УДК 532.516.2

АСИМПТОТИКА ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ ПРИ ИСЧЕЗАЮЩЕЙ ВЯЗКОСТИ

В. А. Батищев

(*Ростов-на-Дону*)

При больших числах Рейнольдса строятся асимптотические разложения решения нелинейной осесимметричной задачи о волнах на поверхности вязкой несжимаемой жидкости бесконечной глубины в предположении, что касательные напряжения на свободной поверхности имеют порядок $0(1/\mathrm{Re})$. Главные члены асимптотики удовлетворяют линейным уравнениям в частных производных. Полученный результат переносится на случай, когда жидкость заполняет ограниченную область, граница которой является свободной поверхностью. Рассмотрены примеры.

1. Постановка задачи. Для уравнений Навье — Стокса при исчезающей вязкости рассматривается нелинейная осесимметричная задача о волновом движении вязкой несжимаемой жидкости бесконечной глубины под действием приложенных напряжений, начального поля скоростей и начального возвышения свободной поверхности:

$$(1.1)\qquad \partial\mathbf{v}/\partial t+(\mathbf{v},\nabla)\mathbf{v}=-\nabla p+\varepsilon^2\Delta\mathbf{v}+\mathbf{g};\ \operatorname{div}\mathbf{v}=0;$$
$$\mathbf{v}=\mathbf{a};\ \zeta=\zeta_*(t=0);\ \mathbf{v}=\nabla\mathbf{v}=0(z=-\infty).$$

Динамические и кинематическое условия на свободной поверхности $\Gamma_t : z=\zeta(r, t)$ задаются соотношениями

$$(1.2)\qquad p-2\varepsilon^2\left[n_r^2\frac{\partial v_r}{\partial r}+n_z^2\frac{\partial v_z}{\partial z}+n_rn_z\left(\frac{\partial v_r}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\right]=p_*;\ \left(n_r^2-n_z^2\right)\times$$
$$\times\left(\frac{\partial v_r}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)+2n_rn_z\left(\frac{\partial v_z}{\partial z}-\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)=T_1;$$
$$n_r\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r}-\frac{v_\theta}{r}\right)+n_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}=T_2;$$
$$\frac{\partial F}{\partial t}+v_r\frac{\partial F}{\partial r}+v_z\frac{\partial F}{\partial z}=0.$$

Безразмерные величины, входящие в (1.1), (1.2), связаны с размерными (последние отмечены штрихом) следующими формулами:

$$\left(r',z',\zeta',\zeta_*'\right)=l\,(r,z,\zeta,\zeta_*);\quad t'=\gamma t;$$
$$(\mathbf{v}',\mathbf{a}')=\frac{l}{\gamma}(\mathbf{v},\mathbf{a});\quad \left(p',p_*',T_1',T_2'\right)=\rho_0l^2\gamma^{-2}(p,p_*,T_1,T_2);$$
$$\varepsilon^2=\frac{l^2}{\nu\gamma}=1/\mathrm{Re}.$$

Здесь r', z', θ' — цилиндрические координаты; $\mathbf{v}'=\left(v_r',v_z',v_\theta'\right)$ — вектор скорости; p' — гидродинамическое давление; $\zeta'(r, z, t)$ — возвышение свободной поверхности в момент времени t; $F(r, z, t)=0$ — уравнение свободной поверхности Γ_t в неявной форме; $\mathbf{n}=(n_r, n_z, 0)$ — единичный вектор нормали к Γ_t; g — ускорение силы тяжести; ρ_0 — плотность жидкости; l и γ — соответственно единицы длины и времени; ν — кинематический коэффициент вязкости; Re — число Рейнольдса. Касательные напряжения на свободной границе $T_1(r, t)$ и $T_2(r, t)$ предполагаются величинами порядка $0(\varepsilon^2)$. В силу осевой симметрии все функции не зависят от угла θ.

Задача (1.1), (1.2) в линеаризованной постановке рассматривалась в работах [1-5]. В данной статье построена асимптотика решения задачи (1.1), (1.2) при $\varepsilon \to 0$. Для решения задачи применяется метод работы [6].

2. Построение асимптотики. Асимптотические разложения решения задачи (1.1), (1.2) строятся в виде

$$\mathbf{v} \sim \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k \mathbf{v}_k(r, z, t) + \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k \mathbf{h}_k\left(\frac{\rho}{\varepsilon}, \varphi, t\right);$$
$$p \sim \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k p_k(r, z, t) + \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k q_k\left(\frac{\rho}{\varepsilon}, \varphi, t\right);$$
$$\zeta \sim \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k \zeta_k(\varphi, t). \tag{2.1}$$

Функции $\mathbf{v}_0$, p_0, ζ_0 находятся из решения задачи о волнах на поверхности идеальной несжимаемой жидкости бесконечной глубины

$$\frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial t} + (\mathbf{v}_0, \nabla)\mathbf{v}_0 = -\nabla p_0 + \mathbf{g}; \quad \operatorname{div} \mathbf{v}_0 = 0; \quad \mathbf{v}_0 = \mathbf{a};$$
$$\zeta_0 = \zeta_*(t = 0); \quad \mathbf{v}_0 = \nabla \mathbf{v}_0 = 0(z = -\infty); \quad p_0 = p_*;$$
$$\frac{\partial \zeta_0}{\partial t} + v_{r0}\frac{\partial \zeta_0}{\partial r} = v_{z0}\left(r, z, t \in \Gamma_t^0 : z = \zeta(r, t)\right). \tag{2.2}$$

Функции $\mathbf{v}_k$, p_k находятся в результате первого итерационного процесса [7]. Обозначая через $P(\mathbf{V})$ левую часть системы (1.1), где $\mathbf{V}=(v_r, v_z, v_\theta, p)$, потребуем выполнения соотношения

$$P(\mathbf{V}_N) = 0(\varepsilon^{N+1});$$
$$\mathbf{V}_N \equiv \left(\sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k \mathbf{v}_k, \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k p_k\right). \tag{2.3}$$

Приравнивая в (2.3) коэффициенты при $\varepsilon^0, \varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^N$ нулю, для определения $\mathbf{v}_k$, p_k получаем линейные системы уравнений в частных производных

$$\frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial t} + \sum_{i+j=k} (\mathbf{v}_i, \nabla)\mathbf{v}_j = -\nabla p_k + \Delta \mathbf{v}_{k-2};$$
$$\operatorname{div} \mathbf{v}_k = 0;$$
$$\mathbf{v}_k|_{t=0} = 0; \quad \mathbf{v}_k = \nabla \mathbf{v}_k = 0(z = -\infty);$$
$$(\mathbf{v}_{-1} \equiv 0, \ k = 1, 2, \ldots, N). \tag{2.4}$$

Функции $\mathbf{h}_k$, $\mathbf{q}_k$ сосредоточены в окрестности свободной границы Γ_t и компенсируют невязки при выполнении динамических условий (1.2) для касательных напряжений. Свободной границей Γ_t^0 идеальной жидкости при $t > 0$ является поверхность, состоящая из тех жидких частиц, которые находились на ней при $t=0$. Для построения функций $\mathbf{h}_k$, q_k вводятся подвижные локальные координаты (ρ, φ) [6]. Пусть $r=R(\varphi, t)$, $z=Z(\varphi, t)$ — параметрическое уравнение контура Γ_t^0 в меридиональном сечении $\rho = \rho(r, z, t)$ — расстояние точки $(r, z,)$ до Γ_t; $\varphi=\varphi(r, z, t)$—значение параметра, соответствующее точке на Γ_t^0, ближайшей к (r, z); тогда вектор $\mathbf{X} = (r, z)$ связан с вектором $\mathbf{Y} = (R, Z)$ формулой

$$\mathbf{X} = \mathbf{Y} + \rho \mathbf{n}_0. \tag{2.5}$$

Здесь расстояние ρ отсчитывается по внутренней нормали к Γ_t, а $\mathbf{n} = (a_0, b_0)$ — единичный вектор нормали к Γ_t^0. Можно показать [8], что в окрестности границы Γ_t^0 справедливы формулы

$$\begin{gathered}\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \delta^{-2}(1-\rho\varkappa)^{-1}\frac{\partial R}{\partial \varphi}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \delta^{-2}(1-\rho\varkappa)^{-1}\frac{\partial Z}{\partial \varphi};\\ \frac{\partial \rho}{\partial r} = -a_0 = -\delta^{-1}\frac{\partial Z}{\partial \varphi}; \quad \frac{\partial \rho}{\partial z} = -b_0 = \delta^{-1}\frac{\partial R}{\partial \varphi};\\ \delta^2 = \left(\frac{\partial R}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial \varphi}\right)^2; \quad \varkappa = \delta^{-3}\left(\frac{\partial R}{\partial \varphi}\frac{\partial^2 Z}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial Z}{\partial \varphi}\frac{\partial^2 R}{\partial \varphi^2}\right).\end{gathered} \tag{2.6}$$

Здесь $\varkappa$ — кривизна контура Γ_t^0.

Определим уравнения, которым удовлетворяют функции $\mathbf{h}_k$, q_k. Пусть $h_{\rho k}, h_{\varphi k}, h_{\theta k}, v_{\rho k}, v_{\varphi k}\ v_{\theta k}$ — соответственно компоненты векторов $\mathbf{h}_k$, $\mathbf{v}_k$ в координатах ρ, φ, θ. Запишем (1.1) в локальных координатах, учитывая, что коэффициенты Лямэ равны $H_\rho = 1$, $H_\varphi = \delta(1-\rho\varkappa)$, $H_\theta = R + a_0\rho$. Подставим (2.1) в полученные уравнения с учетом (2.2), (2.4). Разложим известные коэффициенты в ряды Тейлора по степеням ρ, учитывая справедливое при $\rho = 0$ соотношение $\partial\rho/\partial t + \mathbf{v}_0\nabla\rho = 0$ и полагая $\rho = \varepsilon s$. Приравнивая последовательно нулю коэффициенты при $\varepsilon^0, \varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^N$ для $\mathbf{h}_0$, получим систему нелинейных однородных уравнений

$$\begin{gathered}\frac{\partial h_{\varphi 0}}{\partial t} + (h_{\rho 1} + v_{\rho 1} + sa(t,\varphi))\frac{\partial h_{\varphi 0}}{\partial s} + (\delta^{-1}h_{\varphi 0} +\\ + b(t,\varphi))\frac{\partial h_{\varphi 0}}{\partial \varphi} + c_1 h_{\varphi 0} + \delta^{-1}R^{-1}\frac{\partial R}{\partial \varphi}h_{\theta 0}^2 = \frac{\partial^2 h_{\varphi 0}}{\partial s^2};\\ \frac{\partial h_{\theta 0}}{\partial t} + (h_{\rho 1} + v_{\rho 1} + sa(t,\varphi))\frac{\partial h_{\theta 0}}{\partial s} + (\delta^{-1}h_{\varphi 0} + b(t,\varphi))\frac{\partial h_{\varphi 0}}{\partial \varphi} +\\ + c_4 h_{\theta 0} + c_3 h_{\varphi 0} + \delta^{-1}R^{-1}\frac{\partial R}{\partial \varphi}h_{\theta 0}h_{\varphi 0} = \frac{\partial^2 h_{\theta 0}}{\partial s^2};\\ \delta R\frac{\partial h_{\rho 1}}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial \varphi}(Rh_{\varphi 0}) = 0;\\ \mathbf{h}_0|_{t=0} = 0, \quad \mathbf{h}_0|_{s=\infty} = 0; \quad \partial\mathbf{h}_0/\partial s|_{s=0} = 0.\end{gathered}$$

Отсюда следует: $h_{\theta 0} = h_{\varphi 0} = 0$. Из уравнения неразрывности находим $h_{\rho 0} = h_{\rho 1} = 0$. Коэффициенты $a(t,\varphi)$, $b(t,\varphi)$ $c_1(t,\varphi), \ldots, c_4$ равны

$$\begin{gathered}a(t,\varphi) = \frac{\partial}{\partial \rho}\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v}_0\nabla\rho\right]_{\rho=0}; \quad b(t,\varphi) = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} +\right.\\ \left. + \mathbf{v}_0\nabla\varphi\right]_{\rho=0}; \quad c_1(t,\varphi) = \left[\delta^{-1}\frac{\partial v_{\varphi 0}}{\partial \varphi} - \varkappa v_{\rho 0}\right]_{\rho=0};\\ c_2(t,\varphi) = 2\delta^{-1}R^{-1}\frac{\partial R}{\partial \varphi}v_{\varphi 0}\Big|_{\rho=0};\\ c_3(t,\varphi) = \delta^{-1}R^{-1}\frac{\partial R}{\partial \varphi}v_{\varphi 0}\Big|_{\rho=0};\\ c_4(t,\varphi) = \left[\delta^{-1}R^{-1}\frac{\partial R}{\partial \varphi}v_{\varphi 0} + a_0R^{-1}v_{\rho 0}\right]_{\rho=0}.\end{gathered}$$

Аналогично для $\mathbf{h}_k$, q_k получаются системы линейных уравнений вида

$$\text{(2.7)}\qquad \frac{\partial h_{\varphi k}}{\partial t}+sa\frac{\partial h_{\varphi k}}{\partial s}+b\frac{\partial h_{\varphi k}}{\partial \varphi}+c_1h_{\varphi k}+c_2h_{\theta k}-$$

$$-\frac{\partial^2 h_{\varphi k}}{\partial s^2}=F_{k-1};\quad \frac{\partial h_{\theta k}}{\partial t}+sa\frac{\partial h_{\theta k}}{\partial s}+$$

$$+b\frac{\partial h_{\theta k}}{\partial \varphi}+c_3h_{\varphi k}+c_4h_{\theta k}-\frac{\partial^2 h_{\theta k}}{\partial s^2}=N_{k-1};$$

$$\frac{\partial q_{k+1}}{\partial s}+\left(\delta^{-1}\frac{\partial v_{\rho 0}}{\partial \rho}+2\varkappa v_{\varphi 0}\right)_{\rho=0}h_{\varphi k}-$$

$$-2a_0R^{-1}v_{\theta 0}h_{\theta k}=M_{k-1};$$

$$\delta R\frac{\partial h_{\rho,k+1}}{\partial s}-\delta(a_0-\varkappa R)\frac{\partial}{\partial s}(sh_{\rho k})-$$

$$-\delta a_0\varkappa\frac{\partial}{\partial s}(s^2h_{\rho,k-1})-\frac{\partial}{\partial \varphi}(Rh_{\varphi k})+s\frac{\partial}{\partial \varphi}(a_0h_{\varphi,k-1})=0;$$

$$\mathbf{h}_k|_{t=0}=0,\quad \mathbf{h}_k|_{s=\infty}=q_k|_{s=\infty}=0,\quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ N).$$

Правые части F_{k-1}, N_{k-1}, M_{k-1} известны и выражаются через $\mathbf{v}_0,\ldots,$ $\mathbf{v}_{k-1}$, $\mathbf{h}_0,\ldots,\mathbf{h}_{k-1}$. В частности, $F_0=M_0=N_0=0$, а также $q_1=q_0=0$.

Далее определим уравнения, которым удовлетворяют функции $\zeta_k(t,\varphi)$. Пусть $\rho=\zeta(t,\varphi,\varepsilon)\sim\sum\limits_{k=0}^{N}\varepsilon^k\zeta_k(t,\varphi)$ — уравнение Γ_t, причем $\zeta_0=0$, так как $\rho=0$ есть уравнение Γ_t^0. Положим в (1.2) $F=-\rho+\zeta$ и, используя те же рассуждения, что и при выводе (2.7), получим

$$\text{(2.8)}\qquad \frac{\partial \zeta_k}{\partial t}+b(t,\varphi)\frac{\partial \zeta_k}{\partial \varphi}-a(t,\varphi)\zeta_k=[h_{\rho k}+$$

$$+v_{\rho k}]_{\rho=0}+E_{k-1};\ \zeta_k|_{t=0}=0;\ E_0=E_1=0\ \ (k=1,2,\ldots,N).$$

Применяя первый и второй итерационные процессы одновременно к динамическим условиям (1.2), для систем (2.4), (2.7) получим краевые условия при $s=0$:

$$\text{(2.9)}\qquad \frac{\partial h_{\varphi k}}{\partial s}=\left(a_0^2-b_0^2\right)\left(\frac{\partial v_{r,k-1}}{\partial z}+\frac{\partial v_{z,k-1}}{\partial r}\right)+$$

$$+2a_0b_0\left(\frac{\partial v_{t,k-1}}{\partial z}-\frac{\partial v_{r,k-1}}{\partial r}\right)+A_{k-1};$$

$$\frac{\partial h_{\theta k}}{\partial s}=a_0\left(\frac{\partial v_{\theta,k-1}}{\partial r}-\frac{v_{\theta,k-1}}{r}\right)+b_0\frac{\partial v_{\theta,k-1}}{\partial z}+$$

$$+B_{k-1};\ p_k+q_k=2a_0^2\frac{\partial v_{r,k-2}}{\partial r}+$$

$$+2b_0^2\frac{\partial v_{z,k-2}}{\partial z}+2a_0b_0\left(\frac{\partial v_{r,k-2}}{\partial r}+\frac{\partial v_{z,k-2}}{\partial z}\right)+D_{k-1}.$$

Здесь $A_0=B_0=D_0=D_1=0$, A_{k-1}, B_{k-1}, D_{k-1} известны и выражаются через $\mathbf{v}_0,\ldots,\mathbf{v}_{k-1}$, $\mathbf{h}_0,\ldots,\mathbf{h}_{k-1}$. Заметим, что в данном случае $\mathbf{v}_1=p_1=\zeta_1=0$.

3. Решение уравнений пограничного слоя. Предположим, что известно решение задачи (2.2). Для того чтобы получить явное выражение для главных членов асимптотики $h_{\varphi 1}$, $h_{\theta 1}$, сделаем в (2.7) при $k=1$ замену переменных

$$\xi = sL(t,\varphi);\quad \eta=\eta(t,\varphi);\quad t_1=t,$$

где $L(t,\varphi)$, $\eta(t,\varphi)$ являются решениями задач Коши:

$$\frac{\partial L}{\partial t}+b(t,\varphi)\frac{\partial L}{\partial \varphi}-a(t,\varphi)L=0,\ L|_{t=0}=1;$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}+b(t,\varphi)\frac{\partial \eta}{\partial \varphi}=0,\ \eta|_{t=0}=\varphi.$$

Первые два уравнения (2.7) принимают вид

$$\frac{\partial h_{\varphi 1}}{\partial t}+c_1 h_{\varphi 1}+c_2 h_{\theta 1}=L^2\frac{\partial^2 h_{\varphi 1}}{\partial \xi^2};$$

$$\frac{\partial h_{\theta 1}}{\partial t}+c_3 h_{\varphi 1}+c_4 h_{\theta 1}=L^2\frac{\partial^2 h_{\theta 1}}{\partial \xi^2};$$

$$\mathbf{h}_1|_{t=0}=\mathbf{h}_1|_{\xi=\infty}=0;$$

$$\left.\frac{\partial h_{\varphi 1}}{\partial \xi}\right|_{\xi=0}=\omega_1(t,\eta);\ \left.\frac{\partial h_{\theta 1}}{\partial \xi}\right|_{\xi=0}\omega_2(t,\eta),$$

где обозначено

$$\omega_1(t,\eta)=L^{-1}\left[(a_0^2-b_0^2)\left(\frac{\partial v_{r0}}{\partial z}+\frac{\partial v_{z0}}{\partial r}\right)+2a_0 b_0\left(\frac{\partial v_{z0}}{\partial z}-\frac{\partial v_{r0}}{\partial r}\right)\right]_{\rho=0};$$

$$\omega_2\ (t,\ \eta)=L^{-1}\left[a_0\left(\frac{\partial v_{\theta 0}}{\partial r}-\frac{v_{\theta 0}}{r}\right)+b_0\frac{\partial v_{\theta 0}}{\partial z}\right]_{\rho=0}.$$

Введем новые функции $H_1(\xi,\eta,t)$, $H_2(\xi,\eta,t)$ по формулам $h_{\varphi 1}=f_1(t,\eta)H_1$, $h_{\theta 1}=f_2(t,\eta)H_2$, где f_1 и f_2 удовлетворяют системе уравнений

(3.1) $$\partial f_1/\partial t+c_1 f_1+c_3 f_1^2 f_2^{-1}=0,\quad f_1|_{t=0}=1;$$

$$\partial f_2/\partial t+c_4 f_2+c_2 f_2^2 f_1^{-1}=0,\quad f_2|_{t=0}=1.$$

Вводя новую переменную $t_2(dt_2=L^2 dt_1)$, получаем для функции $w_1(\xi,\eta,t)=H_1+H_2$ уравнение теплопроводности

(3.2) $$\frac{\partial w_1}{\partial t_2}=\frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi^2};\quad w_1|_{t=0}=w_1|_{\xi=\infty}=0;\quad \left.\frac{\partial w_1}{\partial \xi}\right|_{\xi=0}=\frac{\omega_1}{f_1}+\frac{\omega_2}{f_2}.$$

Решение уравнения (3.2) представляется в замкнутой форме

(3.3) $$w_1(\xi,\eta,t)=-\int_0^{t_2}[\pi(t_2-u)]^{-1/2}e^{-\frac{\xi^2}{4(t_2-u)}}\left[\frac{\omega_1(u,\eta)}{f_1(u,\eta)}+\right.$$

$$\left.+\frac{\omega_2(u,\eta)}{f_2(u,\eta)}\right]du.$$

Введем функции $H_3(\xi,\eta,t)$ и $H_4(\xi,\eta,t)$ по формулам $h_{\varphi 1}=f_3(t,\eta)H_3$, $h_{\theta 1}=f_4(t,\eta)H_4$, где f_3 и f_4 удовлетворяют системе (3.1), в которой надо c_1, c_3 заменить соответственно на $-c_1$ и $-c_3$. Тогда функция $w_2(\xi,\eta,t)=$

$=H_3+H_4$ удовлетворяет (3.2), если f_1 заменить на f_3, а f_2 на $-f_4$, и имеет вид

$$w_2(\xi, \eta, t) = \int_0^{t_2} [\pi (t_2 - u)]^{-1/2} e^{-\frac{\xi^2}{4(t_2-u)}} \left[\frac{\omega_2(u, \eta)}{f_4(u, \eta)} - \frac{\omega_1(u, \eta)}{f_3(u, \eta)}\right] du. \tag{3.4}$$

Чтобы получить выражение для $h_{\varphi 1}$, надо (3.3) умножить на f_4, а (3.4) на $-f_2$ и сложить. Аналогично получается $h_{\theta 1}$.

4. Случай ограниченной области. Примеры. Метод асимптотических разложений, изложенный в п. 2, переносится на случай, когда жидкость заполняет ограниченную область, граница которой является свободной поверхностью. Теперь асимптотические разложения строятся в виде (2.1). Функции $\mathbf{v}_k$, p_k удовлетворяют системам (2.4). Для локальных координат справедливы формулы (2.5), (2.6), а функции $\mathbf{h}_k$, q_k, ζ_k определяются из (2.7) — (2.9).

Пример 1. Пусть в начальный момент времени жидкость заключена внутри шара $x^2+y^2+z^2 \leqslant 1$ и в ней задано поле скоростей $v_\theta=0$; $v_r=\lambda r/\sqrt{3}$; $v_z=-2\lambda z/\sqrt{3}$, а поверхность шара является свободной границей. Соответствующее течение идеальной жидкости при отсутствии силы тяжести было получено Л. В. Овсянниковым [9]. С ростом t шар деформируется в эллипсоид вращения с полуосями $\tau(t)$, $\tau(t)$, $\tau^{-2}(t)$, причем, когда $\lambda<0$, то при $t \to \infty$, $\tau \to 0$ эллипсоид вытягивается вдоль оси z, а когда $\lambda > 0$, то эллипсоид сплющивается к плоскости $z=0$. Учет вязкости приводит к разложениям (2.1), в которых $\mathbf{v}_0$, p_0 находятся из (2.2) и имеют вид [9]

$$v_{r0}=\dot\tau\tau^{-1}r;\ v_{z0}=-2\dot\tau\tau^{-1}z;\ v_{\theta 0}=0;\ \dot\tau=d\tau(t)/dt;$$

$$p_0=-0{,}5\tau\ddot\tau(r^2\tau^{-2}+z^2\tau^4-1);$$

$$\int_1^\tau \sqrt{2+\alpha^6}\cdot\alpha^{-3}d\alpha=\lambda t \quad (\lambda=\mathrm{const}).$$

Главные члены асимптотических разложений определяются из уравнений (2.7), (2.9) при $k=1$, где

$$Z(t,\ \varphi)=\tau^{-2}\sin\varphi;\ R(t,\ \varphi)=\tau\cos\varphi;\ a_0=\tau^{-2}\delta^{-1}\cos\varphi;$$

$$b_0=\tau\delta^{-2}\sin\varphi;\ \delta^2=\tau^2\sin^2\varphi+\tau^{-4}\cos^2\varphi;\ b(t,\ \varphi)=0;$$

$$a(t,\ \varphi)=\dot\tau\tau^{-1}\delta^{-2}(\tau^{-4}\cos^2\varphi-2\tau^2\sin^2\varphi);$$

$$c_1=\dot\tau\tau^{-1}\delta^{-2}(\tau^2\sin^2\varphi-2\tau^{-4}\cos^2\varphi);$$

$$c_3=0;\ \omega_1=-3\dot\tau\tau^{-3}\delta^{-3}\sin 2\varphi;\ \omega_2=0.$$

Используя формулы (3.3), (3.4), находим

$$h_{\theta 1}=0,\ h_{\varphi 1}=3\delta^{-2}\sin 2\varphi\int_0^t \frac{\dot\tau(u)}{\tau(u)\sqrt{\pi(t-u)}}e^{-\frac{s^2\tau^2\delta^2}{4(t-u)}}du.$$

$$h_{\theta 1}=0,$$

Из (2.7) получаем давление в пограничном слое

$$q_2=30\dot\tau\tau^{-3}\delta^{-4}\cos^2\varphi\sin^2\varphi\int_0^t\dot\tau(u)\tau^{-1}(u)\,\mathrm{erfc}\left(\frac{s\tau\delta}{2\sqrt{t-u}}\right)du.$$

Теперь определим второе приближение первого итерационного процесса $\mathbf{v}_2=(v_{r2}, v_{z2}, 0)$. Используя соотношения $\operatorname{rot} \mathbf{v}_2=0$, $\operatorname{div} \mathbf{v}_2=0$, вводим функцию Φ. Учитывая, что $\mathbf{v}_2=\operatorname{grad} \Phi$, из (2.4) получаем систему уравнений для Φ и p_2:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \dot{\tau}\tau^{-1} r \frac{\partial \Phi}{\partial r} - 2\dot{\tau}\tau^{-1} z \frac{\partial \Phi}{\partial z} + p_2 = 0; \quad \nabla^2 \Phi = 0; \quad \Phi|_{t=0} = 0;$$
$$\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right);$$
$$[p_2 + q_2]_{\rho=0} = 2\dot{\tau}\tau^{-1}\delta^{-2}\left(\tau^{-4}\cos^2\varphi - 2\tau^2\sin^2\varphi\right);$$
$$\left(r, z, t \in D_t^0 : r^2\tau^{-2} + z^2\tau^4 \leqslant 1\right).$$

Отсюда исключением p_2 получается краевая задача для Φ:

$$\nabla^2 \Phi = 0; \quad \Phi|_{\rho=0} = \frac{12\tau^6 \ln \tau}{(1-\tau^6)\,[1+\tau^6+(1-\tau^6)\cos 2\varphi]}$$
$$\left(r, z, t \in D_t^0\right).$$

Решение этой задачи представим в виде ряда

$$\Phi = \frac{12\tau^6 \ln \tau}{1-\tau^6} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k G_k(\tau)\, Q_k^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\tau^6}}\right) p_k(\cos 2\varphi)\, Q_k(\operatorname{ch} \alpha),$$

где $p_k(x)$, $Q_k(x)$ — функции Лежандра 1-го и 2-го рода, а $G_k(\tau)$ и α находятся из соотношений

$$G_k(\tau) = \frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{(1+\tau)\, p_k(x)}{1+\tau+x(1-\tau)}\, dx; \quad \frac{r^2}{\operatorname{sh}^2\alpha} + \frac{z^2}{\operatorname{ch}^2\alpha} = \frac{1-\tau^6}{\tau^4}.$$

Теперь ζ_2 определяется из уравнения (2.8) при $k=1$, где $h_{\rho 2}$ и $v_{\rho 2}$ находятся из равенств

$$v_{\rho 2} = \delta^{-1}\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}; \quad \delta R \frac{\partial h_{\rho 2}}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial \varphi}(R h_{\varphi 1}) = 0; \quad h_{\rho 2}|_{s=\infty} = 0.$$

Отсюда следует

$$\zeta_2 = 1{,}5\tau^{-2}\delta^{-1}\int_{1}^{\tau^2} \frac{x^3(1+\sin^2\varphi)\sin^2\varphi - (1+\cos^2\varphi)\cos^2\varphi}{(\cos^2\varphi + x^3\sin^2\varphi)^2} \times$$
$$\times \sqrt{2+x^3}\,\ln x\, dx + 3\tau^{-1}\delta^{-1}\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(\tau)\, p_k(\cos 2\varphi);$$
$$\alpha_k(\tau) = (-1)^k \int_{1}^{\tau^2} \frac{x^3 \ln x}{1-x^6} G_k(x^3)\, Q_k^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^3}}\right) \frac{d}{dx} Q_k\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^3}}\right) \times$$
$$\times \sqrt{\frac{2+x^3}{1-x^3}}\, dx.$$

Пример 2. Рассмотрим свободное всплытие газового пузыря в жидкости. Предполагаем радиус пузыря c настолько малым, что под влиянием поверхностного натяжения он сохраняет сферическую форму. Поместим начало подвижной системы координат в центр пузыря, тогда в этих координатах функция тока ψ_0 вырожденной задачи (2.2) для течения вне пузыря, движущегося со скоростью $u(t)$, дается выражением

$$\psi_0 = \frac{1}{2} u(t)\left(r^2 - \frac{c^3}{r}\right)\sin^2\varphi.$$

Всюду в этом примере r, φ, θ — сферические координаты. Течение происходит в меридиональном сечении, поэтому $v_{k\theta}=h_{k\theta}=0$. Уравнение и краевые условия для скорости $h_{\varphi 1}$ в пограничном слое на пузыре имеют вид

$$\frac{\partial h_{\varphi 1}}{\partial t} - 2\beta s\frac{\partial h_{\varphi 1}}{\partial s}\cos\varphi + \beta\frac{\partial h_{\varphi 1}}{\partial\varphi}\sin\varphi + \beta h_{\varphi 1}\cos\varphi = \frac{\partial^2 h_{\varphi 1}}{\partial s^2};$$

$$h_{\varphi 1}|_{t=0} = h_{\varphi 1}|_{s=\infty} = 0;$$

$$\left.\frac{\partial h_{\varphi 1}}{\partial s}\right|_{s=0} = 2\beta\sin\varphi \quad \left(\beta = \frac{3}{2}\frac{u(t)}{c}\right).$$

Применяя метод п. 3, получим выражение для $h_{\varphi 1}$, а из (2.7) при $k=1$ находится давление в пограничном слое q_2:

$$h_{\varphi 1} = \frac{2}{\sqrt{\pi}\cdot\sin\varphi}\int\limits_0^{\tau}\frac{B(u,\varphi)}{\sqrt{\tau-u}}\, e^{-\frac{s^2\sin^2\varphi}{4(\tau-u)}}\,du;$$

$$q_2 = -12uc^{-2}\sin^{-2}\varphi\int\limits_0^{\tau}B(u,\varphi)\,\mathrm{erfc}\left(\frac{s\sin^2\varphi}{2\sqrt{\tau-u}}\right)du,$$

где

$$\tau = 16e^{-2\int\limits_0^t\beta(t)dt}\,\mathrm{tg}^2\frac{\varphi}{2}\int\limits_0^t\frac{\exp\left(4\int\limits_0^x\beta(x)\,dx\right)dx}{\left[1+\exp\left(2\int\limits_0^x\beta(x)\,dx - 4\int\limits_0^t\beta(t)\,dt\right)\mathrm{tg}^2\frac{\varphi}{2}\right]^4}.$$

Здесь $B(u, \varphi)$ получается из $\beta(t)$, если использовать последнюю формулу, в которой τ надо заменить на u.

В случае $u=\mathrm{const}$ эти формулы согласуются с результатом, полученным А. Г. Петровым [10].

Автор выражает глубокую благодарность Л. С. Срубщику и В. И. Юдовичу за постановку задачи и обсуждение результатов.

Поступила 15 VII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сретенский Л. Н.* О волнах на поверхности вязкой жидкости.—«Труды ЦАГИ», 1941, № 541.
2. *Моисеев Н. Н.* О краевых задачах для линеаризованных уравнений Навье — Стокса в случае, когда вязкость мала.— «Журн. вычисл. матем. и матем. физ.», 1961, т. 1, № 3.
3. *Потетюнко Э. Н., Срубщик Л. С., Царюк Л. Б.* О применении метода стационарной фазы в некоторых работах по теории волн на поверхности вязкой жидкости.— ПММ, 1970, т. 34, вып. 1.
4. *Потетюнко Э. Н.* Асимптотический анализ волновых движений вязкой жидкости при малых и больших временах.— «Докл. АН СССР», 1973, т. 210, № 5.
5. *Потетюнко Э. Н., Срубщик Л. С.* Асимптотический анализ волновых движений вязкой жидкости со свободной границей.— ПММ, 1973, т. 34, вып. 5.

6. *Срубщик Л. С., Юдович В. И.* Асимптотика слабых разрывов течений жидкости при исчезающей вязкости.— «Докл. АН СССР», 1971, т. 199, № 3.
7. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром.— «Усп. мат. наук», 1957, т. 12, № 5.
8. *Срубщик Л. С.* О потере устойчивости несимметричных строго выпуклых тонких пологих оболочек.— ПММ, 1973, т. 37, вып. 1.
9. *Овсянников Л. В.* Задача о неустановившемся движении жидкости со свободной границей.— В кн.: Общие уравнения и примеры. Новосибирск, «Наука», 1967.
10. *Петров А. Г.* Нестационарный пограничный слой на сферическом пузыре. —«Вестн. МГУ», 1971, № 1.

УДК 532.529.5

КАПЛЯ В ОСЦИЛЛИРУЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ

В. А. Мурга

(*Новосибирск*)

В настоящее время не существует работ, посвященных вынужденному движению капли, помещенной в осциллирующую жидкость. Однако этот вопрос представляет собой значительный интерес. Рассматриваемая задача моделирует, например, гидродинамические процессы, происходящие при облучении длинноволновым звуком капелек одной жидкости, находящихся в другой жидкости, возникающие при этом стационарные течения могут существенно влиять на процессы тепло- и массопереноса.

В предлагаемой работе рассматривается задача о нахождении поля скоростей внутри и вне капли, совершающей вынужденное колебательное движение вследствие взаимодействия ее с окружающей жидкостью, которая на достаточно большом удалении от капли осциллирует заданным образом, причем $s/R \ll 1$ (s — амплитуда смещения частиц жидкости, R — радиус капли).

Граница раздела двух сред совершает сложное движение, состоящее из перемещения ее как целого, а также из деформации, т. е. из отклонения ее формы от первоначально сферической. Обе жидкости (внутри и вне капли) считаются вязкими и несжимаемыми. Силы тяжести отсутствуют. Картина течения предполагается осесимметричной по отношению к прямой, проходящей через центр тяжести капли и имеющей направление, совпадающее с направлением движения невозмущенной жидкости (в дальнейшем, при использовании сферической системы координат, полярная ось будет совпадать с осью симметрии). Движение жидкости предполагается периодическим по времени.

Область разбивается на две: внешнюю (область вне капли) и внутреннюю (область внутри капли). Все величины, кроме независимых переменных, относящиеся к внутренней области, снабжены штрихами. Начало координат связано с центром тяжести капли. Исходные уравнения для внешней области записываются в виде

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + [\mathbf{w} - \mathbf{v}_0)\nabla]\,\mathbf{w} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\triangle\mathbf{w},$$

$$\nabla\mathbf{w} = 0,$$

где $\mathbf{w}$ — скорость частиц жидкости в неподвижной системе координат; p — давление; ρ — плотность; ν — коэффициент кинематической вязко-