УДК 519.63

Потоковая схема предиктор–корректор для решения 3D задачи теплопереноса*

К.В. Воронин[1,2], Ю.М. Лаевский[1,2]

[1]Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. М.А. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

[2]Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090
E-mails: ol_mer@mail.ru (К.В. Воронин), laev@labchem.sscc.ru (Ю.М. Лаевский)

Воронин К.В., Лаевский Ю.М. Потоковая схема предиктор–корректор для решения 3D задачи теплопереноса // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2017. — Т. 20, № 4. — С. 345–358.

В работе предложена и исследована потоковая схема предиктор–корректор в трехмерном случае, лишенная недостатков схемы, построенной на основе схемы-прообраза Дугласа–Ганна. Численно продемонстрирован второй порядок точности предложенной схемы.

DOI: 10.15372/SJNM20170401

Ключевые слова: *смешанный метод конечных элементов, тепловой поток, схема расщепления, схема предиктор–корректор.*

Voronin K.V., Laevsky Yu.M. The flux predictor–corrector scheme for solving a 3D heat transfer problem // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2017. — Vol. 20, № 4. — P. 345–358.

In this paper we propose and study the flux predictor–corrector scheme in the three-dimensional case. This scheme is depleted of drawbacks of that constructed on the basis of the Douglas–Gunn prototype-scheme. The scheme proposed demonstrates the second order of accuracy.

Keywords: *mixed finite element method, heat flux, splitting scheme, predictor–corrector scheme.*

Введение

Данная работа является продолжением исследований авторов по потоковым схемам расщепления в смешанном методе конечных элементов для уравнений теплопереноса [1–7]. Главным результатом этих исследований явилась разработка общего подхода к построению схем расщепления в смешанном методе конечных элементов решения нестационарных уравнений при использовании элементов Равьяра–Тома наименьшей степени на прямоугольных сетках [8]. Основной идеей этого подхода является восстановление схемы для векторного потока по заданной схеме расщепления (схеме-прообразу) для нахождения сеточной дивергенции потока. В качестве схем-прообразов могут рассмат-

*Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 15-11-10024).

риваться такие хорошо известные схемы, как классическая схема переменных направлений [9] для двумерных задач и различные ее модификации, в том числе и обобщения на трехмерный случай [10], локально-одномерные схемы [11, 12], схемы типа предиктор–корректор [13, 12] и пр.

Связь между схемами для потока и схемами для дивергенции потока можно использовать для получения априорных оценок устойчивости потоковых схем, что и было осуществлено в работе [4] для нескольких схем в двумерном и трехмерном случаях. Указанные оценки имеют место при некоторых ограничениях на начальные данные для сеточного теплового потока и в этом смысле являются оценками устойчивости по начальным данным в подпространстве. В частности, был обнаружен ряд тестовых примеров, для которых потоковые схемы из работы [4] демонстрировали только условную сходимость. В работе [5] был проведен численный анализ ситуации с отсутствием сходимости для некоторых тестовых решений у двумерной потоковой схемы расщепления на основе схемы переменных направлений, предложенной в более ранних работах авторов [1, 2]. Как оказалось, отсутствие безусловной сходимости связано с наличием ненулевой компоненты в ядре оператора сеточной дивергенции погрешности начального потока и носит общий характер, в том числе и для задач с гладкими решениями. При этом возникающие особенности находятся в полном соответствии с теоретическими оценками статьи [4]. В качестве возможного решения проблемы в статье [6] было предложено перейти к использованию потоковых схем расщепления типа предиктор–корректор, в которых корректор служит для ликвидации компоненты погрешности начального потока в ядре сеточной дивергенции. Кроме того, в работе [6] с помощью разложения по собственным векторам (в случае равномерной сетки) были проанализированы полученные в [4] априорные оценки для двумерной схемы расщепления. Так же были приведены результаты численных экспериментов, показывающие, что двумерная схема предиктор–корректор на тех же проблемных тестовых решениях имеет второй порядок сходимости. Таким образом, было установлено, что в двумерном случае схемы типа предиктор–корректор обладают преимуществом перед схемами, предложенными в более ранних работах.

В данной работе построена и исследована потоковая схема предиктор–корректор в трехмерном случае. В уже упомянутой статье [4] рассмотрена потоковая схема расщепления, построенная по схеме-прообразу Дугласа–Ганна второго порядка точности. Однако такая схема весьма чувствительна к уменьшению гладкости решения, и здесь будут приведены примеры, демонстрирующие фактическое отсутствие сходимости. В то же время предлагаемая потоковая схема, основанная на схеме-прообразе предиктор–корректор, на тех же примерах сходится со вторым порядком. Отметим, что, как показано в работе [7], предложенная в статье [14] схема для двумерного случая на основе алгоритма Удзавы может быть записана в виде потоковой схемы, полученной из схемы-прообраза предиктор–корректор. В этом смысле предлагаемая здесь схема является обобщением результатов работы [14] на трехмерный случай.

Работа организована следующим образом. В пункте 1 приводится необходимый контекст — формулируется исходная задача, осуществляется ее пространственная аппроксимация, описывается структура возникающих сеточных операторов, а также поясняется, что мы понимаем под схемами-прообразами. Потоковая схема расщепления на основе схемы-прообраза Дугласа–Ганна и анализ условий ее устойчивости приводятся в п. 2. В пункте 3 построена трехмерная потоковая схема предиктор–корректор. В пункте 4 проведен сравнительный анализ результатов численных экспериментов для потоковой схемы на основе схемы-прообраза Дугласа–Ганна и трехмерного потокового предиктор–корректора.

1. Постановка задачи и потоковые схемы

В области $\Omega \subset R^3$ с границей $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ рассмотрим начально-краевую задачу в виде закона сохранения энергии и закона Фурье, описывающих процесс переноса тепла при $t > 0$:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \boldsymbol{u} = f, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{u} = -a\nabla T, \tag{2}$$

с краевыми условиями

$$T(t, \boldsymbol{x}) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma_D, \qquad (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n})(t, \boldsymbol{x}) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma_N, \qquad t > 0, \tag{3}$$

и начальными данными

$$T(0, \boldsymbol{x}) = T_0(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \overline{\Omega}. \tag{4}$$

Здесь и далее T — температура, $\boldsymbol{u}$ — вектор теплового потока, $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор внешней нормали на Γ_N, a — не зависящий от t коэффициент температуропроводности (thermal diffusivity). Отметим, что при достаточной гладкости функции T_0 можно говорить о начальном тепловом потоке $\boldsymbol{u}_0 = -a\nabla T_0$.

Для решения задачи (1)–(4) применяется смешанный метод конечных элементов [15] на прямоугольной сетке. Выпишем соответствующую сеточную задачу. В качестве области рассмотрим параллелепипед Ω, и пусть множество $\overline{\Omega}$ представляет собой объединение замкнутых ячеек

$$e = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_k, z_{k+1}], \quad i, j, k = 0, \dots, N-1.$$

В дальнейшем для простоты будет рассматриваться кубическая сетка с шагом h. Для аппроксимации вектор-функции $\boldsymbol{u}$ используется пространство элементов Равьяра–Тома наименьшей степени [8]:

$$\boldsymbol{V}_h = V_h^x \times V_h^y \times V_h^z, \qquad V_h^\alpha = \mathrm{span}\{\varphi_i^\alpha\}_{i=0}^N, \quad \alpha = x, y, z,$$

где φ_i^x, φ_j^y и φ_k^z — кусочно-линейные базисные функции аргументов x, y и z соответственно. Для аппроксимации температуры T используется пространство кусочно-постоянных функций

$$Q_h = \Big\{ q^h \,|\, q^h(\boldsymbol{x}) = \sum_e q_e \chi_e(\boldsymbol{x}) \Big\},$$

где χ_e — характеристическая функция ячейки e. Таким образом может быть сформулирован полудискретный смешанный метод конечных элементов. При этом для простоты будем предполагать, что $\Gamma_N = \emptyset$, что соответствует рассмотренным ниже примерам. Тогда

$$\forall\, \boldsymbol{v}^h \in \boldsymbol{V}_h \qquad \sum_e T_e \int\limits_{\partial e} \boldsymbol{v}^h \boldsymbol{n}_e \, d\gamma - \int\limits_{\Omega} \frac{1}{a} \boldsymbol{u}^h \boldsymbol{v}^h \, d\boldsymbol{x} = 0, \tag{5}$$

$$\forall\, e \subset \overline{\Omega} \qquad m_e \frac{dT_e}{dt} + \int\limits_{\partial e} \boldsymbol{u}^h \boldsymbol{n}_e \, d\gamma = \int\limits_e f \, d\boldsymbol{x}, \tag{6}$$

где $T_e = T_e(t)$ — коэффициенты разложения сеточной температуры $T^h(t)$ по базису пространства Q_h, $\boldsymbol{n}_e$ — единичный вектор внешней нормали на границе ячейки e. Для используемой равномерной сетки $m_e = h^3$. При этом

$$T_e(0) = \frac{1}{m_e} \int\limits_e T_0(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}. \tag{7}$$

В векторно-матричной форме сеточные уравнения (5), (6) принимают вид:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^h = \boldsymbol{B}T^h, \qquad M\frac{dT^h}{dt} + \boldsymbol{B}^t\boldsymbol{u}^h = f^h. \tag{8}$$

Здесь мы перенесли обозначения для сеточных функций на векторы-столбцы в векторно-матричной записи уравнений. При естественной нумерации ячеек параллелепипедальной сетки $M = \mathrm{diag}\{m_e\}$ — диагональная матрица масс, матрицы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ имеют следующий блочный вид:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} A_x & 0 & 0 \\ 0 & A_y & 0 \\ 0 & 0 & A_z \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix},$$

где A_x, A_y и A_z — трехдиагональные матрицы. Поскольку коэффициент температуропроводности не зависит от t, из уравнений (8) нетрудно получить уравнение для потока

$$\boldsymbol{A}\frac{d\boldsymbol{u}^h}{dt} + \boldsymbol{B}M^{-1}\boldsymbol{B}^t\boldsymbol{u}^h = \boldsymbol{B}M^{-1}f^h. \tag{9}$$

Вопрос о выборе начальных данных для уравнения (9) будет рассмотрен в следующем пункте.

Использование для аппроксимации по времени безусловно устойчивых неявных разностных схем наталкивается на проблему обращения на векторе матрицы $\boldsymbol{A}+\nu\boldsymbol{B}M^{-1}\boldsymbol{B}^t$, где

$$\boldsymbol{B}M^{-1}\boldsymbol{B}^t = \begin{pmatrix} B_xM^{-1}B_x^t & B_xM^{-1}B_y^t & B_xM^{-1}B_z^t \\ B_yM^{-1}B_x^t & B_yM^{-1}B_y^t & B_yM^{-1}B_z^t \\ B_zM^{-1}B_x^t & B_zM^{-1}B_y^t & B_zM^{-1}B_z^t \end{pmatrix}.$$

При этом матрицы $C_\alpha = A_\alpha + \nu B_\alpha M^{-1}B_\alpha^t$, $\alpha = x, y, z$, являются трехдиагональными, и проблема конструирования безусловно устойчивых разностных схем для приближенного решения уравнения (9) сводится к построению алгоритмов, требующих обращения только матриц C_α. О такого типа алгоритмах можно условно говорить как о потоковых схемах расщепления, и ряд таких схем был построен и исследован в упомянутых во введении работах авторов [1–7], а также в статьях [14, 16, 17]. Очевидные способы построения таких схем расщепления (например на основе треугольного аддитивного представления матрицы $\boldsymbol{B}M^{-1}\boldsymbol{B}^t$) привели к алгоритмам, демонстрирующим на ряде тестовых примеров весьма низкую точность. В связи с этим был разработан общий подход конструирования потоковых схем высокого качества, основанный на использовании схем-прообразов. Детальное его описание содержится в статье авторов [7]. Кратко опишем суть подхода. Подействуем матрицей $M^{-1/2}\boldsymbol{B}^t\boldsymbol{A}^{-1}$ на равенство (9). В результате получим скалярное уравнение

$$\frac{d\xi}{dt} + \Lambda\xi = \Lambda M^{-1/2}f^h, \tag{10}$$

где $\xi = M^{-1/2}\boldsymbol{B}^t\boldsymbol{u}^h$ и $\Lambda = M^{-1/2}\boldsymbol{B}^t\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}M^{-1/2}$ — симметрическая положительно полуопределенная матрица. При этом матрица Λ может быть переписана в следующей аддитивной форме: $\Lambda = \Lambda_x + \Lambda_y + \Lambda_z$, где $\Lambda_\alpha = M^{-1/2}B_\alpha^t A_\alpha^{-1}B_\alpha M^{-1/2}$, и, следовательно, для аппроксимации по времени уравнения (10) могут быть использованы какие-либо устойчивые схемы расщепления [12, 18]. По таким скалярным схемам, которые мы и называем схемами-прообразами, можно воспроизвести схемы для потока, реализация которых требует обращения только трехдиагональных матриц A_α и C_α. Такие схемы мы называем потоковыми схемами расщепления. При этом действие матрицы $M^{-1/2}\boldsymbol{B}^t\boldsymbol{A}^{-1}$ на такие схемы приводит к соответствующим схемам-прообразам. Отметим, что сами схемы-прообразы экономично не реализуются, поскольку в нашем рассмотрении матрицы Λ_α являются заполненными.

2. Метод на основе схемы-прообраза Дугласа–Ганна

Возьмем в качестве схемы-прообраза для уравнения (10) схему Дугласа–Ганна [10] второго порядка точности. Для простоты будем рассматривать однородное уравнение. Следуя [12], представим схему Дугласа–Ганна в виде:

$$\begin{aligned}
&\frac{\xi^{n+1/3}-\xi^n}{\tau}+\Lambda_x\frac{\xi^{n+1/3}+\xi^n}{2}+(\Lambda_y+\Lambda_z)\xi^n=0,\\
&\frac{\xi^{n+2/3}-\xi^{n+1/3}}{\tau}+\Lambda_y\frac{\xi^{n+2/3}-\xi^n}{2}=0,\\
&\frac{\xi^{n+1}-\xi^{n+2/3}}{\tau}+\Lambda_z\frac{\xi^{n+1}-\xi^n}{2}=0.
\end{aligned}\tag{11}$$

Исключением дробных шагов нетрудно получить схему в целых шагах в форме, для которой второй порядок аппроксимации очевиден:

$$\left(E+\frac{\tau^2}{4}D\right)\frac{\xi^{n+1}-\xi^n}{\tau}+\Lambda\frac{\xi^{n+1}+\xi^n}{2}=0,\tag{12}$$

где $D=\Lambda_x\Lambda_y+\Lambda_y\Lambda_z+\Lambda_x\Lambda_z+0.5\,\tau\Lambda_x\Lambda_y\Lambda_z$. Отметим, что фактически равенства (11) являются реализацией схемы-прообраза (12). В этом смысле о равенствах (11) можно говорить как о схеме-прообразе, записанной в дробных шагах.

Соответствующая схеме-прообразу (11) потоковая схема расщепления имеет вид [3]:

$$\begin{aligned}
&A_x\frac{u_x^{n+1}-u_x^n}{\tau}+B_xM^{-1}\boldsymbol{B}^t\frac{\widehat{\boldsymbol{u}}^{n+1}+\boldsymbol{u}^n}{2}=0,\\
&A_y\frac{u_y^{n+1}-u_y^n}{\tau}+B_yM^{-1}\boldsymbol{B}^t\frac{\widetilde{\boldsymbol{u}}^{n+1}+\boldsymbol{u}^n}{2}=0,\\
&A_z\frac{u_z^{n+1}-u_z^n}{\tau}+B_zM^{-1}\boldsymbol{B}^t\frac{\boldsymbol{u}^{n+1}+\boldsymbol{u}^n}{2}=0,
\end{aligned}\tag{13}$$

где $\widehat{\boldsymbol{u}}^{n+1}=(u_x^{n+1},\widehat{u}_y^{n+1},\widehat{u}_z^{n+1})^t$, $\widetilde{\boldsymbol{u}}^{n+1}=(u_x^{n+1},u_y^{n+1},\widehat{u}_z^{n+1})^t$, а компоненты $\widehat{u}_y^{n+1}$ и $\widehat{u}_z^{n+1}$ определяются из равенств:

$$\begin{aligned}
&A_y\frac{\widehat{u}_y^{n+1}-u_y^n}{\tau}+B_yM^{-1}\boldsymbol{B}^t\boldsymbol{u}^n=0,\\
&A_z\frac{\widehat{u}_z^{n+1}-u_z^n}{\tau}+B_zM^{-1}\boldsymbol{B}^t\boldsymbol{u}^n=0.
\end{aligned}$$

Реализация двух последних равенств сводится к обращению трехдиагональных матриц A_y и A_z, после чего для получения решения в соответствии с (13) требуется последовательное обращение трехдиагональных матриц C_x, C_y и C_z при $\nu=\tau/2$. В целых шагах приведенная потоковая схема расщепления [3] имеет вид, указывающий на второй порядок аппроксимации:

$$\left(\boldsymbol{A} + \frac{\tau^2}{4}\boldsymbol{R}\right)\frac{\boldsymbol{u}^{n+1} - \boldsymbol{u}^n}{\tau} + \boldsymbol{B}M^{-1}\boldsymbol{B}^t\frac{\boldsymbol{u}^{n+1} + \boldsymbol{u}^n}{2} = \boldsymbol{0}\,,$$

где

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} B_x M^{-1/2} G \\ B_y M^{-1/2}\Lambda_z \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_x M^{-1/2} \\ B_y M^{-1/2} \\ B_z M^{-1/2} \end{pmatrix}^t, \quad G = \Lambda_y + \Lambda_z + 0.5\,\tau\Lambda_y\Lambda_z.$$

Детали механизма, связывающего схему-прообраз (11) и потоковую схему (13), подробно описаны в статье [3].

Для схемы (13) в предположении попарной перестановочности матриц Λ_x, Λ_y и Λ_z в работе [4] было установлено неравенство

$$\|\boldsymbol{u}^n\|_{\boldsymbol{H}} \le c\,\|\boldsymbol{u}^0\|_{\widetilde{\boldsymbol{H}}}\,, \quad n = 1, 2, \ldots\,. \tag{14}$$

Здесь c — не зависящее от параметров сетки и векторов $\boldsymbol{u}^n$ положительное число, $\boldsymbol{H}$ — сеточный аналог пространства $\boldsymbol{H}_{\mathrm{div}}(\Omega)$:

$$\|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{H}} = \left(\|\boldsymbol{v}\|^2_{\boldsymbol{A}} + \|M^{-1/2}\boldsymbol{B}^t\boldsymbol{v}\|^2\right)^{1/2},$$

$\|\cdot\|$ — стандартная евклидова норма в пространстве векторов-столбцов, соответствующих скалярным сеточным функциям, $\widetilde{\boldsymbol{H}}$ — сеточное пространство с нормой

$$\|\boldsymbol{v}\|_{\widetilde{\boldsymbol{H}}} = \left(\|\boldsymbol{v}\|^2_{\boldsymbol{H}} + l^2(\boldsymbol{v})\right)^{1/2},$$

где функционал $l(\boldsymbol{v})$ задан равенством

$$l(\boldsymbol{v}) = \tau^2\left(\|GM^{-1/2}\boldsymbol{B}^t\boldsymbol{v}\|^2_{\Lambda} + \|\Lambda_z M^{-1/2}\boldsymbol{B}^t\boldsymbol{v}\|^2_{\Lambda}\right)^{1/2}.$$

В неперестановочном случае неравенство (14), вообще говоря, не выполняется, и связано это с отсутствием соответствующих результатов по устойчивости для схемы-прообраза Дугласа–Ганна (см. [10, 19]).

В дальнейшем через $\boldsymbol{u}(t)$ будем обозначать точный поток в момент времени t. Пусть начальная температура T_0 — дифференцируемая функция такая, что $T_0(\boldsymbol{x}) = 0$ на Γ, и $\boldsymbol{u}_0 = -a\nabla T_0$. Для достаточно гладкого решения исходной задачи равенство (2) имеет место при $t \to 0$, и, следовательно, $\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0$. Введем проектирующие операторы:

$$\boldsymbol{I} : \boldsymbol{H}_{\mathrm{div}}(\Omega) \to \boldsymbol{V}_h\,, \qquad \boldsymbol{P} : \boldsymbol{H}_{\mathrm{div}}(\Omega) \to \boldsymbol{V}_h\,,$$

где $\boldsymbol{Iu}(t) \in \boldsymbol{V}_h$ — вектор, степени свободы которого задаются значениями функции $\boldsymbol{u}(t)$ в центрах граней ячеек кубической сетки, т. е. $\boldsymbol{I}$ — оператор интерполирования, $\boldsymbol{Pu}(t) \in \boldsymbol{V}_h$ — вектор, степени свободы которого задаются интегральным тождеством

$$\forall\ \boldsymbol{v}^h \in \boldsymbol{V}_h \quad \int\limits_{\Omega} \frac{1}{a}(\boldsymbol{u}^h - \boldsymbol{u})\boldsymbol{v}^h\,d\boldsymbol{x} = 0, \tag{15}$$

означающим, что сеточный тепловой поток есть $\boldsymbol{L}_2$-проекция с весом $1/a$ вектор-функции $\boldsymbol{u}$ на подпространство $\boldsymbol{V}_h$ (здесь использованы исходные обозначения для сеточных функций). С использованием оператора интерполирования начальные данные для сеточного потока можно задать в виде

$$\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{I}}^h(0) = \boldsymbol{I}\,\boldsymbol{u}_0 = -\boldsymbol{I}(a\nabla T_0). \tag{16}$$

Отметим, что дифференцируемость начальной температуры, как правило, имеет место только в модельных примерах. Альтернативным способом задания начальных данных является использование $\boldsymbol{L}_2$-проекции с весом $1/a$ точного начального теплового потока

$$\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{P}}^h(0) = \boldsymbol{P}\,\boldsymbol{u}_0 = -\boldsymbol{P}(a\nabla T_0). \tag{17}$$

Из предположения, что $T_0(\boldsymbol{x}) = 0$ на Γ, следует

$$\int\limits_\Omega \frac{1}{a}\boldsymbol{u}_0\boldsymbol{v}^h\,d\boldsymbol{x} = -\int\limits_\Omega \nabla T_0\,\boldsymbol{v}^h\,d\boldsymbol{x} = \int\limits_\Omega T_0\,\nabla\boldsymbol{v}^h\,d\boldsymbol{x}.$$

Учитывая, что $\nabla\boldsymbol{v}^h \in Q_h$, согласно (7) и определению проектирующего оператора (15), получим

$$\forall\ \boldsymbol{v}^h \in \boldsymbol{V}_h \quad \int\limits_\Omega \frac{1}{a}\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{P}}^h(0)\boldsymbol{v}^h\,d\boldsymbol{x} = \sum_e T_e(0)\int\limits_{\partial e}\boldsymbol{v}^h\boldsymbol{n}_e\,d\gamma.$$

Это равенство и задает начальный сеточный поток, причем дифференцируемости функции T_0 не требуется. В соответствии с обозначениями, введенными в (8), равенство (17) можно переписать в виде

$$\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{P}}^h(0) = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\,T^h(0). \tag{18}$$

Напомним, что компонентами вектор-столбца $T^h(0)$ являются осреднения начальной температуры T_0 по ячейкам сетки (7).

В дальнейшем для некоторых тестовых примеров будет продемонстрирована негативная роль функционала l в определении нормы пространства $\widetilde{\boldsymbol{H}}$. В следующем пункте будет построена схема, для которой в случае попарной перестановочности матриц Λ_x, Λ_y и Λ_z функционал l в неравенстве устойчивости отсутствует. В двумерном случае такого сорта схема приведена в [6] как результат разработанного нами общего подхода получения потоковых схем, но которая фактически является другой формой схемы из работы [14], основанной на алгоритме Удзавы.

3. Метод на основе схемы-прообраза предиктор–корректор

В данном пункте в качестве схемы-прообраза рассмотрим схему предиктор–корректор, приведенную в [12], в которой предиктор строится на основе локально-одномерной схемы:

$$\begin{gathered}\frac{\xi^{n+1/6}-\xi^n}{\tau/2} + \Lambda_x\xi^{n+1/6} = 0, \qquad \frac{\xi^{n+1/3}-\xi^{n+1/6}}{\tau/2} + \Lambda_y\xi^{n+1/3} = 0,\\ \frac{\xi^{n+1/2}-\xi^{n+1/3}}{\tau/2} + \Lambda_z\xi^{n+1/2} = 0,\end{gathered} \tag{19}$$

а корректор задается равенством

$$\frac{\xi^{n+1}-\xi^n}{\tau} + \Lambda\xi^{n+1/2} = 0.$$

В случае попарно перестановочных операторов Λ_x, Λ_y и Λ_z схема в целых шагах совпадает с (12), и, следовательно, речь идет лишь о другой, отличной от схемы Дугласа–Ганна реализации. Однако используемая в качестве схемы-прообраза реализация (19) приводит к принципиально другой потоковой схеме.

Применение общего подхода к построению потоковых схем расщепления, о котором говорилось выше (см. [3]), приводит к следующей схеме для теплового потока:

$$\boldsymbol{A}\frac{\boldsymbol{u}^{n+1}-\boldsymbol{u}^n}{\tau}+\boldsymbol{B}M^{-1}\boldsymbol{B}^t\boldsymbol{u}^{n+1/2}=\boldsymbol{0}, \tag{20}$$

где $\boldsymbol{u}^{n+1/2}=\Big(u_x^{n+1/2},u_y^{n+1/2},(u_z^{n+1}+u_z^n)/2\Big)^t$, а компоненты $u_x^{n+1/2}$ и $u_y^{n+1/2}$ определяются из равенств:

$$A_x\frac{u_x^{n+1/2}-u_x^n}{\tau/2}+B_xM^{-1}(B_x^tu_x^{n+1/2}+B_y^tu_y^n+B_z^tu_z^n)=0\,,$$
$$A_y\frac{u_y^{n+1/2}-u_y^n}{\tau/2}+B_yM^{-1}(B_x^tu_x^{n+1/2}+B_y^tu_y^{n+1/2}+B_z^tu_z^n)=0.$$

Отметим, что реализация (20) начинается с определения компоненты u_z^{n+1}, а весь вычислительный процесс сводится к последовательному обращению трехдиагональных матриц C_x, C_y, C_z $(\nu=\tau/2)$, A_x и A_y, т. е. трудоемкость реализации рассматриваемого метода такая же, как метода, полученного из схемы-прообраза Дугласа–Ганна. В целых шагах приведенная потоковая схема принимает вид:

$$\left(\boldsymbol{A}+\frac{\tau^2}{4}\mathbf{S}\right)\frac{\boldsymbol{u}^{n+1}-\boldsymbol{u}^n}{\tau}+\boldsymbol{B}M^{-1}\boldsymbol{B}^{\,t}\frac{\boldsymbol{u}^{n+1}+\boldsymbol{u}^n}{2}=\boldsymbol{0},$$

где

$$\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}B_xM^{-1/2}\\ B_yM^{-1/2}\\ B_zM^{-1/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ B_yM^{-1/2}\Lambda_x\\ B_zM^{-1/2}H\end{pmatrix}^t,\quad H=\Lambda_x+\Lambda_y+0.5\,\tau\Lambda_x\Lambda_y.$$

Используя обозначения $\widehat{u}_x^{n+1}=2u_x^{n+1/2}-u_x^n$ и $\widehat{u}_y^{n+1}=2u_y^{n+1/2}-u_y^n$, перепишем рассмотренный алгоритм в виде трех седловых систем:

$$\begin{pmatrix}A_x & -B_x\\ -B_x^t & -\dfrac{2}{\tau}M\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widehat{u}_x^{n+1}\\ \widehat{T}^{\,n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \widehat{g}^{\,n+1}\end{pmatrix},$$

где $\widehat{g}^{\,n+1}=B_x^tu_x^n+2B_y^tu_y^n+2B_z^tu_z^n-\frac{2}{\tau}MT^n$,

$$\begin{pmatrix}A_y & -B_y\\ -B_y^t & -\dfrac{2}{\tau}M\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widehat{u}_y^{n+1}\\ \widetilde{T}^{\,n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \widetilde{g}^{\,n+1}\end{pmatrix},$$

где $\widetilde{g}^{\,n+1}=B_x^t(\widehat{u}_x^{n+1}+u_x^n)+B_y^tu_y^n+2B_z^tu_z^n-\frac{2}{\tau}MT^n$,

$$\begin{pmatrix}A_z & -B_z\\ -B_z^t & -\dfrac{2}{\tau}M\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_z^{n+1}\\ T^{\,n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ g^{\,n+1}\end{pmatrix},$$

где $g^{\,n+1}=B_x^t(\widehat{u}_x^{n+1}+u_x^n)+B_y^t(\widehat{u}_y^{n+1}+u_y^n)+B_z^tu_z^n-\frac{2}{\tau}MT^n$, и двух корректирующих равенств:

$$A_xu_x^{n+1}=B_xT^{\,n+1},\qquad A_yu_y^{n+1}=B_yT^{\,n+1}.$$

Приведенная форма метода показывает, что он является обобщением на трехмерный случай двумерной схемы расщепления из работы [14], в которой схема построена на основе алгоритма Удзавы.

Первое из уравнений третьей системы и корректирующие равенства в векторно-матричной форме могут быть записаны в виде

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^n = \boldsymbol{B}T^n\,, \quad n = 1, 2, \ldots\,. \tag{21}$$

Отметим, что либо $\boldsymbol{u}^0 = \boldsymbol{u}^0_{\boldsymbol{I}}$, либо $\boldsymbol{u}^0 = \boldsymbol{u}^0_{\boldsymbol{P}}$, и, согласно (18), равенство (21) имеет место и для $n = 0$. Тогда

$$\|\xi^n\|^2 = \|M^{-1/2}\boldsymbol{B}^t\boldsymbol{u}^n\|^2 = \|\Lambda M^{1/2}T^n\|^2 \geq \lambda_{\min}\|\Lambda^{1/2}M^{1/2}T^n\|^2,$$

где $\lambda_{\min}$ — минимальное собственное число положительно определенной матрицы $\Lambda = M^{-1/2}\boldsymbol{B}^t\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}M^{-1/2}$. При этом $\lambda_{\min}$ не зависит от параметров сетки, поскольку сеточный оператор $-\Lambda$ является аппроксимацией оператора Лапласа с нулевыми граничными условиями. Далее, согласно (21), имеем

$$\|\Lambda^{1/2}M^{1/2}T^n\|^2 = (M^{1/2}\Lambda M^{1/2}T^n, T^n) = (\boldsymbol{B}^t\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}T^n, T^n) = \|\boldsymbol{u}^n\|^2_{\boldsymbol{A}},$$

и, следовательно,

$$\|\boldsymbol{u}^n\|^2_{\boldsymbol{A}} \leq \frac{1}{\lambda_{\min}}\|\xi^n\|^2\,, \quad n = 1, 2, \ldots\,.$$

Для попарно перестановочных операторов Λ_x, Λ_y и Λ_z из уравнения (12) следует, что $\|\xi^n\| \leq \|\xi^0\| = \|M^{-1/2}\boldsymbol{B}^t\boldsymbol{u}^0\|$, откуда приходим к неравенству

$$\|\boldsymbol{u}^n\|^2_{\boldsymbol{H}} \leq \left(1 + \frac{1}{\lambda_{\min}}\right)\|\boldsymbol{u}^0\|^2_{\boldsymbol{H}}\,, \quad n = 1, 2, \ldots\,. \tag{22}$$

В отличие от оценки (14) правая часть неравенства (22) не содержит величину $l(\boldsymbol{u}^0)$ (функционал l был введен при задании нормы начальных данных в случае схемы-прообраза Дугласа–Ганна).

4. Численные эксперименты

Для всех представленных в этом пункте тестовых примеров в качестве области рассматривался единичный куб $\Omega{=}(0,1)^3$, в котором введена равномерная кубическая сетка с шагом h. Относительно коэффициента температуропроводности полагаем $a(x,y,z){\equiv}1$. Вычисления проводились для трех задач Дирихле с решениями различной гладкости:

$$\begin{aligned}
T^{(1)}(t,x,y,z) &= e^{-t}\sin(xyz(1-x)(1-y)(1-z)),\\
T^{(2)}(t,x,y,z) &= |64e^{-t}xyz(1-x)(1-y)(1-z) - 0.1|^{4.1} - 0.1^{4.1},\\
T^{(3)}(t,x,y,z) &= |64e^{-t}xyz(1-x)(1-y)(1-z) - 0.1|^{3.1} - 0.1^{3.1}.
\end{aligned}$$

Нарушение гладкости имеет место во второй и в третьей задачах, причем их решения пронумерованы по степени возрастания "негладкости". Отметим, что такого типа решения рассматривались в работе Арбогаста и др. [14]. Все вычислительные эксперименты проводились до значения $t_\star = N_\star\tau = 1$ с шагом $\tau = 0.8\,h$ — существенно за пределами области устойчивости явной схемы.

Зададим погрешности теплового потока в виде

$$\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{I}}^n = \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{I}}^n + \boldsymbol{I}(a\nabla T(t_n)), \qquad \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{P}}^n = \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{P}}^n - \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\,T^h(t_n),$$

где $\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{I}}^n$ и $\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{P}}^n$ — решения, полученные по потоковой схеме, при начальных данных (16) и (18) соответственно, т. е. $\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{I}}^0 = \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{I}}^h(0)$, $\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{P}}^0 = \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{P}}^h(0)$, и $T^h(t_n)$ — вектор-столбец с компонентами

$$T_e(t_n) = \frac{1}{m_e}\int\limits_e T(t_n, \boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x},$$

$T(t_n, \boldsymbol{x})$ — решение исходной дифференциальной задачи. Как нетрудно видеть, при использовании обоих операторов начальная погрешность равна нулевому вектору: из (16), и (18) следует, что $\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{I}}^0 = \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{P}}^0 = \boldsymbol{0}$.

В таблицах 1 и 2 приведены погрешности теплового потока в различных нормах для потоковых схем расщепления, порожденных схемами-прообразами Дугласа–Ганна и предиктор–корректор соответственно. При этом в качестве начального потока рассматривается интерполяционное представление (16). В таблицах используются обозначения:

$$\varepsilon_{\boldsymbol{I},\infty} = \max_{n=1,\dots,N_\star} \|\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{I}}^n\|_{\boldsymbol{C}}, \qquad \varepsilon_{\boldsymbol{I},2} = \max_{n=1,\dots,N_\star} \|\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{I}}^n\|_{\boldsymbol{L}_2}.$$

Напомним, что в приводимых расчетах в качестве начального потока и потока, с которым сравнивается вычисленное решение, используются функции из пространства Равьяра–Тома, степени свободы которых задаются значениями функции $-\nabla T(t_n)$ в центрах граней ячеек кубической сетки.

Таблица 1. “Интерполяционная” погрешность для схемы (13)

Шаг h	Задача 1		Задача 2		Задача 3	
	$\varepsilon_{\boldsymbol{I},\infty}$	$\varepsilon_{\boldsymbol{I},2}$	$\varepsilon_{\boldsymbol{I},\infty}$	$\varepsilon_{\boldsymbol{I},2}$	$\varepsilon_{\boldsymbol{I},\infty}$	$\varepsilon_{\boldsymbol{I},2}$
2^{-4}	$3.2e-4$	$1.3e-4$	$4.3e+0$	$8.0e-1$	$4.2e+1$	$8.3e+0$
2^{-5}	$7.7e-5$	$3.6e-5$	$9.1e-1$	$1.5e-1$	$3.6e+1$	$3.2e+0$
2^{-6}	$1.9e-5$	$8.6e-6$	$3.2e-1$	$3.7e-2$	$4.8e+1$	$2.5e+0$

Таблица 2. “Интерполяционная” погрешность для схемы (20)

Шаг h	Задача 1		Задача 2		Задача 3	
	$\varepsilon_{\boldsymbol{I},\infty}$	$\varepsilon_{\boldsymbol{I},2}$	$\varepsilon_{\boldsymbol{I},\infty}$	$\varepsilon_{\boldsymbol{I},2}$	$\varepsilon_{\boldsymbol{I},\infty}$	$\varepsilon_{\boldsymbol{I},2}$
2^{-4}	$3.9e-4$	$2.2e-4$	$2.1e-1$	$5.6e-2$	$1.4e-1$	$5.2e-2$
2^{-5}	$9.4e-5$	$5.0e-5$	$6.5e-2$	$1.6e-2$	$3.9e-2$	$1.2e-2$
2^{-6}	$2.3e-5$	$1.2e-5$	$1.6e-2$	$4.0e-3$	$9.4e-3$	$3.0e-3$

Для метода (13), порожденного схемой Дугласа–Ганна, на первых двух примерах наблюдается сходимость порядка $O(h^2)$. В третьем примере сходимость отсутствует. В то же время потоковая схема (20), основанная на схеме предиктор–корректор, демонстрирует сходимость $O(h^2)$ на всех примерах. При этом для промежуточного в смысле гладкости примера 2 значения погрешностей в схеме (20) значительно меньше, чем в схеме (13) — примерно в 10–15 раз. Значения погрешностей в примере 3 не имеет смысла сравнивать в виду отсутствия сходимости у схемы (13).

Далее в таблицах 3 и 4 приведены результаты экспериментов в случае использования в качестве начальных данных и сеточных “точных” решений $\boldsymbol{L}_2$-проекции. Пусть

$$\varepsilon_{\boldsymbol{P},\infty} = \max_{n=1,\dots,N_\star} \|\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{P}}^n\|_{\boldsymbol{C}}\,, \qquad \varepsilon_{\boldsymbol{P},2} = \max_{n=1,\dots,N_\star} \|\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{P}}^n\|_{\boldsymbol{L}_2}.$$

Отметим, что компоненты вектора-столбца $T^h(t_n)$, являющиеся интегральными средними по ячейкам расчетной сетки, вычисляются с помощью кубатурных формул.

Таблица 3. “Проекционная” погрешность для схемы (13)

Шаг h	Задача 1		Задача 2		Задача 3	
	$\varepsilon_{\boldsymbol{P},\infty}$	$\varepsilon_{\boldsymbol{P},2}$	$\varepsilon_{\boldsymbol{P},\infty}$	$\varepsilon_{\boldsymbol{P},2}$	$\varepsilon_{\boldsymbol{P},\infty}$	$\varepsilon_{\boldsymbol{P},2}$
2^{-4}	$2.0e-2$	$2.1e-3$	$1.3e+0$	$3.7e-1$	$3.8e+1$	$7.3e+0$
2^{-5}	$9.7e-3$	$5.3e-4$	$3.7e-1$	$6.7e-2$	$3.5e+1$	$3.2e+0$
2^{-6}	$4.8e-3$	$3.1e-4$	$1.9e-1$	$1.8e-2$	$4.7e+1$	$2.5e+0$

Таблица 4. “Проекционная” погрешность для схемы (20)

Шаг h	Задача 1		Задача 2		Задача 3	
	$\varepsilon_{\boldsymbol{P},\infty}$	$\varepsilon_{\boldsymbol{P},2}$	$\varepsilon_{\boldsymbol{P},\infty}$	$\varepsilon_{\boldsymbol{P},2}$	$\varepsilon_{\boldsymbol{P},\infty}$	$\varepsilon_{\boldsymbol{P},2}$
2^{-4}	$4.3e-4$	$2.2e-4$	$2.1e-1$	$5.7e-2$	$1.4e-1$	$5.1e-2$
2^{-5}	$1.1e-4$	$5.1e-5$	$6.3e-2$	$1.6e-2$	$3.8e-2$	$1.3e-2$
2^{-6}	$2.6e-5$	$1.2e-5$	$1.6e-2$	$4.0e-3$	$9.4e-3$	$3.1e-3$

На “гладком” решении 1 схема (13), порожденная схемой Дугласа–Ганна, показывает сходимость только порядка $O(h)$. Для примера 2 сходимость несколько лучше, чем в “интерполяционном” случае, и сходимости нет в примере 3. В то же время схема (20), полученная из схемы предиктор-корректор, показывает сходимость $O(h^2)$ для всех тестов, т. е. результаты в случае использования $\boldsymbol{L}_2$-проекции практически совпадают с предыдущим случаем, когда использовалась интерполяция.

Из таблиц 1 и 3 видно существенное ухудшение точности потоковой схемы, порожденной схемой Дугласа–Ганна, для гладкого решения (пример 1) при использовании $\boldsymbol{L}_2$-проекции. В связи с этим возникает вопрос, насколько отличаются разные проекции точных сеточных потоков $-\boldsymbol{I}(a\nabla T(t_n))$ и $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\,T^h(t_n)$. В частности, рассмотрим нормы разностей этих потоков для начальных данных:

$$\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{I}}^0 = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\,T^h(0) + \boldsymbol{I}(a\nabla T_0), \qquad \varepsilon_{\boldsymbol{I}P,\infty}^0 = \|\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{I}}^0\|_{\boldsymbol{C}}, \qquad \varepsilon_{\boldsymbol{I}P,2}^0 = \|\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{I}}^0\|_{\boldsymbol{L}_2}.$$

Согласно таблице 5, разница между представлениями начальных данных (16) и (18) сходится с порядком, близким к $O(h^2)$. При этом значения, приведенные в таблице, существенно меньше погрешности схемы (13) для $\boldsymbol{L}_2$-проекций. Это означает, что причина потери точности с понижением гладкости рассматриваемых примеров у потоковой схемы, порожденной схемой Дугласа–Ганна, связана с влиянием функционала l, входящего в правую часть неравенства (14), и отсутствующего в неравенстве (22) для потоковой схемы (20). В таблице 6 приведены значения функционалов $r(\boldsymbol{v}) = \|M^{-1/2}\boldsymbol{B}^t\boldsymbol{v}\|$, задающих норму пространства $\boldsymbol{H}$, и $l(\boldsymbol{v})$ при $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{I}}^0$.

Как видно из таблицы, $l(\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{I}}^0)/r(\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{I}}^0) \gg 1$, т. е. влияние погрешности в начальных данных для потоковой схемы (13) существенно сильнее, чем для схемы (20).

Таблица 5. Разница между интерполянтом и $\boldsymbol{L}_2$-проекцией при $t = 0$

Шаг h	Задача 1		Задача 2		Задача 3	
	$\varepsilon^0_{\boldsymbol{IP},\infty}$	$\varepsilon^0_{\boldsymbol{IP},2}$	$\varepsilon^0_{\boldsymbol{IP},\infty}$	$\varepsilon^0_{\boldsymbol{IP},2}$	$\varepsilon^0_{\boldsymbol{IP},\infty}$	$\varepsilon^0_{\boldsymbol{IP},2}$
2^{-4}	$1.5e-4$	$1.2e-4$	$4.8e-2$	$1.7e-2$	$4.7e-2$	$1.9e-2$
2^{-5}	$3.9e-5$	$2.9e-5$	$1.2e-2$	$4.4e-3$	$3.6e-2$	$7.3e-3$
2^{-6}	$1.1e-5$	$7.0e-6$	$3.0e-3$	$1.1e-3$	$7.9e-3$	$1.6e-3$

Таблица 6. Нормы погрешности начального потока $\boldsymbol{u}^0_{\boldsymbol{I}}$

Шаг h	Задача 1		Задача 2		Задача 3	
	$r(\boldsymbol{u}^0_{\boldsymbol{I}})$	$l(\boldsymbol{u}^0_{\boldsymbol{I}})$	$r(\boldsymbol{u}^0_{\boldsymbol{I}})$	$l(\boldsymbol{u}^0_{\boldsymbol{I}})$	$r(\boldsymbol{u}^0_{\boldsymbol{I}})$	$l(\boldsymbol{u}^0_{\boldsymbol{I}})$
2^{-4}	$1.9\mathrm{e}-1$	$6.9e+0$	$8.0e+0$	$1.0e+2$	$8.8e+0$	$4.2e+2$
2^{-5}	$1.9\mathrm{e}-1$	$8.8e+0$	$8.1e+0$	$6.7e+1$	$8.9e+0$	$4.5e+2$
2^{-6}	$1.9\mathrm{e}-1$	$1.2e+1$	$8.1e+0$	$1.1e+2$	$8.9e+0$	$7.4e+2$

5. Заключение

Разработанный ранее подход позволяет строить потоковые схемы расщепления для решения параболических уравнений на основе классических схем расщепления для дивергенции потока. В представленной работе в рамках такого подхода построена трехмерная потоковая схема на основе схемы предиктор–корректор для дивергенции потока (схемы-прообраза).

Приведены численные примеры, показывающие преимущество предложенной потоковой схемы по сравнению с известной ранее схемой, построенной на основе схемы-прообраза Дугласа–Ганна. Как показано в данной работе, полученные ранее оценки устойчивости по начальным данным для этой схемы накладывают требования дополнительной гладкости на начальную аппроксимацию теплового потока. Приведенные примеры демонстрируют актуальность этих требований. В отличие от схемы, полученной из схемы прообраза Дугласа–Ганна, предложенная трехмерная схема на основе схемы-прообраза предиктор–корректор показывает второй порядок сходимости на всех рассмотренных тестовых примерах.

Литература

1. **Воронин К.В., Лаевский Ю.М.** О схемах расщепления в смешанном методе конечных элементов // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2012. — Т. 15, № 2. — С. 183–189. — Перевод: Voronin K.V., Laevsky Yu.M. On splitting schemes in the mixed finite element method // Numerical Analysis and Applications. — 2012. — Vol. 5, iss. 2. — P. 150–155.

2. **Воронин К.В., Лаевский Ю.М.** Схемы расщепления в смешанном методе конечных элементов решения задач теплопереноса // Математическое моделирование. — 2012. — Т. 24, № 8. — С. 109–120. — Перевод: Voronin K.V., Laevsky Yu.M. Splitting schemes in the mixed finite-element method for the solution of heat transfer problems // Mathematical Models and Computer Simulations. — 2013. — Vol. 5, iss. 2. — P. 167–174.

3. **Воронин К.В., Лаевский Ю.М.** Об одном подходе к построению потоковых схем расщепления в смешанном методе конечных элементов // Математическое моделирование. — 2014. — Т. 26, № 12. — С. 33–47.

4. **Воронин К.В., Лаевский Ю.М.** Об устойчивости некоторых потоковых схем расщепления // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2015. — Т. 18,

№ 2. — С. 135–145. — Перевод: Voronin K.V., Laevsky Yu.M. On the stability of some flux splitting schemes // Numerical Analysis and Applications. — 2015. — Vol. 8, iss. 2. — P. 113–121.

5. **Voronin K.V., Laevsky Yu.M.** A new approach to constructing splitting schemes in mixed FEM for heat transfer: a priori estimates // Lecture Notes in Computer Science. — 2015. — Vol. 9045. — P. 417–425.
6. **Voronin K.V., Laevsky Yu.M.** On splitting schemes of predictor-corrector type in mixed finite element method // Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2015. — Vol. 12. — P. 752–765.
7. **Voronin K.V., Laevsky Yu.M.** A new approach to constructing vector splitting schemes in mixed finite element method for parabolic problems // J. of Numerical Mathematics. — 2017. — Vol. 25, iss. 1. — (Published Online: 2017-03-30). — (DOI: 10.1515/jnma-2015-0076).
8. **Raviart P.-A., Thomas J.M.** A mixed finite element method for 2-nd order elliptic problems // Lecture Notes in Mathematics. — 1977. — Vol. 606. — P. 292–315.
9. **Peaceman D.W., Rachford H.H.-Jr.** The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations // J. Soc. Indust. Appl. Math. — 1955. — Vol. 3, iss. 1. — P. 28–41.
10. **Douglas J.-Jr., Gunn J.E.** A general formulation of alternating direction methods // Numerische Mathematik. — 1964. — Vol. 6, iss. 1. — P. 428–453.
11. **Самарский А.А.** Локально-одномерные разностные схемы на неравномерных сетках // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1963. — Т. 3, № 3. — С. 431–466.
12. **Yanenko N.N.** The Method of Fractional Steps. — New York: Springer-Verlag, 1971.
13. **Douglas J.-Jr.** Alternating direction methods for three space variables // Numerische Mathematik. — 1962. — Vol. 4, iss. 1. — P. 41–63.
14. **Arbogast T., Huang C.-S., and Yang S.-M.** Improved accuracy for alternating-direction methods for parabolic equations based on regular and mixed finite elements // Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. — 2007. — Vol. 17, iss. 8. — P. 1279–1305.
15. **Brezzi P., Fortin M.** Mixed and Hybrid Finite Element Methods. — New York: Springer-Verlag, 1991.
16. **Vabishchevich P.N.** Flux-splitting schemes for parabolic problems // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2012. — Vol. 52, iss. 8. — P. 1128–1138.
17. **Vabishchevich P.N.** Additive Operator-Difference Schemes. — Berlin: de Gruyter, 2013.
18. **Marchuk G.I.** Splitting Methods. — Moscow: Nauka, 1988.
19. **Richtmyer G.I., Morton K.W.** Difference Methods for Initial-Value Problems. — New York: Jhon Wiley and Sons, 1967.

Поступила в редакцию 22 декабря 2016 г.,
в окончательном варианте 17 февраля 2017 г.

Литература в транслитерации

1. **Voronin K.V., Laevskiy Yu.M.** O skhemah rasshchepleniya v smeshannom metode konechnyh elementov // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2012. — T. 15, № 2. — S. 183–189. — Perevod: Voronin K.V., Laevsky Yu.M. On splitting schemes in the mixed finite element method // Numerical Analysis and Applications. — 2012. — Vol. 5, iss. 2. — P. 150–155.
2. **Voronin K.V., Laevskiy Yu.M.** Skhemy rasshchepleniya v smeshannom metode konechnyh elementov resheniya zadach teploperenosa // Matematicheskoe modelirovanie. — 2012. — T. 24, № 8. — S. 109–120. — Perevod: Voronin K.V., Laevsky Yu.M. Splitting schemes in the mixed finite-element method for the solution of heat transfer problems // Mathematical Models and Computer Simulations. — 2013. — Vol. 5, iss. 2. — P. 167–174.

3. **Voronin K.V., Laevskiy Yu.M.** Ob odnom podhode k postroeniyu potokovyh skhem rasshchepleniya v smeshannom metode konechnyh elementov // Matematicheskoe modelirovanie. — 2014. — T. 26, № 12. — S. 33–47.

4. **Voronin K.V., Laevskiy Yu.M.** Ob ustoychivosti nekotoryh potokovyh skhem rasshchepleniya // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2015. — T. 18, № 2. — S. 135–145. — Perevod: Voronin K.V., Laevsky Yu.M. On the stability of some flux splitting schemes // Numerical Analysis and Applications. — 2015. — Vol. 8, iss. 2. — P. 113–121.

5. **Voronin K.V., Laevsky Yu.M.** A new approach to constructing splitting schemes in mixed FEM for heat transfer: a priori estimates // Lecture Notes in Computer Science. — 2015. — Vol. 9045. — P. 417–425.

6. **Voronin K.V., Laevsky Yu.M.** On splitting schemes of predictor-corrector type in mixed finite element method // Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2015. — Vol. 12. — P. 752–765.

7. **Voronin K.V., Laevsky Yu.M.** A new approach to constructing vector splitting schemes in mixed finite element method for parabolic problems // J. of Numerical Mathematics. — 2017. — Vol. 25, iss. 1. — (Published Online: 2017-03-30). — (DOI: 10.1515/jnma-2015-0076).

8. **Raviart P.-A., Thomas J.M.** A mixed finite element method for 2-nd order elliptic problems // Lecture Notes in Mathematics. — 1977. — Vol. 606. — P. 292–315.

9. **Peaceman D.W., Rachford H.H.-Jr.** The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations // J. Soc. Indust. Appl. Math. — 1955. — Vol. 3, iss. 1. — P. 28–41.

10. **Douglas J.-Jr., Gunn J.E.** A general formulation of alternating direction methods // Numerische Mathematik. — 1964. — Vol. 6, iss. 1. — P. 428–453.

11. **Samarskii A.A.** Lokal'no-odnomernye raznostnye skhemy na neravnomernyh setkah // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 1963. — T. 3, № 3. — S. 431–466.

12. **Yanenko N.N.** The Method of Fractional Steps. — New York: Springer-Verlag, 1971.

13. **Douglas J.-Jr.** Alternating direction methods for three space variables // Numerische Mathematik. — 1962. — Vol. 4, iss. 1. — P. 41–63.

14. **Arbogast T., Huang C.-S., and Yang S.-M.** Improved accuracy for alternating-direction methods for parabolic equations based on regular and mixed finite elements // Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. — 2007. — Vol. 17, iss. 8. — P. 1279–1305.

15. **Brezzi P., Fortin M.** Mixed and Hybrid Finite Element Methods. — New York: Springer-Verlag, 1991.

16. **Vabishchevich P.N.** Flux-splitting schemes for parabolic problems // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2012. — Vol. 52, iss. 8. — P. 1128–1138.

17. **Vabishchevich P.N.** Additive Operator-Difference Schemes. — Berlin: de Gruyter, 2013.

18. **Marchuk G.I.** Splitting Methods. — Moscow: Nauka, 1988.

19. **Richtmyer G.I., Morton K.W.** Difference Methods for Initial-Value Problems. — New York: Jhon Wiley and Sons, 1967.