, \quad a_{66} = \frac{\nu_{\theta r} - 2}{r}(r_2 - r_1).$$

Поясним, как из краевых условий (1.4)–(1.7) получаются граничные условия (2.4), (2.5). Заметим, что в силу представления (2.1) и уравнений равновесия (1.1) три интегральных условия (1.5) сводятся к двум интегральным граничным условиям (2.5), так как первые два условия из (1.5) оказываются зависимыми. Далее, из анализа системы уравнений (2.3) следует, что если $z_4(x)$ и $z_5(x)$ являются решением системы (2.3), то решениями будут также функции $\tilde{z}_4(x) = (z_4(x) - d)$ и $\tilde{z}_5(x) = (z_5(x) + d)$, где d — константа. Поэтому можно положить в граничных условиях, например, $z_5(0) = 0$, а константу d после решения краевой задачи (2.3)–(2.5) найти отдельно из граничного условия (1.7), откуда следует

$$d = \frac{1}{\cos \beta} \{ [z_1(0) + z_4(0) \cos \varphi] \cos(\varphi - \beta) - [z_2(0)\varphi + z_5(0) \sin \varphi] \sin(\varphi - \beta) + z_7(0)\varphi \sin \beta \}. \quad (2.6)$$

Граничное же условие (1.6) на оси симметрии в силу представления решения в виде (2.1) выполняется автоматически.

Итак, исходная задача (1.1)–(1.8) свелась к решению краевой задачи (2.3)–(2.5) относительно неизвестной вектор-функции $\mathbf{Z}(x)$.

Заменим теперь локальное ограничение (1.15) на эквивалентное интегральное ограничение

$$F_1[\alpha, r_1, \mathbf{Z}] = 0,5 \int_V \{ \eta(\dots) + |\eta(\dots)| \} dV = \int_0^1 \Phi_1(\alpha, r_1, x, \mathbf{Z}) dx = 0, \quad (2.7)$$

где V — объем криволинейной балки, а в силу четности функции $\eta(\dots)$ по углу θ на отрезке $[-\varphi, \varphi]$

$$\Phi_1(\alpha, r_1, x, \mathbf{Z}) = (r_2 - r_1)[r_1 + x(r_2 - r_1)] \int_0^{\varphi} \{ \eta(\dots) + |\eta(\dots)| \} d\theta. \quad (2.8)$$

Заметим, что у функционала (2.7) есть производная Фреше [8], так как подынтегральная функция $|\eta(\dots)|$, представляющая собой модуль от критерия прочности О. Хоффмана, в

изгибаемой слоистой балке может обращаться в нуль лишь на множестве нулевой меры, состоящем из конечного числа точек.

Пусть теперь пара $\{\alpha(x), r_1\}$ — оптимальное управление из допустимого множества (1.11), (1.12), минимизирующее функционал (1.13) и удовлетворяющее ограничению (2.7). Рассмотрим возмущенное управление $\{\alpha^*(x), r_1 + \delta r_1\}$ [8]:

$$\alpha^*(x) = \begin{cases} g(x), & x \in D, \quad g(x) \in U, \\ \alpha(x), & x \notin D, \quad \text{mes}(D) < \varepsilon, \end{cases} \quad r_1 + \delta r_1 \in [a, b], \quad |\delta r_1| < \varepsilon \quad (2.9)$$

($D \subset [0, 1]$ — множество малой меры, $\varepsilon > 0$ — малая величина). Используя стандартную технику [8], можно получить главные части приращений функционалов (1.13), (2.7) (для краткости аргументы функций, относящиеся к невозмущенному управлению $\{\alpha(x), r_1\}$, опущены):

$$\delta F[\dots] = \int_D \{\Phi(\alpha^*, \dots) - \Phi(\alpha, \dots)\} dx + S \delta r_1; \quad (2.10)$$

$$\delta F_1[\dots] = \int_D \{M(\alpha^*, \dots) - M(\alpha, \dots)\} dx + S_1 \delta r_1. \quad (2.11)$$

Здесь

$$M(\alpha, r_1, x, \mathbf{Z}, \Psi) = \Phi_1(\alpha, r_1, x, \mathbf{Z}) + \Psi^T(x) A(\alpha, r_1, x) \mathbf{Z}(x) + \\ + \gamma_1(r_2 - r_1) z_6(x) + \gamma_2 r(r_2 - r_1) z_3(x), \quad (2.12)$$

$$S = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial r_1} \Phi(\alpha, r_1, x) dx, \quad S_1 = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial r_1} M(\alpha, r_1, x, \mathbf{Z}, \Psi) dx - \gamma_2 q r_2 \frac{\sin \varphi \sin(\varphi - \beta)}{\cos \beta}.$$

Вектор сопряженных переменных $\Psi(x)$ удовлетворяет краевой задаче

$$\Psi'(x) = -A^T(\alpha, r_1, x) \Psi(x) - \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{Z}} \Phi_1(\alpha, r_1, x, \mathbf{Z}) \right]^T - \gamma_1 \mathbf{B} - \gamma_2 \mathbf{C}; \quad (2.13)$$

$$\psi_1(0) = \psi_2(0) = \psi_4(0) = \psi_7(0) = 0, \quad \psi_1(1) = \psi_2(1) = \psi_4(1) = \psi_5(1) = \psi_7(1) = 0, \quad (2.14)$$

где ненулевые компоненты b_i, c_i векторов $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ имеют вид

$$b_6 = r_2 - r_1, \quad c_3 = [r_1 + x(r_2 - r_1)](r_2 - r_1).$$

Из краевой задачи (2.13), (2.14) определяются вектор $\Psi(x)$ и множители Лагранжа γ_1, γ_2 , с помощью которых были учтены интегральные краевые условия (2.5) при построении вариации $\delta F_1[\dots]$ ограничения (2.7).

Составим теперь расширенный функционал

$$J[\alpha, r_1] = F[\alpha, r_1] + \lambda_1 F_1[\alpha, r_1, \mathbf{Z}] + \lambda_2 \{a - r_1 + \xi_1^2\} + \lambda_3 \{r_1 - b + \xi_2^2\} \quad (2.15)$$

($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ и ξ_1, ξ_2 — множители Лагранжа и штрафные переменные). Вариацию функционала (2.15) с использованием выражений (2.10)–(2.12) представим как

$$\delta J[\dots] = \int_D \{H(\alpha, \dots) - H(\alpha^*, \dots)\} dx + \{S + \lambda_1 S_1 - \lambda_2 + \lambda_3\} \delta r_1 + \\ + 2 \lambda_2 \xi_1 \delta \xi_1 + 2 \lambda_3 \xi_2 \delta \xi_2; \quad (2.16)$$

$$H(\alpha, r_1, x, \mathbf{Z}, \Psi) = -\Phi(\alpha, r_1, x) - \lambda_1 M(\alpha, r_1, x, \mathbf{Z}, \Psi). \quad (2.17)$$

Так как управление $\{\alpha(x), r_1\}$ является оптимальным (минимизирующим) управлением, для любых допустимых управлений $\{\alpha^*(x), r_1 + \delta r_1\}$ (2.9) должно выполняться условие

$\delta J[\dots] \geq 0$. Тогда из выражения (2.16) в силу произвольности вариаций $\delta r_1, \delta \xi_i$ имеем

$$S + \lambda_1 S_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0; \quad (2.18)$$

$$\lambda_2(a - r_1) = 0, \quad \lambda_3(r_1 - b) = 0, \quad \lambda_2 \geq 0, \quad \lambda_3 \geq 0, \quad (2.19)$$

и в силу того, что множество малой меры D может быть почти всюду плотно расположено на отрезке $[0, 1]$, для почти всех $x \in [0, 1]$ должно выполняться условие максимума для функции Гамильтона $H(\dots)$ (2.17) по аргументу α [8]:

$$H(\alpha, r_1, x, \mathbf{Z}, \Psi) = \max_{\alpha^*(x) \in U} H(\alpha^*, r_1, x, \mathbf{Z}, \Psi). \quad (2.20)$$

Таким образом, получаем, что оптимальное управление $\{\alpha(x), r_1\}$ и соответствующие ему оптимальная траектория $\mathbf{Z}(x)$ и вектор сопряженных переменных $\Psi(x)$ должны удовлетворять краевым задачам (2.3)–(2.5), (2.13), (2.14), соотношениям (1.11), (1.12), (2.7), (2.19) и условиям оптимальности (2.18), (2.20).

3. Вычислительный алгоритм. Основная идея прямого метода решения задач оптимального проектирования заключается в построении последовательности управлений $\{\alpha(x), r_1\}_j$ ($j = 1, 2, \dots$), минимизирующей целевой функционал (1.13). Для этого введением равномерной сетки $\{x_i\}$ разобьем отрезок $[0, 1]$ на n отрезков D_i , моделирующих множества малой меры. Зададим начальное управление $\{\alpha(x), r_1\}$ из допустимой области (1.11), (1.12), (2.7). Очевидно, что функция $\alpha(x)$ является кусочно-постоянной с участками постоянства $D_i = [x_i, x_{i+1})$, на которых она принимает значения из множества U (1.11). Следующее приближение $\{\alpha^*(x), r_1 + \delta r_1\}$ на некотором множестве D_i ищется в виде (2.9)

$$\alpha^*(x) = \begin{cases} \alpha_j, & x \in D_i, \quad \alpha_j \in U, \\ \alpha(x), & x \notin D_i; \end{cases} \quad (3.1)$$

$$r_1 + \delta r_1 \in [a, b], \quad |\delta r_1| < \varepsilon \quad (3.2)$$

и определяется из линейаризованной оптимизационной задачи: найти на данном множестве такое допустимое возмущение $\{\alpha_j, \delta r_1\}$, которое обеспечивает максимальное убывание функционала $F[\dots]$ (1.13) или, другими словами, минимум вариации $\delta F[\dots]$ (2.10) при условиях (3.1), (3.2) и линейаризованном ограничении (2.7)

$$F_1[\alpha^*, r_1 + \delta r_1, \mathbf{Z} + \delta \mathbf{Z}] \approx F_1[\alpha, r_1, \mathbf{Z}] + \delta F_1[\alpha, r_1, \mathbf{Z}] = 0, \quad (3.3)$$

где выражение для $\delta F_1[\dots]$ дается формулой (2.11). Эта линейаризованная задача представляет собой вариант задачи, рассмотренной в пп. 1, 2. Отсюда непосредственно получаем, что оптимальное возмущение $\{\alpha_j, \delta r_1\}$ должно удовлетворять соотношениям

$$\delta r_1 = -\gamma \{S + \lambda_1 S_1 - \lambda_2 + \lambda_3\}, \quad \gamma \geq 0; \quad (3.4)$$

$$\lambda_2(a - r_1 - \delta r_1) = 0, \quad \lambda_3(r_1 + \delta r_1 - b) = 0, \quad \lambda_2 \geq 0, \quad \lambda_3 \geq 0 \quad (3.5)$$

и ограничениям (3.2), (3.3).

Множители Лагранжа $\gamma, \lambda_2, \lambda_3$ в процессе численного счета находятся из (3.2), (3.5). Наилучшая поправка α_j (3.1) определяется следующим образом. Из соотношений (3.3), (3.4) получим

$$\delta r_1 = -\left\{ \int_{D_i} [M(\alpha_j, \dots) - M(\alpha, \dots)] dx + F_1[\alpha, r_1, \mathbf{Z}] \right\} / S_1. \quad (3.6)$$

Материал	ρ	E_θ	E_r	$G_{r\theta}$	$\nu_{\theta r}$	σ_θ^+	σ_θ^-	σ_r^+	σ_r^-	$\sigma_{r\theta}^\pm$
Стеклопластик	2,13	6070	2488	1197	0,23	129	100	4,6	13	4,6
Углепластик	1,61	18140	1035	686	0,28	149,4	110	4	18,6	6,76
Боропластик	2,02	20130	2172	538	0,17	137,3	120	5,6	20	6,3
Органопластик	1,36	8430	484	284	0,32	118,6	30	1,1	12	2,76
Сферопластик	0,65	270	270	106,3	0,27	4,5	4,5	4,5	4,5	2,6
Дюралюминий	2,85	7100	7100	2669,2	0,33	44	44	44	44	25,4
Титановый сплав	4,6	12000	12000	4545,5	0,32	80	80	80	80	46,19
Сталь	7,8	21000	21000	8076,9	0,3	120	120	120	120	69,28
Медь	8,93	11200	11200	4210,5	0,33	20	20	20	20	11,55

Тогда поправка α_j , минимизирующая вариацию $\delta F[...]$ (2.10), находится из условия

$$\int_{D_i} H(\alpha_j, r_1, x, \mathbf{Z}, \Psi) dx = \max_{\alpha_* \in U} \int_{D_i} H(\alpha_*, r_1, x, \mathbf{Z}, \Psi) dx$$

$$\left(H(\alpha_*, r_1, x, \mathbf{Z}, \Psi) = -\Phi(\alpha_*, r_1, x) + \frac{S}{S_1} M(\alpha_*, r_1, x, \mathbf{Z}, \Psi) \right).$$

При $S_1 = 0$ наилучшая поправка $\{\alpha_j, \delta r_1\}$ определяется из соотношений

$$\delta r_1 = -\gamma\{S - \lambda_2 + \lambda_3\}, \quad \int_{D_i} \Phi(\alpha_j, r_1, x) dx = \min_{\alpha_* \in U} \int_{D_i} \Phi(\alpha_*, r_1, x) dx$$

с учетом ограничений (3.2), (3.3), (3.5).

Построив таким образом новое управление $\{\alpha^*(x), r_1 + \delta r_1\}$, принимаем его за начальное и строим следующее приближение. Процесс считается оконченным на данной сетке разбиения $\{x_i\}$, если управление $\{\alpha(x), r_1\}$ не изменяется ни на одном из множеств D_i . Полученное решение представляет собой локальный минимум в рассматриваемой задаче.

Пример. Множество W состоит из девяти материалов, имеющих механические и физические безразмерные характеристики (часть данных взята из [9]), приведенные в таблице.

Внутренняя поверхность балки, радиус r_1 которой может изменяться в пределах отрезка $[0,75; 0,9]$, свободна от нагрузки. На внешней поверхности балки, радиус r_2 которой считается фиксированным и равным единице, задана равномерно распределенная нагрузка $q = 2$. Угол раствора балки $\varphi = 45^\circ$, угол шарнирной опоры $\beta = 30^\circ$. Балка разбивается по толщине на 50 равных частей, моделирующих множества D_i .

В качестве начального приближения бралась четырехслойная балка со слоями $[0,75; 0,765]$ и $[0,78; 0,795]$ из титанового сплава, $[0,765; 0,78]$ из стали и $[0,795; 1]$ из дюралюминия. В результате оптимизации получена семислойная балка с внутренним радиусом $r_1 = 0,80432$, весом $F^* = 1,4258$ и со слоями $[0,80432; 0,82389]$ и $[0,96086; 0,99609]$ из углепластика, $[0,82389; 0,8278]$ из стали, $[0,8278; 0,84345]$ и $[0,84737; 0,96086]$ из дюралюминия, $[0,84345; 0,84737]$ из титанового сплава и $[0,99609; 1]$ из сферопластика. Самой легкой однородной балкой, удовлетворяющей ограничениям на прочность (1.15) и толщину тела (1.12) при заданной нагрузке q , является балка из титанового сплава с внутренним радиусом $r_1 = 0,78831$ и весом $F_* = 2,7354$. Относительный выигрыш по весу для оптимальной балки по сравнению с данной однородной балкой составил $(1 - F^*/F_*) \cdot 100\% = 47,9\%$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01527).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бабе Г. Д., Гусев Е. Л.** Математические методы оптимизации интерференционных фильтров. Новосибирск: Наука, 1987.
2. **Каниболотский М. А., Уржумцев Ю. С.** Оптимальное проектирование слоистых конструкций. Новосибирск: Наука, 1989.
3. **Алехин В. В., Аннин Б. Д., Колпаков А. Г.** Синтез слоистых материалов и конструкций. Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1988.
4. **Алехин В. В., Аннин Б. Д.** Оптимизация термоупругих слоистых тел // ПМТФ. 1989. № 2. С. 156–163.
5. **Алехин В. В.** Оптимизация слоистого сферического включения в бесконечной матрице при одноосном растяжении // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 1. С. 115–120.
6. **Лехницкий С. Г.** Анизотропные пластинки. М.: Гостехтеоретиздат, 1957.
7. **Композиционные материалы: Справочник** / Под ред. Д. М. Карпиноса. Киев: Наук. думка, 1985.
8. **Федоренко Р. П.** Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978.
9. **Композиционные материалы: Справочник** / В. В. Васильев, В. Д. Протасов, В. В. Болотин и др. М.: Машиностроение, 1990.

Поступила в редакцию 27/IX 1995 г.
