К РАСЧЕТУ НА ПОЛЗУЧЕСТЬ ПЛАСТИНОК ИЗ СТЕКЛОПЛАСТИКОВ

Г. И. Брызгалин (*Новосибирск*)

Стеклопластики — анизотропные материалы, представляющие собой стеклянные ткани, волокна и т. п., пропитанные смолой; стеклянный наполнитель придает прочность, жесткость конструкции; смола обеспечивает совместную работу отдельных волокон и слоев. Полимеры, используемые в качестве связующего материала, обладают значительной ползучестью даже при комнатной температуре.

При соответствующем выборе направлений и интенсивности армирования получаются конструкции с высокой прочностью и незначительной ползучестью.

Ниже излагается подход для определения напряженного состояния и несущей способности конструкций из стеклопластика в условиях ползучести.

1. Для описания ползучести армированных пластиков можно использовать закон анизотропной наследственной линейной ползучести [1]. Если считать материал ортотропным, то в случае плоского напряженного состояния для осей, совпадающих с двумя взаимно-перпендикулярными направлениями армирования, этот закон запишется так

$$\varepsilon_x = \boldsymbol{E}_1^{-1}(\sigma_x - \boldsymbol{\nu}_1\sigma_y), \qquad \varepsilon_y = \boldsymbol{E}_2^{-1}(\sigma_y - \boldsymbol{\nu}_2\sigma_x), \qquad \varepsilon_{xy} = \boldsymbol{G}^{-1}\sigma_{xy} \tag{1.1}$$

Здесь $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2$, $\boldsymbol{\nu}_1$, $\boldsymbol{\nu}_2$, G — операторы Вольтерра, соответствующие модулям упругости вдоль главных направлений, коэффициентам Пуассона и модулю сдвига. К примеру, если $f(t)$ — некоторая функция времени, то [2]

$$\boldsymbol{G}f(t) \equiv G^\circ f(t) - G^\circ \int_0^t G(t-\tau) f(\tau)\, d\tau \equiv G^\circ (1 - G^*) f(t)$$

Использование соотношений (1.1) для решения задач приводит, вообще говоря, к значительным математическим трудностям вследствие наличия пяти операторов, поэтому желательны дополнительные предположения, позволяющие уменьшить число операторов.

Для стеклопластиков типа АГ-4С или СВАМ с прямолинейными стекловолокнами в двух взаимно-перпендикулярных направлениях можно предположить, что при наличии только нормальных напряжений вдоль стекловолокон ползучесть материала не проявляется. Это приводит к соотношениям [1]

$$\varepsilon_x = E_1^{-1}(\sigma_x - \nu_1\sigma_y), \qquad \varepsilon_y = E_2^{-1}(\sigma_y - \nu_1\sigma_x), \qquad \varepsilon_{xy} = \boldsymbol{G}^{-1}\sigma_{xy} \tag{1.2}$$

Следуя [2] и основываясь на определенных экспериментальных данных, полагаем

$$\boldsymbol{G}^{-1} = \frac{1}{G^\circ}(1 + \chi J_\alpha^*) \qquad \left(J_\alpha(t) = \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)},\ 1 + \alpha > 0\right)$$

Здесь Γ — гамма-функция, G° — мгновенный модуль сдвига. Тогда

$$\boldsymbol{G} = \frac{G^\circ}{1 + \chi J_\alpha^*} = G^\circ\,[1 - \chi Э_\alpha^*(-\varkappa)]$$

Здесь и далее $Э_\alpha^*(\varkappa)$ — операторы Ю. Н. Работнова [2]

$$Э_\alpha^*(\varkappa) f(t) = \int_0^t (t-\tau)^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varkappa^k (t-\tau)^{k(1+\alpha)}}{\Gamma[(k+1)(1+\alpha)]} f(\tau)\, d\tau$$

2. Рассмотрим тонкую прямоугольную пластинку (фиг. 1) из стеклопластика, направления армирования совпадают с взаимно-перпендикулярными осями x и y.

Пластинка оперта по контуру и нагружена нормальной, произвольно распределенной нагрузкой, изменяющейся во времени подобно самой себе

$$Q(x, y, t) = Q_0(x, y)\, q(t)$$

Плоскость xy совмещена со срединной плоскостью пластинки. Объемные силы в расчет не принимаются. Считается верной гипотеза прямых нормалей и допущение

---

[1] Предложение об использовании соотношений (1.1), (1.2) для описания ползучести стеклопластиков выдвинуто семинаром лаборатории пластмасс института Гидродинамики (Н. И. Малинин, Н. Г. Зилинг, Л. В. Баев, Г. И. Брызгалин), руководимым Ю. Н. Работновым.

о малости нормального напряжения σ_z по сравнению с σ_x, σ_y, τ_{xy}. Связь между деформациям и напряжениями определяется законом (1.2). В таком случае уравнение изогнутой поверхности пластинки имеет вид

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x} + 2(D_1\nu_2 + 2\boldsymbol{D}_k)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = Q(x, y, t) \tag{2.1}$$

$$D_i = \frac{E_i h^3}{12(1-\nu_1\nu_2)} \quad (i = 1, 2). \qquad \boldsymbol{D}_k = \frac{Gh^3}{12}$$

Здесь h — толщина пластинки, $w = w(x, y, t)$ — прогиб.

Это уравнение аналогично (62.3) [3], однако постоянная D_k заменена оператором $\boldsymbol{D}_k$. Главные изгибающие и крутящий моменты в выражении через прогиб (см. [3], §§ 61, 62, 72) (2.2)

$$M_x = -D_1\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \qquad M_y = -D_2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_1\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), \qquad H_{xy} = -2\boldsymbol{D}_k\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}$$

Перерезывающие усилия

$$N_x = -\frac{\partial}{\partial x}\left[D_1\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (D_1\nu_2 + 2\boldsymbol{D}_k)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] \tag{2.3}$$

$$N_y = -\frac{\partial}{\partial y}\left[D_2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (D_2\nu_1 + 2\boldsymbol{D}_k)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]$$

Граничные и начальные условия

$$M_x = 0 \qquad w = 0 \qquad \text{при } x = 0, \qquad x = a$$

$$M_y = 0 \qquad w = 0 \qquad \text{при } y = 0, \qquad y = b$$

$$q(t) = 1 \quad \text{при } t = 0, \qquad q(t) = 0 \quad \text{при } t < 0$$

Для решения задачи разложим функцию $Q_0(x, y)$ в двойной ряд Фурье

$$Q_0(x, y) = \sum_{m=1}\sum_{n=1} a_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$a_{mn} = \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b Q_0(x, y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,dx\,dy$$

Прогиб ищем в виде

$$w = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}(t)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

Подставляя это выражение в (2.1) и обращая операторы, следуя [2], найдем

$$A_{mn}(t) = \frac{b^4}{\pi^4}\frac{a_{mn}[1 + \varkappa_{mn}\mathfrak{Э}_\alpha^*(\varkappa_{mn} - \chi)]\,q(t)}{D_1(m/c)^4 + 2(D_1\nu_2 + 2D_k{}^\circ)m^2n^2/c^2 + D_2n^4} \equiv$$

$$\equiv \overset{\circ}{A}_{mn}[1 + \varkappa_{mn}\mathfrak{Э}_\alpha^*(\varkappa_{mn} - \chi)]\,q(t)$$

$$\varkappa_{mn} = \frac{4D_k{}^\circ m^2n^2\chi}{C^2[D_1(m/c)^4 + 2(D_1\nu_2 + 2D_k{}^\circ)m^2n^2/c^2 + D_2n^4]}, \qquad c = \frac{a}{b}, \qquad D_k{}^\circ = \frac{G^\circ h^3}{12}$$

Обозначив

$$\overset{\circ}{w}_{mn} = \overset{\circ}{A}_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

имеем

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \overset{\circ}{w}\, q(t) + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \overset{\circ}{w}_{mn}\varkappa_{mn}\mathfrak{Э}_\alpha^*(\varkappa_{mn} - \chi)\,q(t) \tag{2.4}$$

Подставляя выражение для прогиба (2.4) в равенства (2.2) и (2.3), получим

$$M_x = D_1\pi^2 \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \nu_2\right] w_{mn}^{\circ}\,[1 + \varkappa_{mn}Э_\alpha^*(\varkappa_{mn} - \chi)]\, q(t)$$

$$M_y = D_2\pi^2 \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 \nu_1 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right] w_{mn}^{\circ}\,[1 + \varkappa_{mn}Э_\alpha^*(\varkappa_{mn} - \chi)]\, q(t) \qquad (2.5)$$

$$H_{xy} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} H_{mn}^{\circ}(x, y)\,[1 + (\varkappa_{mn} - \chi)\, Э_\alpha^*(\varkappa_{mn} - \chi)]\, q(t) \qquad (2.6)$$

где

$$H_{mn}^{\circ}(x, y) = -\frac{2D_k^{\circ}\pi^2}{ab}\, mn\, A_{mn}^{\circ} \cos\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{b}$$

Перерезывающие усилия

$$N_x = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} N_{mn}'(x, y)\,[1 + \lambda_{mn}'Э_\alpha^*(\varkappa_{mn} - \chi)]\, q(t)$$

$$N_y = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} N_{mn}''(x, y)\,[1 + \lambda_{mn}''Э_\alpha^*(\varkappa_{mn} - \chi)]\, q(t) \qquad (2.7)$$

где

$$\lambda_{mn}' = \varkappa_{mn} - \rho_{mn}'\chi, \qquad \lambda_{mn}'' = \varkappa_{mn} - \rho_{mn}''\chi$$

$$\rho_{mn}' = \frac{2D_k^{\circ} m^2 n^2}{D_1 m^4 c^{-2} + (D_1\nu_2 + 2D_k^{\circ})\, m^2 n^2}, \qquad \rho_{mn}'' = \frac{2D_k^{\circ} m^2 n^2}{D_2 n^4 c^2 (D_2\nu_1 + 2D_k^{\circ})\, m^2 n^2}$$

$$N_{mn}'(x, y) = \pi^3 A_{mn}^{\circ}\left[D_1\left(\frac{m}{a}\right)^3 + (D_1\nu_2 + 2D_k^{\circ})\frac{mn^2}{ab^2}\right]\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$N_{mn}''(x, y) = \pi^3 A_{mn}^{\circ}\left[D_2\left(\frac{n}{b}\right)^3 + (D_1\nu_2 + 2D_k^{\circ})\frac{m^2 n}{a^2 b}\right]\cos\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{m\pi x}{a}$$

Отметим некоторые особенности коэффициентов полученных рядов:

(1) $0 < \varkappa_{mn} < \chi, \quad \varkappa_{mm} = \varkappa_{11}$

$\varkappa_{mn} \to 0$ при $n = \text{const},\ m \to \infty$ (или $m = \text{const},\ n \to \infty$)

(2) $\lambda_{mn}' \to 0$ при $n = \text{const},\ m \to \infty$, $\lambda_{mn}'' \to 0$ при $m = \text{const},\ n \to \infty$

$$\lambda_{mn}' \to -\frac{2D_k^{\circ}\chi}{D_1\nu_2 + 2D_k^{\circ}} \quad \text{при} \quad \begin{cases} m = \text{const} \\ n \to \infty \end{cases}$$

$$\lambda_{mn}'' \to -\frac{2D_k^{\circ}\chi}{D_2\nu_1 + 2D_k^{\circ}} \quad \text{при} \quad \begin{cases} n = \text{const} \\ m \to \infty \end{cases}$$

$$\lambda_{mn}' = \lambda_{11}', \quad \lambda_{mn}'' = \lambda_{11}'', \quad \lambda_{mn}' = \lambda_{mn}'' = 0 \quad \text{при} \quad \frac{D_1}{D_2} = \left(\frac{na}{mb}\right)^4$$

Как видно из (2.4) — (2.7), прогиб, моменты и усилия выражаются в виде сумм двух двойных рядов. Первое слагаемое соответствует мгновенному значению прогиба (и пр.), когда свойство ползучести еще не успело проявиться; оно тождественно совпадает с решением задачи для упругого материала. Второе слагаемое выражает прогиб (и пр.), обусловленный ползучестью; каждый его член отличается от соответствующего в первом слагаемом множителем вида

$$\varkappa_{mn}Э_\alpha^*(\varkappa_{mn} - \chi)\, q(t)$$

Пусть $q(t)$ — кусочно-непрерывная ограниченная функция, а q^* — ее наибольшее значение на отрезке $[0, t^*]$, где t^* — сколь угодно большое фиксированное положительное число.

Тогда

$$|\, Э_\alpha^* (\varkappa_{mn} - \chi)\, q(t)\, | \leqslant q^* \int_0^t (t-\tau)^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\chi^k (t-\tau)^{k(1+\alpha)}}{\Gamma[(k+1)(1+\alpha)]}\, d\tau \equiv q^* F(t)$$

при помощи этой оценки и свойств (1), (2) легко показать, что если в упругой задаче ряд для прогиба (и пр.) абсолютно сходится, то и при наличии ползучести соответствующие ряды также сходятся.

3. Для дальнейшего полезно отметить некоторые свойства используемых операторов.

Запишем произведение оператор $Э_\alpha^*$ на функцию t^δ ($\delta > -1$). Имеем

$$Э_\alpha^* (\beta)\, t^\delta = \int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta^k (t-\tau)^{k(1+\alpha)+\alpha}}{\Gamma[(k+1)(1+\alpha)]}\, \tau^\delta\, d\tau$$

Можно показать, что в данном случае допустимо почленное интегрирование ряда. Так как

$$\int_0^t (t-\tau)^{k(1+\alpha)+\alpha} \tau^\delta\, d\tau = t^{(k+1)(1+\alpha)+\delta} B\,[\delta+1,\ (k+1)(1+\alpha)]$$

где B — известная бета-функция, то

$$Э_\alpha^* (\beta)\, t^\delta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta^k t^{(k+1)(1+\alpha)+\delta}\, \Gamma(1+\delta)}{\Gamma[(k+1)(1+\alpha)+\delta+1]}$$

Для $\delta = 0$ имеем $Э_\alpha^* (\beta) 1$, совпадающее с функцией Φ_α из [2].

Вводя в рассмотрение целую функцию типа Миттаг — Лефлера

$$E_\rho (z, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu + k\rho^{-1})}$$

получим

$$Э_\alpha^* (\beta)\, t^\delta = t^{1+\alpha+\delta}\, \Gamma(1+\delta)\, E_{\frac{1}{1+\alpha}} [\beta t^{1+\alpha},\ 2+\alpha+\delta] \tag{3.1}$$

В работе [4] изучены асимптотические свойства функции $E_\rho (z, \mu)$ при больших значениях модуля комплексного аргумента z. В частности при $|\arg z| = \pi$, $\rho > 1/2$ и достаточно большом $|z|$

$$E_\rho (z, \mu) = -\frac{1}{z\Gamma(\mu - \rho^{-1})} + O\left(\frac{1}{|z|^2}\right)$$

Отсюда для $\beta < 0$ и $0 < 1 + \alpha < 2$ имеем

$$Э_\alpha^* (\beta)\, t^\delta = -\frac{1}{\beta}\, t^\delta + O\,[t^{\delta-(1+\alpha)}]$$

Следовательно, при $-1 < \delta < 1 + \alpha$ и $t \to \infty$

$$Э_\alpha^* (\beta)\, t^\delta \to -\frac{1}{\beta}\, t^\delta$$

Для $\delta = 0$ этот результат получен в работе [5]. Несколько обобщая, можно получить аналогичную зависимость для функций, ведущих себя на бесконечности как t^δ.

Пусть

$$f(t) = a_0 + a_1 t^\delta + \frac{a_2}{t+\theta} + \frac{a_3}{(t+\theta)^2} + \ldots \qquad (\theta > 1) \tag{3.2}$$

Тогда, если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k+1}}{(t+\theta)^k}$ сходится в промежутке $[0, \infty)$, то

$$Э_\alpha (\beta)\, f(t) \to -\frac{1}{\beta}(a_0 + a_1 t^\delta) \quad \text{при } t \to \infty \qquad (-1 < \delta < 1 + \alpha)$$

Равенство (3.1) можно также обобщить на более широкий класс функций. Если

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$$

то на промежутке сходимости этого ряда

$$Э_\alpha^* (\beta) f(t) = t^{1+\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma(1+k) E_{\frac{1}{1+\alpha}} [\beta t^{1+\alpha}, 2+\alpha+k)] a_k t^k$$

и последний ряд абсолютно сходится.

Если нагрузка, приложенная к пластинке, меняется со временем так, что $q(t)$ представляется в виде (3.2), то через достаточно большой промежуток времени прогиб, моменты и усилия будут весьма близки к следующим выражениям:

$$w \approx (a_0 + a_1 t^\delta) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overset{\circ}{w}_{mn}}{1 - \overset{\circ}{\varkappa}_{mn}} \qquad \left(\overset{\circ}{\varkappa}_{mn} = \frac{\varkappa_{mn}}{\chi} \right)$$

$$M_x \approx (a_0 + a_1 t^\delta) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_1 \pi^2 \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \nu_2 \right] \frac{\overset{\circ}{w}_{mn}}{1 - \overset{\circ}{\varkappa}_{mn}}$$

$$M_y \approx (a_0 + a_1 t^\delta) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_2 \pi^2 \left[\left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{m}{a}\right)^2 \nu_1 \right] \frac{\overset{\circ}{w}_{mn}}{1 - \overset{\circ}{\varkappa}_{mn}}$$

$$N_x \approx (a_0 + a_1 t^\delta) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} N_{mn}' \frac{1 - \rho_{mn}'}{1 - \overset{\circ}{\gamma}_{mn}}, \qquad H_{xy} \approx 0 \qquad (3.3)$$

$$N_y \approx (a_0 + a_1 t^\delta) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} N_{mn}'' \frac{1 - \rho_{mn}''}{1 - \overset{\circ}{\varkappa}_{mn}},$$

Здесь $\overset{\circ}{\varkappa}_{mn}$ не зависит от свойств ползучести материала.

Механическая картина явления такова. В начальный момент напряжения соответствуют случаю упругой анизотропной пластинки. С течением времени смола — связующее будет релаксировать. Напряжения будут перераспределяться таким образом, что все бо́льшая их доля будет приходиться на стекловолокна, в связи с чем изгибающие моменты и прогиб будут расти. Крутящий момент, обусловленный релаксирующими касательными напряжениями на главных площадках, будет уменьшаться. Через достаточно большой промежуток времени прогиб, изгибающие моменты и перерезывающие усилия станут изменяться пропорционально изменению $q(t)$, а H_{xy} уменьшится практически до нуля (3.3). Если нагрузка постоянна во времени или стремится к постоянной, то ($a_1 = 0$) прогиб, моменты и усилия тоже стремятся к определенным постоянным значениям — пластинка имеет ограниченный «резерв» ползучести.

В заключение следует отметить, что изложенный здесь подход не охватывает всего класса задач на ползучесть конструкций из стеклопластиков. В случае, если касательные напряжения на главных площадках анизотропии отсутствуют или незначительны, а также если рассчитывается конструкция из тканевого стеклопластика, может оказаться необходимым учет ползучести вдоль главных направлений анизотропии. Однако это потребует существенно бо́льших усилий как на эксперимент, так и на расчет.

Автор признателен Ю. Н. Работнову и Б. Д. Аннину за ценные советы и помощь в работе.

Поступила 25 V 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденблат И. И. Некоторые вопросы механики деформируемых сред. Гостехтеоретиздат, 1955.
2. Работнов Ю. Н. Равновесие упругой среды с последействием. ПММ, 1948, т. 12, № 1.
3. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. Гостехтеоретиздат, 1957.
4. Джрбашян М. М. Об интегральном представлении функций, непрерывных на нескольких лучах. Изв. АН СССР, сер. матем., 1954, 18, 427—448.
5. Розовский М. М. Нелинейные интегрально-операторные уравнения и задача о кручении цилиндра при больших углах крутки. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1959, № 5.