

НЕРЕГУЛЯРНОЕ ОТРАЖЕНИЕ ПЛОСКОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В ВОДЕ ОТ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

О. А. Березин, А. А. Гриб

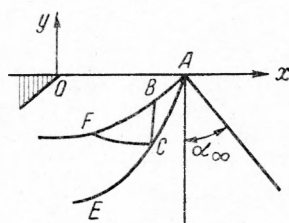
(Ленинград)

Приближенное решение задачи о нерегулярном отражении плоской ударной волны в воде от свободной поверхности приведено в работе [1].

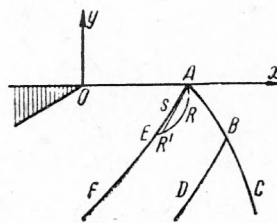
В этой работе область взаимодействия ударной волны и свободной поверхности описана одномерными решениями уравнений газовой динамики.

Поскольку, однако, течение жидкости при нерегулярном отражении не является одномерным, допущения работы [1] требуют обоснования.

В настоящей работе приводится решение двумерной нестационарной задачи, при этом показывается, что для практических целей вполне приемлемы данные работы [1].



Фиг. 1



Фиг. 2

§ 1. Общая картина отражения плоской волны от свободной поверхности. В работе [1] рассмотрено отражение плоской ударной волны в воде от свободной поверхности с учетом зависимости скорости распространения ударной волны, скорости звука и скорости частиц воды за фронтом от величины давления.

При этом показано, что имеют место два режима отражения:

- 1) регулярное отражение, когда волны понижения давления, возникающие от свободной поверхности, не нарушают фронт ударной волны и
- 2) нерегулярное отражение, когда волны понижения давления взаимодействуют с фронтом ударной волны.

Если угол падения фронта ударной волны α_∞ больше некоторого критического угла α_* , отражение будет регулярным (фиг. 1). Если же $\alpha_\infty < \alpha_*$ — отражение нерегулярное (фиг. 2).

Для определения критического угла имеем

$$\alpha_* = \sqrt{\frac{n+1}{2Bn}} p_1 \quad (1.1)$$

Здесь p_1 — давление в невозмущенном фронте ударной волны,

$$n = 7.15, \quad B = 3045 \text{ кг/см}^2$$

При регулярном отражении плоской волны, волны понижения давления, идущие от каждой точки свободной поверхности, через которую прошел ударный фронт, не могут обогнать своего источника.

Область их взаимодействия в окрестности точки A может быть описана в подвижной системе координат известным течением Прандтля — Мейера, возникающим при обтекании сверхзвуковым потоком вершины

угла, вплоть до характеристики второго семейства CB , которая отделяет течение Прандтля — Мейера от области течения другого типа. При переходе через CB характеристики первого семейства течения Прандтля — Мейера искривляются.

При малых глубинах погружения индикатора течение за фронтом ударной волны представляется при помощи сопряжения равномерного течения с течением Прандтля — Мейера.

При углах же падения ударной волны $\alpha_\infty < \alpha_*$ волны понижения давления искривляют первоначальную форму фронта, уменьшают давление на нем и увеличивают время действия (фиг. 2).

§ 2. Решения уравнений гидродинамики, зависящие от отношения координат и времени. Пусть плоская ударная волна в момент $t = 0$ падает в точке O на свободную поверхность (фиг. 2) под углом $\alpha_\infty < \alpha_*$.

Давление в точке A фронта этой волны при этом делается равным [1] некоторому значению $p' < p_1$. В момент времени t фронт ударной волны займет некоторое положение AB .

Область невозмущенного движения воды в ударной волне будет отделяться от области возмущенного движения характеристикой BD . В области невозмущенного движения гидродинамические элементы постоянны и равны их значениям на фронте. В окрестности точки A давление падает от $p = p'$ до давления перед фронтом падающей волны $p = p_0$.

Будем в дальнейшем считать $p_0 = 0$.

Гидродинамические элементы на фронте ударной волны связаны между собою условиями динамической совместности

$$\rho_0 N = \rho (N - v_n), \quad p = \rho_0 N v_n, \quad v_\tau = 0 \quad (2.1)$$

и уравнением состояния, которое для воды даже при сравнительно больших давлениях можно записать в виде

$$p = B \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^n - 1 \right] \quad (2.2)$$

где $B = 3045 \text{ атм}$, $n = 7.15$, N — скорость перемещения фронта ударной волны.

При $p \leq 300 \text{ атм}$ условия (2.1) и (2.2) приближенно можно записать в виде

$$N = a_0 \left[1 + \frac{n+1}{4} \frac{p}{Bn} \right], \quad v_n = a_0 \frac{p}{Bn} \quad \left(a_0 = \sqrt{\frac{Bn}{\rho_0}} \right) \quad (2.3)$$

$$a = a_0 \left[1 + \frac{n-1}{2} \frac{p}{Bn} \right], \quad \rho = \rho_0 \left[1 + \frac{p}{Bn} \right]$$

где a — скорость звука.

Уравнения гидродинамики для нашей задачи имеют вид

$$\begin{aligned} (v_x - \xi) \frac{\partial v_x}{\partial \xi} + (v_y - \eta) \frac{\partial v_x}{\partial \eta} + \frac{2}{n-1} a \frac{\partial a}{\partial \xi} &= 0 \\ (v_x - \xi) \frac{\partial v_y}{\partial \xi} + (v_y - \eta) \frac{\partial v_y}{\partial \eta} + \frac{2}{n-1} a \frac{\partial a}{\partial \eta} &= 0 \\ (v_x - \xi) \frac{\partial a}{\partial \xi} + (v_y - \eta) \frac{\partial a}{\partial \eta} + \frac{n-1}{2} a \left(\frac{\partial v_x}{\partial \xi} + \frac{\partial v_y}{\partial \eta} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь

$$\xi = \frac{x}{t}, \quad \eta = \frac{y}{t}$$

Положим, следуя [2],

$$v_x = a_0 M, \quad v_y = a_0 V, \quad a = a_0(1 + \alpha), \quad v_n = a_0 V_n, \quad \xi = a_0(1 + \delta), \quad \eta = a_0 Y \quad (2.5)$$

где $M, V, \alpha, \delta, Y, V_n$ — малые величины. При этом V — величина более высокого порядка по сравнению с M ($V \sim O(M\sqrt{M})$).

Подставляя (2.5) в (2.4) и отбрасывая малые величины высшего порядка, получим [2]

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial \delta} &= \frac{2}{n-1} \frac{\partial \alpha}{\partial \delta}, & \frac{\partial V}{\partial \delta} &= \frac{2}{n-1} \frac{\partial \alpha}{\partial Y} \\ (M + \alpha - \delta) \frac{\partial M}{\partial \delta} - \frac{Y}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial \delta} + \frac{\partial M}{\partial Y} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial Y} &= 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Интегрируя первое уравнение системы (2.6), имеем

$$M = \frac{2}{n-1} \alpha + F(Y) \quad (2.7)$$

где $F(Y)$ — произвольная функция. На ударном фронте приближенно

$$M = V_n \cos(n, x) \approx V_n = \frac{2}{n-1} \alpha$$

поэтому

$$F(Y) = 0$$

Уравнения (2.6) при этом примут вид

$$M = \frac{2}{n-1} \alpha, \quad \frac{\partial M}{\partial Y} = \frac{\partial V}{\partial \delta}, \quad (M + \alpha - \delta) \frac{\partial M}{\partial \delta} - Y \frac{\partial M}{\partial Y} + \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (2.8)$$

Уравнение характеристик системы (2.8) приближенно можно записать в виде

$$\frac{d\delta}{dY} = -Y \pm \sqrt{Y^2 + 2\left(\delta - \frac{n+1}{2} M\right)} \quad (2.9)$$

Уравнение характеристики BD имеет вид

$$\delta = \frac{n+1}{2Bn} P_1 - \frac{Y^2}{2} = \alpha_*^2 - \frac{Y^2}{2} \quad (2.10)$$

Уравнение невозмущенного ударного фронта

$$\delta = \frac{\alpha_*^2 + \alpha_\infty^2}{2} - \alpha_\infty Y \quad (2.11)$$

Решая совместно (2.10) и (2.11), найдем координаты точки B

$$Y_B = \alpha_\infty - \alpha_*, \quad \delta_B = \frac{\alpha_*^2 - \alpha_\infty^2}{2} + \alpha_* \alpha_\infty \quad (2.12)$$

Скорость перемещения возмущенного ударного фронта в направлении свободной поверхности равна

$$\frac{dx}{dt} = \frac{N}{\cos \alpha} \quad (2.13)$$

Здесь α — местный угол наклона касательной к ударному фронту к вертикали.

Будем искать уравнение возмущенного ударного фронта в виде [1]

$$x = a_0 t [1 + \delta(Y)] \quad (2.14)$$

Тогда, учитывая, что

$$\frac{N}{\cos \alpha} \approx a_0 \left[1 + \frac{n+1}{4} M + \frac{\alpha^2}{2} \right] \quad (2.15)$$

равенство (2.13) приближенно представим в виде

$$\delta - Y \frac{d\delta}{dY} - \frac{1}{2} \left(\frac{d\delta}{dY} \right)^2 = \frac{n+1}{4} M \quad (2.16)$$

Течение в возмущенной области $DBAEF$ будем описывать частным решением вида

$$\begin{aligned} \delta &= -qY^2 + C_1 \left(q - \frac{1}{6} \right)^{-5/3} + C_2 \\ \frac{1}{2} (n+1) M &= \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2} q^2 \right) Y^2 + C_1 \left(\frac{5}{2} q - \frac{1}{4} \right) \left(q - \frac{1}{6} \right)^{-5/3} + C_2 \\ \frac{1}{2} (n+1) V &= \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4} q - \frac{1}{3} q^3 \right) Y^3 - C_1 \left(5q - \frac{5}{2} \right) \left(q - \frac{1}{6} \right)^{-5/3} qY + V_0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

где C_1, C_2, V_0 — произвольные постоянные.

Произвольные постоянные должны быть выбраны таким образом, чтобы удовлетворились условия вдоль характеристики BD , в точке A и на фронте ударной волны AB .

Из условия вдоль BD , на которой $M = M_1$ и $\delta = \alpha_*^2 - \frac{1}{2} Y^2$ имеем

$$C_1 = \frac{\sqrt[3]{3}}{9} (\alpha_*^2 - C_2) \quad (2.18)$$

причем $q = 1/2$ на BD .

Обозначим величину M в точке A на фронте ударной волны через

$$M' = \frac{p'}{Bn} = \frac{2}{n+1} (\alpha')^2 \quad (2.19)$$

где α' — угол наклона фронта ударной волны в точке A к оси Y . В точке A имеем

$$Y = 0, \quad q = \infty, \quad \delta = \alpha'^2 \quad (2.20)$$

и, следовательно,

$$C_2 = (\alpha')^2 \quad (2.21)$$

так как в окрестности точки A величина q имеет порядок Y^{-1} .

Условие неразрывности касательных к ударному фронту составляющих вектора скорости приближенно представляется в виде

$$M \frac{d\delta}{dY} + V = 0 \quad (2.22)$$

Величина V имеет высший порядок малости по сравнению с M , поэтому условие (2.22) здесь удовлетворяется приближенно с принятой точностью. Условие (2.22) можно заменить некоторым интегральным условием [2].

В частности, произвольную постоянную V_0 в решении (2.17) можно выбрать из условия вида

$$\int_{(l_\Phi)} \left(M \frac{d\delta}{dY} + V \right) dl = 0 \quad (2.23)$$

где интегрирование производится вдоль возмущенного фронта ударной волны.

В точке A давление изменяется от значения $p = p'$ до $p = 0$ при переходе через линию ARE . Область $DBAREF$ является областью эллиптичности наших уравнений, а область $ARES$ — областью гиперболичности. Уравнение линии перехода ARE имеет вид:

$$\begin{aligned} Y^2 &= \frac{5\sqrt[3]{3}}{9} (\alpha_*^2 - \alpha'^2) \left(q - \frac{3}{2} \right)^{-1} \left(q - \frac{1}{6} \right)^{-5/3} \\ \delta &= \frac{\sqrt[3]{3}}{9} (\alpha_*^2 - \alpha'^2) \left(q - \frac{1}{6} \right)^{-5/3} + \alpha'^2 - qY^2 \end{aligned} \quad (2.24)$$

Угол наклона характеристики AR' , касательной в точке A к линии $p = 0$, равен

$$\left. \frac{d\delta}{dY} \right|_{Y=0} = \sqrt{2\alpha'} \quad (2.25)$$

В точке A осуществляется течение Прандтля — Мейера в системе координат, связанной с этой точкой.

Характеристика AR' и линия ASE нулевого давления в точке A имеют нулевую кривизну. Уравнение линии $ASEF$ имеет вид:

$$Y^2 = 2 \left[\frac{\sqrt{3}}{9} (\alpha_*^2 - \alpha'^2) \left(\frac{5}{2} q - \frac{1}{4} \right) \left(q - \frac{1}{6} \right)^{-\frac{5}{3}} + \alpha'^2 \right] \left(q^2 - \frac{1}{4} \right)^{-1}$$

$$\delta = -qY^2 + \frac{\sqrt{3}}{9} (\alpha_*^2 - \alpha'^2) \left(q - \frac{1}{6} \right)^{-\frac{5}{3}} + \alpha'^2 \quad (2.26)$$

§ 3. Уравнение возмущенного ударного фронта. Подставляя (2.17) в (2.16), получим следующее дифференциальное уравнение возмущенного ударного фронта

$$\frac{dx}{d\eta} = -(\eta + \sqrt{2x + \eta^2 - \xi}) \quad (3.1)$$

где

$$x = \frac{\delta}{\alpha_*^2} = -q\eta^2 + \frac{\sqrt{3}}{9} \left(1 - \frac{p'}{p_1} \right) \left(q - \frac{1}{6} \right)^{-\frac{5}{3}} + \frac{p'}{p_1}$$

$$\xi = \frac{n+1}{2} \frac{M}{\alpha_*^2} = \left(\frac{1}{8} - \frac{q^2}{2} \right) \eta^2 + \frac{\sqrt{3}}{9} \left(1 - \frac{p'}{p_1} \right) \left(\frac{5}{2} q - \frac{1}{4} \right) \left(q - \frac{1}{6} \right)^{-\frac{5}{3}} + \frac{p'}{p_1}$$

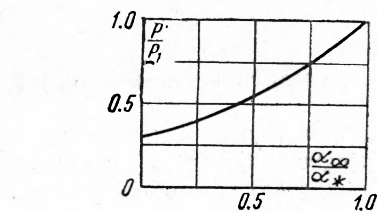
$$\eta = \frac{Y}{\alpha_*}$$

Это уравнение необходимо проинтегрировать при условии (2.12).

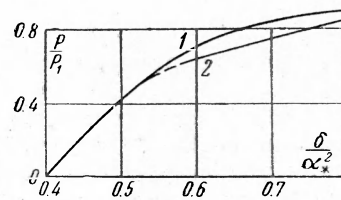
Уравнение (3.1) интегрируем численно, при этом удобнее строить фронт от точки A , задаваясь различными значениями величины α'/α_* . Выстраивая фронт до точки B , в которой $q = 1/2$, найдем соответствующий угол наклона невозмущенного ударного фронта α_∞ . Зависимость $p'/p_1 = f(\alpha_\infty/\alpha_*)$ представлена в табл. 1 и графически на фиг. 3.

Эпюра давления за фронтом ударной волны имеет вид, указанный на фиг. 4 (кривая 1).

Уравнение возмущенного ударного фронта и распределение давления вдоль него при $p'/p_1 = 0.49$ приведено в табл. 2 (при $p'/p_1 = 0.64$ см. фиг. 5).



Фиг. 3



Фиг. 4

Время действия τ положительной фазы ударной волны на глубине $Y = Y_1$ приближенно можно представить в виде:

$$\tau = t\alpha_*^2 (x_2 - x_1) \quad (3.2)$$

где x_2 — координата точки фронта на глубине $Y = Y_1$, а x_1 — соответствующая координата линии ASF . Импульс, несомый ударной волной на глубине $Y = Y_1$, имеет вид:

$$J = p_1 \alpha_*^2 t \left[J_1 \left(\frac{Y_1}{\alpha_*} \right)^4 + J_2 \left(\frac{Y_1}{\alpha_*} \right)^2 + J_3 \right] \quad (3.3)$$

Здесь

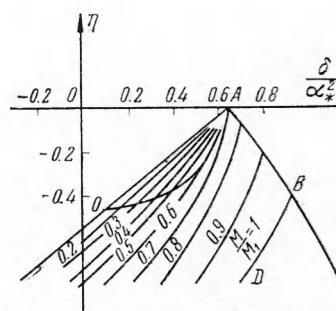
$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{6} (q_\Phi^3 - q_0^3) - \frac{1}{8} (q_\Phi - q_0) \\ J_2 &= \frac{p'}{p_1} (q_0 - q_\Phi) + \frac{\sqrt[3]{3}}{9} \left(1 - \frac{p'}{p_1} \right) \left[\left(q_0 - \frac{1}{6} \right)^{-\frac{5}{3}} q_0 \left(5q_0 - \frac{3}{2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left(q_\Phi - \frac{1}{6} \right)^{-\frac{5}{3}} q_\Phi \left(5q_\Phi - \frac{3}{2} \right) \right] \\ J_3 &= \frac{\sqrt[3]{3}}{9} \frac{p'}{p_1} \left(1 - \frac{p'}{p_1} \right) \left[\left(q_\Phi - \frac{1}{6} \right)^{-\frac{5}{3}} - \left(q_0 - \frac{1}{6} \right)^{-\frac{5}{3}} \right] + \\ &\quad + \frac{5}{81 \sqrt[3]{3}} \left(1 - \frac{p'}{p_1} \right)^2 \left[\left(q_\Phi - \frac{1}{6} \right)^{-\frac{10}{3}} \left(\frac{15}{14} q_\Phi - \frac{9}{70} \right) - \left(q_0 - \frac{1}{6} \right)^{-\frac{10}{3}} \left(\frac{15}{14} q_0 - \frac{9}{70} \right) \right] \end{aligned}$$

где q_Φ и q_0 — значения q на фронте и на линии ASF при $Y = Y_1$.

Время действия и импульс ударной волны, вычисленные для некоторой точки вблизи свободной поверхности по формулам (3.2) и (3.3), незначительно отличаются от времени действия и импульса, полученных по данным работы [1] (фиг. 4, кривая 2).

Таблица 2

η	ξ	x	$dx/d\eta$
-0.000156	0.50508	0.490199	-0.68914
-0.00126	0.52355	0.490870	-0.67564
-0.007775	0.560009	0.495272	-0.64840
-0.03527	0.620224	0.51310	-0.60293
-0.1089	0.701360	0.55749	-0.54350
-0.2985	0.828571	0.66054	-0.46410
-0.41705	0.892871	0.71556	-0.42685
-0.48830	0.91928	0.74597	-0.41240
-0.55326	0.950942	0.77276	-0.39584
-0.6361	1.00	0.80555	-0.3639



Фиг. 5

При $\alpha_\infty \rightarrow 0$, по данным римановского решения работы [1], имеем $p' = 0.25 p_1$.

Согласно данным табл. 1, при $\alpha_\infty = 0$, $p' = 0.3 p_1$.

В заключение заметим, что указанным здесь решением можно пользоваться и при $\alpha_\infty = \alpha_*$.

Поступила 15 III 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Гриб А. А., Рябинин А. Г., Христианович С. А. Об отражении плоской ударной волны в воде от свободной поверхности. ПММ, 1956, т. XX, вып. 4.
2. Рыжов О. С., Христианович С. А. О нелинейном отражении слабых ударных волн. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 5.