САМОСОГЛАСОВАННЫЕ СГУСТКИ КОЛЕБЛЮЩИХСЯ ТЯЖЕЛЫХ ЧАСТИЦ В УСКОРИТЕЛЕ

А. Д. Власов (Москва)

Показана возможность существования самосогласованных сфероидальных сгустков постоянной плотности, состоящих из тяжелых частиц или тел. В проекции на поперечную плоскость частицы описывают окружности или эллипсы, а вдоль оси сфероида колеблются синусоидально. Возможно бесконечное множество различных распределений частиц по полуосям поперечных эллипсов и по амплитудам продольных колебаний.

Рассматривается задача о стационарном равномерном заполнении эллипсоида вращения (сфероида) частицами, совершающими в проекции на оси сфероида синусоидальные колебания

$$x = A_x \sin(\Omega_r t + \theta_x), \quad y = A_y \sin(\Omega_r t + \theta_y), \quad z = A_z \sin(\Omega_z t + \theta_z) \tag{1}$$

с заданными угловыми частотами $\Omega_x = \Omega_y = \Omega_r$ и Ω_z.

Эта задача возникла при рассмотрении сгустков заряженных элементарных частиц — протонов — в линейном ускорителе [1]. В сфероидальном протонном сгустке его собственное электрическое поле в сумме с ускоряющим и фокусирующим полем ускорителя имеет составляющие, пропорциональные одноименным координатам и не зависящие от других координат

$$E_x = -K_r x, \quad D_y = -K_r y, \quad E_z = -K_z z \tag{2}$$

Для самосогласованности сгустка необходимо, чтобы частицы, совершающие в поле (2) колебания вида (1), были так распределены по амплитудам и фазам колебаний A, θ (интегралам движения), чтобы в любой момент заполнять сфероид с заданной постоянной плотностью, поскольку лишь при этом условии поле имеет вид (2).

Равенства (2) выражают также и гравитационное поле внутри однородного сфероидального сгустка тяжелых частиц или тел. При этом

$$\Omega_r^2 = K_r = 4\pi\sigma G M_r, \quad \Omega_z^2 = K_z = 4\pi\sigma G M_z$$

где G — гравитационная постоянная, σ — плотность сгустка, M_r и M_z — коэффициенты, зависящие от формы сфероида ($2M_r + M_z = 1$). Таким образом, конкретное физическое содержание задачи о самосогласованных сгустках может быть различным. Это могут быть как облака космической пыли или скопления звезд, так и сгустки протонов в ускорителе.

Предполагается, что релятивистскими эффектами, флуктуациями поля (2), столкновениями и обменом энергией между частицами можно пренебречь. Вопрос об устойчивости сгустков не рассматривается. Тяжелые частицы, разумеется, могут иметь неодинаковые массы.

Сфероид с полуосями $a_x = a_y = a_r$ и a_z описывается уравнением

$$\frac{x^2 + y^2}{a_r^2} + \frac{z^2}{a_z^2} = 1 \tag{3}$$

Выделим из сгустка частицы с некоторой фиксированной амплитудой продольных колебаний A_z. Эти частицы заключены во вписанном в сфероид (3) цилиндре длины $2A_z$ и радиуса $a_r \sqrt{1 - (A_z / a_z)^2}$. Доля периода продольных колебаний $T_z = 2\pi / \Omega_z$, в течение которой частица находится в интервале от z до $z + dz$, составляет

$$\frac{2dz}{T_z dz / dt} = \frac{2dz}{T_z \Omega_z A_z \cos(\Omega_z t + \theta_z)} = \frac{dz}{\pi \sqrt{A_z^2 - z^2}}$$

Ввиду стационарности сгустка распределение частиц по фазам θ_z должно быть равномерным. Тогда плотность частиц с данной амплитудой A_z выразится с учетом осевой симметрии сгустка в виде

$$\frac{N(r, A_z)}{\pi \sqrt{A_z^2 - z^2}} \qquad (r = \sqrt{x^2 + y^2}) \tag{4}$$

где N — некоторая функция от A_z и от радиальной координаты r.

Полная плотность частиц $\sigma = \text{const}$ в точке r, z выражается интегралом от частных плотностей (4) по всем аплитудам A_z, не меньшим z и не выводящим частицы при данном r за пределы сфероида

$$\sigma = \frac{1}{\pi} \int_z^{A_{zm}} \frac{N(r, A_z)\, dA_z}{\sqrt{A_z^2 - z^2}}, \qquad A_{zm} = a_z \sqrt{1 - r^2 / a_r^2} \tag{5}$$

Из этого интегрального уравнения, легко приводимого к уравнению Абеля, найдем

$$N(r, A_z) = \frac{2\sigma A_z}{\sqrt{a_z^2(1 - r^2/a_r^2) - A_z^2}} = \frac{CA_z}{\pi^2\sqrt{A_r^2 - r^2}}, \quad \begin{array}{l} A_r = a_r\sqrt{1 - A_z^2/a_z^2} \\ C = 2\pi^2\sigma a_r/a_z \end{array} \tag{6}$$

Первоначальная трехмерная задача сведена теперь к двумерной. Необходимо найти такое распределение частиц с данной амплитудой A_z по амплитудам и фазам поперечных колебаний, при котором зависимость их плотности от радиальной координаты r описывается функцией (6). Рассмотрим решения этой задачи.

Первое решение. Оно состоит просто в движении частиц в проекции на поперечную плоскость по окружностям $r = R$. Такое движение имеет место при условии, что для каждой частицы $A_x = A_y = R$, $|\theta_x - \theta_y| = \pi/2$ и частицы распределены равномерно по фазам колебаний θ_x, а следовательно, и θ_y. Разумеется, все частицы вращаются с одинаковой частотой Ω_z. При этом плотность частиц в зависимости от амплитуд (радиусов вращения) $r = R$ должна выражаться функцией N (6), а плотность распределения частиц по радиусам $r = R$ — функцией $2\pi rN$.

Однако возможны и другие, менее тривиальные распределения. Поперечная проекция траектории частицы согласно (1) в общем случае есть эллипс с центром $x = y = 0$ и полуосями

$$\begin{aligned} a, b = \Big(&\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + 2A_xA_y \sin|\theta_x - \theta_y|} \pm \\ &\pm \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + 2A_xA_y \sin|\theta_x - \theta_y|}\Big)/2 \end{aligned} \tag{7}$$

причем большая ось эллипса составляет с осью x угол

$$\eta = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\left[\frac{2A_xA_y}{A_x^2 - A_y^2}\cos(\theta_x - \theta_y)\right]$$

Вместо распределения частиц по амплитудам и фазам A_x, A_y, θ_x, θ_y удобнее искать их распределение по параметрам эллипсов a, b, η и по фазам движения по эллипсам. Ввиду осевой симметрии и стационарности сгустка распределение частиц по углам ориентации эллипсов η и по фазам движения по эллипсам должно быть равномерным. Доля периода движения по эллипсу $T_r = 2\pi/\Omega_r$, в течение которой частица находится в цилиндрическом слое от r до $r + dr$, в соответствии с равенствами (1) и (7) равна

$$\frac{4dr}{T_r dr/dt} = \frac{2rdr}{\pi\sqrt{(a^2 - r^2)(r^2 - b^2)}}$$

Плотность распределения частиц с данными a и b в $2\pi r$ раз меньше и выражается в виде

$$\frac{M(a, b, A_z)}{\pi^2\sqrt{(a^2 - r^2)(r^2 - b^2)}} \tag{8}$$

Здесь M — искомая функция распределения частиц по параметрам a, b, A_z. Плотность распределения частиц с данным A_z (6) при данном r выразится интегралом от частных плотностей (8) по всем b, не превышающим r, и по всем a, не меньшим r и не превышающим A_r

$$\frac{1}{\pi^2}\int_r^{A_r} da \int_0^r \frac{M(a, b, A_z)\,db}{\sqrt{(a^2 - r^2)(r^2 - b^2)}} = \frac{CA_z}{\pi^2\sqrt{A_r^2 - r^2}} \tag{9}$$

Будем искать функцию M в виде произведения двух функций

$$M(a, b, A_z) = f(a, A_z)\,\varphi(b, A_z)$$

Интегральное уравнение (9) распадается тогда на два уравнения

$$\int_0^r \frac{\varphi(b, A_z)\,db}{\sqrt{r^2 - b^2}} = \Phi(r, A_z) \tag{10}$$

$$\int_r^{A_r} \frac{f(a, A_z)\,da}{\sqrt{a^2 - r^2}} = \frac{CA_z}{\Phi(r, A_z)\sqrt{A_r^2 - r^2}} \tag{11}$$

Если задать функцию φ, то из (10) найдем Φ, и останется найти f из интегрального уравнения (11). Если же задать f, то из (11) найдем Φ, и надо будет найти φ из уравнения (10). Разумеется, можно задать и функцию Φ, тогда останется найти φ и f из интегральных уравнений (10) и (11). Сведя каждое из них к уравнению Абеля, получим

$$\varphi(b, A_z) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{db} \int_0^b \frac{\Phi(r, A_z)\, r\, dr}{\sqrt{b^2 - r^2}} \tag{12}$$

$$f(a, A_z) = \frac{CA_z}{\pi} \left[\frac{\pi}{A_r \Phi(A_r, A_z)} \delta\left(\frac{a}{A_z} - 1\right) - \frac{d}{da} \int_a^{A_r} \frac{2r\, dr}{\Phi(r, A_z) \sqrt{(A_r^2 - r^2)(r^2 - a^2)}} \right] \tag{13}$$

В выражение (13) входит δ-функция. Функции f, φ, $\Phi^{\pm 1}$ должны быть интегрируемы и не отрицательны, причем

$$\Phi(A_r, A_z) \neq 0, \quad \Phi(a, A_z) \neq 0, \quad \Phi(b, A_z) \neq \infty$$

Найденное распределение $M = f\varphi$ удовлетворяет нормировке

$$\int_0^{a_z} dA_z \int_0^{A_r} da \int_0^a M(a, b, A_z)\, db = \frac{4}{3} \pi a_r^2 a_z \sigma \tag{14}$$

Механические (или магнитные) моменты сгустков зависят от распределения частиц по направлениям их вращения вокруг оси и собственным моментам.

Поскольку одна из функций f, φ, Φ может быть выбрана произвольно, задача имеет бесконечное множество решений. В добавление к приведенному выше первому решению $r = R$ из уравнений (10) — (13) можно получать другие решения, а также семейства решений. Приведем примеры.

Второе решение. Пусть $\varphi = 1$. Из уравнений (10) и (13) находим

$$\Phi = \frac{\pi}{2}, \quad M = f = \frac{4\pi\sigma a_r}{a_z} \frac{A_z}{A_r} \delta\left(\frac{a}{A_r} - 1\right)$$

т. е. $a = A_r$. Первое и второе решения были получены в работе (1).

Третье решение. Пусть $f = a(A_r^2 - a^2)^{-\varepsilon}$, $0 \leqslant \varepsilon < 1$. Из уравнений (11) и (12) получаем

$$\Phi = \frac{CA_z}{\psi(\varepsilon)(A_r^2 - r^2)^{1-\varepsilon}}, \quad \psi(\varepsilon) = \int_0^1 \frac{d\tau}{(1 - \tau^2)^\varepsilon}$$

$$M = \frac{4\pi\sigma a_r}{\psi(\varepsilon) a_z} \frac{A_z a}{(A_r^2 - a^2)^\varepsilon} \left[\frac{A_r^{2\varepsilon}}{A_r^2 - b^2} + \frac{(1 - 2\varepsilon) b}{(A_r^2 - b^2)^{3/2 - \varepsilon}} \int_0^B \frac{d\tau}{(1 + \tau^2)^{1-\varepsilon}} \right],$$

$$B = \frac{a}{\sqrt{A_r^2 - b^2}}$$

При $\varepsilon = 0;\ ^1/_2$ получаем $\psi(\varepsilon) = 1;\ \pi/2$, и выражение для M упрощается.

Четвертое решение. Пусть $\Phi = r^n$, $n > 0$. Из (12) находим $\varphi = \chi(n) b^n$. При четных n интегралы в (12) и (13) берутся в конечном виде. Так, при $\Phi = r^2$

$$\varphi = \frac{4b^2}{\pi}, \quad M = \frac{4b^2}{\pi} f = \frac{8\pi\sigma a_r}{a_z} \frac{A_z b^2}{A_r} \left[\frac{1}{a^2} + \frac{1}{A_r^2} \delta\left(\frac{a}{A_r} - 1\right) \right]$$

Линейные комбинации частных решений, удовлетворяющие нормировке (14) и не отрицательные, также являются решениями задачи.

Таким образом, показана возможность существования самосогласованных сгустков колеблющихся тяжелых частиц. Сгустки имеют вид сфероидов постоянной плотности. В проекции на поперечную плоскость частицы описывают окружности или эллипсы, а в направлении оси сфероида совершают синусоидальные колебания. Возможно бесконечное множество различных распределений частиц по полуосям поперечных эллипсов и по амплитудам продольных колебаний.

Поступила 22 IX 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Бондарев Б. И., Власов А. Д. О самосогласованном распределении частиц и предельном токе в линейном ускорителе. Атомная энергия, 1965, т. 19, вып. 5, стр. 423.