цию предыдущего шага. При этом A и B определяются приближенно и являются плохо обусловленными, что допускает введение малого параметра ε и укладывается в схему построения регуляризирующего оператора [10] (сходимость по ε в данной работе не рассматривается).

2) Присутствие в уравнении (2.7) параметра γ позволяет получать качественное и количественное описание явлений образования мертвых зон, сводов, пульсаций в задачах конического истечения, волочения, прессования и внедрения. Полагая γ случайной функцией со значениями ± 1 в зависимости от геометрии процесса течения, граничных условий и других факторов, приходим к течению с областями, в которых кратность характеристик α, β меняется. Тем самым активные поверхности течения, вдоль которых выполняется третье из соотношений (2.8), могут попеременно быть α и β поверхностями. Чередование таких областей носит, вообще говоря, случайный характер, чем, может быть, и объяснены явления, упомянутые выше.

Поступила 21 I 1983

ЛИТЕРАТУРА

1. **Хилл Р.** Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956.
2. **Ивлев Д. Д.** Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966.
3. **Штейн М. Ш.** О некоторых точных решениях уравнений идеальной пластичности в случае осевой симметрии. —ПМ, 1983, т. 19, № 10.
4. **Курант Р.** Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.
5. **Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.** Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1968.
6. **Symond P. S.** On the general equations of problems of axial symmetry in the theory of plasticity.— Quart. J. Appl. Math., 1949, vol. 6, p. 448.
7. **Ревуженко А. Ф., Шемякин Е. И.** Некоторые постановки краевых задач пластичности.— ПМТФ, 1979, № 2.
8. **Штейн М. Ш.** Об одном приближенном методе решения уравнений теории идеальной пластичности.— ПММ, 1974, т. 38, вып. 4.
9. **Штейн М. Ш.** Напряженное и деформированное состояние полупространства в окрестности торца круговой цилиндрической выемки.— ФТПРПИ, 1975, № 4.
10. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.

УДК 539.3

КРИТИЧЕСКИЕ НАГРУЗКИ НЕИДЕАЛЬНЫХ ПОЛОГИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Н. С. АСТАПОВ, В. М. КОРНЕВ

(Новосибирск)

Наличие малых начальных геометрических неправильностей оболочечных конструкций вызывает преждевременное выпучивание. Большое внимание к исследованиям по чувствительности критической нагрузки к начальным геометрическим неправильностям уделено в [1]. В работах П. Сейда, И. Арбоша, Э. Каплана и Ч. Д. Бэбкока мл. [2] указывается, что именно начальные прогибы являются главной причиной громадного разброса экспериментальных данных и обусловливают плохую корреляцию между теоретическими и экспериментальными результатами. Важность вопроса о степени чувствительности к начальным неправильностям отмечается и в работе Р. Ш. Ферпта [2].

В данной работе методами теории возмущений исследуются задачи линейной теории потери устойчивости неидеальных пологих цилиндрических оболочек. Рассматриваются оболочки, нагруженные поперечным и гидростатическим давлением, а также продольно сжатые оболочки. Собственные числа (критические нагрузки) и собственные функции (формы потери устойчивости) неидеальных оболочек разыскиваются в виде асимптотических рядов по малому параметру, характеризующему амплитуду начальных неправильностей. Для первых членов разложений получены явные формулы. В предлагаемой методике построения упомянутых собственных чисел и функций используется только исходная линейная система уравнений теории пологих оболочек.

1. Формулировка задачи. Построение асимптотических разложений собственных функций и чисел. Изучается искажение спектра в линейных задачах устойчивости неидеальных цилиндрических оболочек, за основу принят спектр в задачах устойчивости идеальных цилиндрических оболочек; система уравнений при безразмерных обозначениях для неидеальных оболочек имеет вид [3]

$$\varepsilon^2\Delta\Delta w + f_{xx} - \lambda\left(a_1 w_{xx} + a_2 w_{yy}\right) - \mu\,(h/R)\left(f_{yy}w^0_{xx} + f_{xx}w^0_{yy} - 2f_{xy}w^0_{xy}\right) = 0, \tag{1.1}$$

$$\Delta\Delta f = w_{xx} - \mu\,(h/R)\left(w_{xx}w^0_{yy} + w_{yy}w^0_{xx} - 2w_{xy}w^0_{xy}\right),$$

$$\Delta w = w_{xx} + w_{yy}, \quad f^0_{xx} = \lambda (R/h)\, a_2, \quad f^0_{yy} = \lambda (R/h)\, a_1, \quad f^0_{xy} \equiv 0,$$

$$w = \frac{w_*}{h}, \quad w^0 = \frac{w^0_*}{h}, \quad f = \frac{f_*}{Eh^2R}, \quad \varepsilon^2 = \frac{1}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{h}{R}\right)^2, \quad \begin{array}{l} 0 \leqslant x \leqslant L/R, \\ 0 \leqslant y \leqslant 2\pi, \end{array}$$

где w и w_* — безразмерные и размерные нормальные прогибы; f и f_* — безразмерные и размерные функции напряжений; w^0 и w^0_* — безразмерные и размерные функции, характеризующие начальные неправильности оболочек, причем $\max |w^0| = 1$; μ — малый параметр, пропорциональный амплитуде начальных неправильностей; h, R, L — толщина, радиус и длина цилиндрической оболочки; ε — малый параметр, определяющий тонкостенность конструкции; E и ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона; постоянные составляющие усилий в продольном f^0_{xx} и окружном f^0_{yy} направлении пропорциональны параметру нагружения λ; a_1, a_2 — коэффициенты. Рассматриваются оболочки, нагруженные постоянным поперечным давлением (задача 1, $a_2 = -1$, $a_1 = 0$), постоянным гидростатическим давлением (задача 2, $a_2 = -1$, $a_1 = -1/2$) и продольно-сжатые оболочки (задача 3, $a_2 = 0$, $a_1 = -1$).

Предположим: 1) на торцах оболочек осуществлены такие условия нагружения и закрепления, что при $\mu = 0$ имеем безмоментное напряженное состояние; 2) из четырех краевых условий для каждого из торцов два линейных условия формулируются только относительно нормального прогиба w, а два других линейных условия — только относительно функции напряжений f, т. е.

$$g_{pj}f = 0 \ (p = 0, 1, j = 1, 2), \quad g_{pj}w = 0 \ (p = 0, 1, j = 3, 4). \tag{1.2}$$

Здесь g_{pj} — дифференциальные операторы, вид которых остается неизменным при $\mu \equiv 0$ и $\mu \neq 0$. Второе ограничение существенно используется при построении методами теории возмущений [4—6] собственных функций и собственных значений (μ — малый параметр), а именно разыскиваются те значения параметра нагружения λ^*_i, при которых система уравнений (1.1) с соответствующими краевыми условиями (1.2) имеет нетривиальное решение w^*_i и f^*_i:

$$\varepsilon^2 a w^*_i + d f^*_i - \mu s f^*_i - \lambda^*_i b w^*_i = 0, \quad a f^*_i = d w^*_i - \mu t w^*_i, \tag{1.3}$$

$$g_{pj} f^*_i = 0 \ (p = 0, 1, \ j = 1, 2), \quad g_{pj} w^*_i = 0 \ (p = 0, 1, \ j = 3, 4),$$

$$a = \Delta\Delta, \quad d = (\ )_{xx}, \quad s = (h/R)\left[w^0_{xx}(\ )_{yy} + w^0_{yy}(\ )_{xx} - 2w^0_{xy}(\ )_{xy}\right],$$

$$b = a_1(\ )_{xx} + a_2(\ )_{yy}, \quad t = (h/R)\left[w^0_{yy}(\ )_{xx} + w^0_{xx}(\ )_{yy} - 2w^0_{xy}(\ )_{xy}\right].$$

Задача (1.3) о собственных функциях и числах при $\mu \neq 0$ называется возмущенной [4—6], при $\mu \equiv 0$ эта задача переходит в невозмущенную задачу

$$(\varepsilon^2 a^2 + d^2)\Phi_i - \lambda_i b a \Phi_i = 0, \quad G_{pj}\Phi_i = 0 \ (p = 0, 1, j = 1, 2, 3, 4), \tag{1.4}$$

где G_{pj} — операторы краевых условий (1.2); λ_i и Φ_i — собственные числа и функции невозмущенной задачи, через эти последние функции выражаются нормальные прогибы и функция напряжений, соответствующие невозмущенной задаче (1.4), по формулам $w_i = a\Phi_i$, $f_i = d\Phi_i$. Следуя обычным процедурам [4—6], собственные функции w^*_i, f^*_i и числа λ^*_i задачи (1.3) представим в виде асимптотических рядов по параметру μ:

$$w^*_i = w^{(0)}_i + \mu w^{(1)}_i + \mu^2 w^{(2)}_i + \ldots, \quad (b w^*_i, \Phi^*_j) = \delta_{ij}, \quad a\Phi^*_i = w^*_i, \tag{1.5}$$

$$f^*_i = f^{(0)}_i + \mu f^{(1)}_i + \mu^2 f^{(2)}_i + \ldots, \quad (ba\Phi_i, \Phi_j) = \delta_{ij}, \quad ((\varepsilon^2 a^2 + d^2)\Phi_i, \Phi_j) = \lambda_i \delta_{ij},$$

$$\lambda^*_i = \lambda_i + \mu\lambda^{(1)}_i + \mu^2\lambda^{(2)}_i + \ldots, \quad i = 1, 2, \ldots, \quad 0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \ldots$$

В первой строке соотношений (1.5) приведены условия нормировки для возмущенной задачи (1.3), круглые скобки обозначают скалярное произведение, во второй строке (1.5) — условия нормировки невозмущенной задачи (δ_{ij} — символы Кронекера), собственные значения λ_i невозмущенной задачи (1.4) упорядочены обычным образом. Асимптотические разложения (1.5) подставляются в систему уравнений и краевые условия задачи (1.3):

$$\varepsilon^2 a\left(w^{(0)}_i + \mu w^{(1)}_i + \ldots\right) + (d - \mu s)\left(f^{(0)}_i + \mu f^{(1)}_i + \ldots\right) - \left(\lambda_i + \mu\lambda^{(1)}_i + \ldots\right)\times \tag{1.6}$$

$$\times b\left(w^{(0)}_i + \mu w^{(1)}_i + \ldots\right) = 0, \quad g_{pj}\left(w^{(0)}_i + \mu w^{(1)}_i + \ldots\right) = 0 \quad (p = 0, 1, \ j = 3, 4);$$

$$a\left(f^{(0)}_i + \mu f^{(1)}_i + \ldots\right) = (d - \mu t)\left(w^{(0)}_i + \mu w^{(1)}_i + \ldots\right), \quad g_{pj}\left(f^{(0)}_i + \right. \tag{1.7}$$

$$\left. + \mu f^{(1)}_i + \ldots\right) = 0 \quad (p = 0, 1, \ j = 1, 2).$$

В задачах (1.6) и (1.7) собираем члены одного порядка малости. Начинаем с членов при μ^0, задача для этих членов совпадает с задачей (1.4) после соответствующих переобозначений, собственные числа и собственные функции суть λ_i и Φ_i ($i = 1, 2, \ldots$), причем последние ортонормированы. Приравнивая члены при μ в первой степени, имеем

(1.8) $$af_i^{(1)} = dw_i^{(1)} - tw_i^{(0)}, \quad g_{pj}f_i^{(1)} = 0 \quad (p = 0, 1, \ j = 1, 2);$$

(1.9) $$\varepsilon^2 aw_i^{(1)} + df_i^{(1)} - sf_i^{(0)} - \lambda_i bw_i^{(1)} - \lambda_i^{(1)} bw_i^{(0)} = 0,$$

$$g_{pj}w_i^{(1)} = 0 \quad (p = 0, 1, \ j = 3, 4).$$

Так же формулируются и другие задачи. Основная трудность решения задач (1.8) и (1.9) связана с тем, что неизвестные функции $f_i^{(1)}$ и $w_i^{(1)}$ входят в уравнения (1.8) и (1.9).

Построение разложений (1.5) зависит от кратности собственного числа λ_i задачи (1.4): 1) λ_i простое; 2) λ_i имеет кратность $i_{00} - i_0 + 1$, т. е.

(1.10) $$\lambda_{i_0} = \lambda_{i_0+1} = \ldots = \lambda_{i_{00}}.$$

Вообще говоря, собственные значения для замкнутых цилиндрических оболочек всегда двукратны, однако первый случай не будем исключать из рассмотрения, так как он является типичным для незамкнутых цилиндрических оболочек (панелей), прямолинейные кромки которых шарнирно-оперты.

2. Простое собственное значение. Итак, λ_i простое, тогда $w_i^{(0)} = w_i$, $f_i^{(0)} = f_i$, напомним, что w_i и f_i выражаются через собственные функции Φ_i. Допустим [4—6], что функции $f_i^{(1)}$ и $w_i^{(1)}$ разлагаются в ряды по собственным функциям f_i и w_i, точнее,

(2.1) $$f_i^{(1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{ki} f_k, \quad w_i^{(1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{ki} w_k.$$

Из условия нормировки (1.5) следует, что $\beta_{ii} = 0$. Собственные функции f_i и w_i удовлетворяют краевым условиям задач (1.8) и (1.9), поэтому остается только подобрать коэффициенты α_{ki} и β_{ki}. Выразим функции f_i и w_i через Φ_i, тогда из уравнения задачи (1.8) получаем соотношения, связывающие коэффициенты α_{ki} и β_{ki}:

(2.2) $$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_{ki} - \beta_{ki}) (ad\Phi_k, \Phi_j) = -(ta\Phi_i, \Phi_j), \quad j = 1, 2, \ldots$$

Переходим к исследованию бесконечной системы (2.2) для первой и второй задач потери устойчивости; напомним структуру решения, определяющего формы потери устойчивости: решение состоит из основной (порождающей) части и краевого эффекта при устойчивости [7, 8]. Поэтому стоящие вне главной диагонали элементы определителя, соответствующего системе (2.2), характеризуют быстроту затухания краевых эффектов при устойчивости, т. е.

(2.3) $$\sum_{k \neq j} (\alpha_{ki} - \beta_{ki}) (ad\Phi_k, \Phi_j) \approx 0.$$

Опускаем эти внедиагональные, второстепенные элементы определителя, коэффициенты α_{ki} выразятся через β_{ki}:

(2.4) $$\alpha_{ki} = \beta_{ki} - (ta\Phi_i, \Phi_k)(ad\Phi_k, \Phi_k)^{-1}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

При определении коэффициентов β_{ki} и $\lambda_i^{(1)}$ принимаются во внимание соотношения (2.1), формулы (2.4) и соотношение, аналогичное соотношению (2.3),

$$\sum_{k \neq j} (\alpha_{ki} - \beta_{ki}) (d^2\Phi_k, \Phi_j) \approx 0.$$

Окончательно получим

(2.5) $$\lambda_i^{(1)} = \alpha_{ii} (d^2\Phi_i, \Phi_i) - (sd\Phi_i, \Phi_i),$$

$$\beta_{ki} = \frac{(sd\Phi_i, \Phi_k) + (ta\Phi_i, \Phi_k)(ad\Phi_k, \Phi_k)^{-1}(d^2\Phi_k, \Phi_k)}{\lambda_k - \lambda_i} \quad \text{при } i \neq k.$$

В общем случае $\alpha_{ii} \neq 0$, хотя $\beta_{ii} = 0$. Приближенные соотношения (2.4), (2.5) превращаются в точные для всех трех рассматриваемых задач, если оболочки шарнирно-оперты по контуру. Аналогичным образом могут быть построены и высшие члены разложений.

3. Кратное собственное значение. Теперь пусть λ_i — кратное собственное значение (см. (1.10)). Собственные функции $w_i^{(0)}$ и $f_i^{(0)}$ есть линейные комбинации невозмущенных собственных функций [4—6], соответствующих кратному собственному значению (далее рассматриваются только шарнирно-опертые оболочки):

$$(3.1)\qquad w_i^{(0)} = a\chi_i,\quad f_i^{(0)} = d\chi_i,\quad \chi_i = \sum_{n=i_0}^{i_{00}} \rho_{ni}\Phi_n,\quad i = i_0,\ i_0+1,\ \ldots,\ i_{00}.$$

Новые собственные функции $w_i^{(0)}$, $f_i^{(0)}$ отличаются от собственных функций невозмущенной задачи тем, что первые приспособлены к виду возмущения путем подбора системы коэффициентов ρ_{ni} ($n,\ i = i_0,\ i_0+1,\ \ldots,\ i_{00}$). Для неизвестных коэффициентов ρ_{ni} получается линейная однородная система

$$(3.2)\qquad \left(\sum_{n=i_0}^{i_{00}} \rho_{ni}ta\Phi_n,\ \Phi_k\right)(ad\Phi_k,\ \Phi_k)^{-1}\left(d^2\Phi_k,\ \Phi_k\right) + \left(\sum_{n=i_0}^{i_{00}} \rho_{ni}sd\Phi_n,\ \Phi_k\right) +$$
$$+\lambda_i^{(1)}\rho_{ki} = 0,\quad k = i_0,\ i_0+1,\ \ldots,\ i_{00}.$$

Из условия разрешимости системы (3.2) определяем $\lambda_i^{(1)}$. Допустим, что А) все $\lambda_i^{(1)}$, $i = i_0,\ i_0+1,\ \ldots,\ i_{00}$ различны, Б) $\lambda_{j_0}^{(1)} = \lambda_{j_0+1}^{(1)} = \ldots = \lambda_{j_{00}}^{(1)}$, $i_0 \leqslant j_0 < j_{00} \leqslant i_{00}$.

Случай А. Пусть кратное собственное значение уже в первом приближении расщепляется на простые. Для каждого $\lambda_i^{(1)}$ из однородной системы (3.2) и условий нормировки (см. первую строку в соотношениях (1.5)) получаем систему коэффициентов ρ_{ni} ($n,\ i = i_0,\ i_0+1,\ \ldots,\ i_{00}$). Итак, построено нулевое приближение (3.1) для собственных функций.

Переходим к членам первого порядка малости $f_i^{(1)}$ и $w_i^{(1)}$, эти функции разлагаются в ряды (2.1), некоторые члены которых равны нулю $\beta_{ki} = 0$, $k,\ i = i_0,\ i_0+1,\ \ldots$ $\ldots,\ i_{00}$ (см. (1.5)). Окончательно формулы, аналогичные (2.4), (2.5), имеют вид

$$\alpha_{ki} = \beta_{ki} - (ta\chi_i,\ \Phi_k)(ad\Phi_k,\ \Phi_k)^{-1},\ k = 1,\ 2,\ \ldots,$$

$$\beta_{ki} = \frac{(sd\chi_i,\ \Phi_k) + (ta\chi_i,\ \Phi_k)\,(ad\Phi_k,\ \Phi_k)^{-1}\left(d^2\Phi_k,\ \Phi_k\right)}{\lambda_k - \lambda_i},\quad k \neq i_0,\ i_0+1,\ \ldots,\ i_{00}.$$

Таким же образом строятся и члены высшего порядка малости в разложениях (1.5). Отметим, что предлагаемая методика построения этих асимптотических разложений отличается от методики [9], так как здесь не используется никакая информация, кроме исходной системы уравнений (1.1).

Случай Б. Пусть $\lambda_{j_0}^{(1)} = \lambda_{j_0+1}^{(1)} = \ldots = \lambda_{j_{00}}^{(1)}$, $i_0 \leqslant j_0 < j_{00} \leqslant i_{00}$, т. е. часть кратных собственных значений (или все) и в первом приближении остаются кратными. Введем новые собственные функции и функции первого порядка малости:

$$w_j^{(0)} = \sum_{n=j_0}^{j_{00}} \rho'_{nj}w_n^{(0)},\quad w_j^{(1)} = \sum_{n=j_0}^{j_{00}} \rho'_{nj}w_n^{(1)},$$

$$f_j^{(1)} = \sum_{n=j_0}^{j_{00}} \rho'_{nj}f_n^{(1)},\quad j = j_0,\ j_0+1,\ \ldots,\ j_{00},$$

где функции $w_n^{(0)}$, $w_n^{(1)}$ и $f_n^{(1)}$ взяты из (2.1) и (3.1). Легко видеть, что так устроенные функции удовлетворяют задачам (1.4), (1.8) и (1.9). Аналогично (2.1) представим функции

$$w_j^{(2)} = \sum_{k=1}^{\infty} \beta'_{kj}w_k,\quad f_j^{(2)} = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha'_{kj}f_k.$$

Для неизвестных коэффициентов ρ'_{nj} получим линейную однородную систему, аналогичную (3.2):

$$\left(\sum_{n=j_0}^{j_{00}} \rho'_{nj}tw_n^{(1)},\ \Phi_k\right)(ad\Phi_k,\ \Phi_k)^{-1}\left(d^2\Phi_k,\ \Phi_k\right) + \left(\sum_{n=j_0}^{j_{00}} \rho'_{nj}sf_n^{(1)},\ \Phi_k\right) +$$

$$+\lambda_j^{(1)}\sum_{n=j_0}^{j_{00}}\rho'_{nj}\beta_{kn}+\lambda_j^{(2)}\sum_{n=j_0}^{j_{00}}\rho'_{nj}\rho_{kn}=0,\quad k=j_0,\ j_0+1,\ \dots,\ j_{00}.$$

Формулы для определения коэффициентов α'_{kj} и β'_{kj} имеют вид

$$\alpha'_{kj}=\beta'_{kj}-\left(\sum_{n=j_0}^{j_{00}}\rho'_{nj}tw_n^{(1)},\ \Phi_k\right)(ad\Phi_k,\ \Phi_k)^{-1},\quad k=1,2,\dots,$$

$$\beta'_{kj}=\frac{\left(\sum_{n=j_0}^{j_{00}}\rho'_{nj}sf_n^{(1)},\ \Phi_k\right)+\left(\sum_{n=j_0}^{j_{00}}\rho'_{nj}tw_n^{(1)},\ \Phi_k\right)(ad\Phi_k,\ \Phi_k)^{-1}\left(d^2\Phi_k,\ \Phi_k\right)+\lambda_j^{(1)}\sum_{n=j_0}^{j_{00}}\rho'_{nj}\beta_{kn}}{\lambda_k-\lambda_j},$$

$$k\neq i_0,\quad i_0+1,\dots,i_{00}.$$

Коэффициенты $\beta'_{kj}\neq 0$, $k=i_0, i_0+1, \dots, i_{00}$ (см. (1.5)).

Исследование спектра в линейных задачах устойчивости неидеальных оболочек является первым необходимым звеном в построении решений задач выпучивания неидеальных систем при нагрузках, близких к критическим [10, 11].

4. Некоторые конкретные примеры для первой и второй задач.

А. Пусть начальная неправильность такова (x — продольная координата, y — окружная):

$$w^0=w^0(x)\quad\left(w^0_{yy}=0,\quad w^0_{xy}=0\right). \tag{4.1}$$

Принимая во внимание (4.1), операторы s и t для выбранной неправильности запишем в виде (см. (1.3))

$$s\equiv t\equiv (h/R)\,w^0_{xx}\cdot(\ )_{yy}. \tag{4.2}$$

При расчетах можно пользоваться формулами (2.4), (2.5) с учетом (4.2), если $\lambda_{nm}\neq\lambda_{n+1,\,m}$ и, кроме того, учитывается ортогональность функций $\sin ny$ и $\cos ny$. Для замкнутых шарнирно-опертых цилиндрических оболочек собственные числа λ_{nm} и собственные функции определяются в виде (см. (1.4))

$$\lambda_{nm}=\left\{\varepsilon^2\left[n^2+\left(\frac{m\pi R}{L}\right)^2\right]^4+\left(\frac{m\pi R}{L}\right)^4\right\}\left[n^2+\left(\frac{m\pi R}{L}\right)^2\right]^{-2}\left[-a_2n^2-a_1\left(\frac{m\pi R}{L}\right)^2\right]^{-1}, \tag{4.3}$$

$$\Phi_{nm}=\gamma_{nm}\begin{Bmatrix}\sin ny\\ \cos ny\end{Bmatrix}\sin m\pi Rx/L,\qquad n=2,3,4,\dots,\ m=1,2,3,\dots,$$

где n — число волн в окружном направлении; m — число полуволн в продольном направлении; γ_{nm} — нормирующие множители, которые определяются из соотношения (см. вторую строку из (1.5))

$$\gamma^2_{nm}\left[\left(\frac{m\pi R}{L}\right)^2+n^2\right]^2\left[-a_1\left(\frac{m\pi R}{L}\right)^2-a_2n^2\right]\int_0^{2\pi}\int_0^{L/R}\sin^2 ny\sin^2\frac{m\pi R}{L}x\,dx\,dy=1.$$

Коэффициенты α_{kjnm} и β_{kjnm} разложений (2.1) подсчитываются по формулам

$$\alpha_{kjnm}=\beta_{kjnm}-\frac{h}{R}\,\frac{\left(w^0_{xx}\Delta\Delta\Phi_{nm,yy},\ \Phi_{kj}\right)}{\left(\Delta\Delta\Phi_{nm,xx},\ \Phi_{kj}\right)}, \tag{4.4}$$

$$\beta_{kjnm}=\frac{h}{R}\left\{\frac{\left(w^0_{xx}\Delta\Delta\Phi_{nm,yy},\ \Phi_{kj}\right)\left(\Phi_{kj,xxxx},\ \Phi_{kj}\right)}{\left(\Delta\Delta\Phi_{kj,xx},\ \Phi_{kj}\right)}+\left(w^0_{xx}\Phi_{nm,xxyy},\ \Phi_{kj}\right)\right\}\frac{1}{\lambda_{kj}-\lambda_{nm}}\ \text{при } k\neq n \text{ или } j\neq m,$$

$$\beta_{kjnm}=0\ \text{при } k=n,\ j=m.$$

С учетом формул (4.4) первая поправка $\lambda^{(1)}_{nm}$ с точностью до множителя μ к собственному числу λ_{nm} (4.3) имеет вид

$$\lambda^{(1)}_{nm}=-\frac{h}{R}\left\{\frac{\left(w^0_{xx}\Delta\Delta\Phi_{nm,yy},\ \Phi_{nm}\right)\left(\Phi_{nm,xxxx},\ \Phi_{nm}\right)}{\left(\Delta\Delta\Phi_{nm,xx},\ \Phi_{nm}\right)}+\left(w^0_{xx}\Phi_{nm,xxyy},\ \Phi_{nm}\right)\right\}.$$

Появление множителя h/R в последней формуле связано с введенной ранее единицей измерения амплитуды начальных неправильностей в (4.2), за единицу измерения выбрана толщина оболочки. Последней формулой можно пользоваться, если на каждой полуволне начальной неправильности оболочка является пологой (см. исходную систему уравнений (1.1)).

Б. Пусть начальная неправильность такая же, как и в примере А: $w^0 = w^0(x)$ $\left(w^0_{yy} = 0,\ w^0_{xy} = 0\right)$, но $\lambda_{nm} = \lambda_{n+1,m}$. Приравняем нулю определитель, соответствующий системе (3.2); после преобразований имеем

$$\begin{vmatrix} 2n^2\left(\frac{m\pi R}{L}\right)^2 \frac{h}{R}\left(w^0_{xx}\Phi_{nm}, \Phi_{nm}\right) + \lambda^{(1)} & 0 \\ 0 & 2(n+1)^2\left(\frac{m\pi R}{L}\right)^2 \frac{h}{R}\left(w^0_{xx}\Phi_{n+1,m}, \Phi_{n+1,m}\right) + \lambda^{(1)} \end{vmatrix} = 0.$$

Так как $\left(w^0_{xx}\Phi_{nm}, \Phi_{nm}\right) = \left(w^0_{xx}\Phi_{n+1,m}, \Phi_{n+1,m}\right)$, то $\lambda^{(1)}_{nm}/\lambda^{(1)}_{n+1,m} = n^2/(n+1)^2 \neq 1$, т. е. четырехкратное собственное значение уже в первом приближении расщепляется на два двукратных.

В. Пусть начальная неправильность имеет вид

$$w^0(x, y) = \sum_{i,j=1}^{\infty} w^0_{ij} \sin iy \sin \frac{j\pi R}{L} x$$

и, кроме того, $\lambda_{nm} \neq \lambda_{n+1,m}$, но наименьшему собственному значению λ_{nm} соответствуют две собственные функции

$$\Phi^1_{nm} = \gamma_{nm} \sin ny \sin \frac{m\pi R}{L} x,$$

$$\Phi^2_{nm} = \gamma_{nm} \cos ny \sin \frac{m\pi R}{L} x, \quad n = 2, 3, 4, \ldots, m = 1, 2, 3, \ldots$$

Введем следующие обозначения:

$$T_{ij} = \left(ta\Phi^i_{nm}, \Phi^j_{nm}\right), \quad S_{ij} = \left(sd\Phi^i_{nm}, \Phi^j_{nm}\right), \quad A_i = \left(ad\Phi^i_{nm}, \Phi^i_{nm}\right),$$

$$D_i = \left(a^2\Phi^i_{nm}, \Phi^i_{nm}\right), \quad \text{где } i, j = 1, 2;$$

определитель, соответствующий системе (3.2), имеет вид

$$\begin{vmatrix} T_{11}D_1A_1^{-1} + S_{11} + \lambda^{(1)} & T_{21}D_1A_1^{-1} + S_{21} \\ T_{12}D_2A_2^{-1} + S_{12} & T_{22}D_2A_2^{-1} + S_{22} + \lambda^{(1)} \end{vmatrix} = 0. \tag{4.5}$$

Так как кривизны w^0_{xx}, w^0_{yy} и w^0_{xy} — непрерывные функции, то соответствующие им ряды можно в заданной области почленно интегрировать. Учитывая равенства

$$\int_0^{2\pi} \sin iy \sin^2 ny dy = 0, \quad \int_0^{2\pi} \cos iy \cos ny \sin ny dy = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin iy \cos^2 ny dy = 0,$$

можно получить $T_{11} = T_{22} = S_{11} = S_{22} = 0$. Для вычисления T_{21} необходимо заметить следующее:

$$\int_0^{2\pi} \sin iy \cos ny \sin ny dy = \begin{cases} 0, & i \neq 2n, \\ \frac{\pi}{2}, & i = 2n, \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos iy \sin^2 ny dy = \begin{cases} 0, & i \neq 2n, \\ -\frac{\pi}{2}, & i = 2n, \end{cases}$$

$$\int_0^{L/R} \sin \frac{j\pi R}{L} x \sin^2 \frac{m\pi R}{L} x dx = \begin{cases} 0, & j \text{ четное}, \\ \frac{4m^2 L}{\pi R j (4m^2 - j^2)}, & j \text{ нечетное}, \end{cases}$$

$$\int_0^{L/R} \cos \frac{j\pi R}{L} x \cos \frac{m\pi R}{L} x \sin \frac{m\pi R}{L} x dx = \begin{cases} 0, & j \text{ четное}, \\ \frac{2mL}{\pi R (4m^2 - j^2)}, & j \text{ нечетное}. \end{cases}$$

В результате вычислений получим

$$T_{21} = 2\,(nm\pi)^2 \frac{h}{L}\left[n^2 + \left(\frac{m\pi R}{L}\right)^2\right]^2 \gamma_{nm}^2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{w_{2n,(2j-1)}}{2j-1}.$$

Остальные величины вычисляются аналогично. Окончательно определитель (4.5) принимает вид

$$\begin{vmatrix} \lambda^{(1)} & -4\frac{h}{R}\left(\frac{R}{L}\right)^3 (m\pi)^4 n^2\gamma_{nm}^2 \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{\overset{0}{w}_{2n,(2j-1)}}{2j-1} \\ -4\frac{h}{R}\left(\frac{R}{L}\right)^3 (m\pi)^4 n^2\gamma_{nm}^2 \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{\overset{0}{w}_{2n,(2j-1)}}{2j-1} & \lambda^{(1)} \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, если среди форм, задающих начальную неправильность, присутствует форма $\sin 2ny \sin j\pi Rx/L$, где j нечетное, то двукратное собственное значение λ_{nm} расщепляется в первом приближении на простые.

Поступила 14 IV 1983

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бушнелл Д.** Потеря устойчивости и выпучивание оболочек — ловушка для проектировщиков.— Ракетн. техника и космонавтика, 1981, т. 19, № 10.
2. **Тонкостенные** оболочечные конструкции/Под ред. Э. И. Григолюка. М.: Машиностроение, 1980.
3. **Муштари Х. П., Галимов К. З.** Нелинейная теория упругих оболочек. Казань: Таткнигоиздат, 1957.
4. **Маделунг Э.** Математический аппарат физики. М.: Физматгиз, 1961.
5. **Найфе А. Х.** Методы возмущений. М.: Мир, 1976.
6. **Титчмарш Э. Ч.** Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Т. 2. М.: ИЛ, 1961.
7. **Корнев В. М.** Устойчивость круговой цилиндрической оболочки, нагруженной внешним поперечным давлением с учетом краевого эффекта.— Инж. журн. МТТ, 1967, № 3.
8. **Корнев В. М.** О структурных формулах при расчете цилиндрических оболочек на колебания и устойчивость.— ПМ, 1974, т. 10, вып. 4.
9. **Койтер В. Т.** Устойчивость и закритическое поведение упругих систем.— Сб. пер. Механика, 1960, т. 63, № 5.
10. **Корнев В. М.** О решении задач устойчивости оболочек с учетом плотности собственных значений. Л.: Судостроение, 1975.
11. **Корнев В. М.** Особенности задач выпучивания тонкостенных оболочек.— В кн.: Динамика твердого тела (Динамика сплошной среды). Вып. 25. Новосибирск: изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1976.

УДК 620.171.5

ПРИМЕНЕНИЕ ФОТОУПРУГИХ ПОКРЫТИЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ДЕФОРМАЦИЙ В МИКРООБЛАСТЯХ ПОЛИКРИСТАЛЛОВ

Л. А. КРАСНОВ, А. П. ШАБАНОВ

(Новосибирск)

При исследованиях по методу фотоупругих покрытий на поверхность образца наносится тонкий слой (покрытие) оптически активного материала. В случае, если толщина покрытия относительно невелика, обработка результатов эксперимента не представляет особых трудностей, так как полученные в ходе эксперимента оптические величины будут пропорциональны измеряемым деформациям на поверхности образца [1]. Если же толщина покрытия соизмерима с характерным размером зоны деформирования, то анализ результатов измерений существенно осложняется и требует специальных методов обработки (уточнения).

Особенно сложна эта задача при исследованиях деформаций в микрообластях реальных поликристаллических материалов. Здесь даже при небольших нагрузках (в области так называемых микропластических деформаций) неупругое деформирование происходит путем образования и развития смещений, определяемых локализацией следов скольжения. Такие зоны концентрации локальных деформаций в свою очередь имеют более тонкую структуру и могут отражать результат действия нескольких механизмов деформирования в области полосы скольжения [2, 3]. Во всех этих случаях