УДК 534.222.22

ОБ УСЛОВИЯХ НА УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ ДЛЯ ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЫ

Н. С. Козин

(Красноярск)

В работе [1] исследована структура ударных волн в упруговязкой среде, характеризуемой временем τ релаксации касательных напряжений и уравнением среды специального вида. Вид уравнения состояния продиктован соображениями удобства построения интерполяционных формул. В данной работе формулируются ограничения на уравнение состояния общего вида.

1. Уравнение упругой энергии. Рассмотрим изотропную среду, плотность внутренней энергии которой задается уравнением

$$E = \hat{E}(k_1, k_2, k_3, S), \tag{1.1}$$

где $\hat{E}$ — симметричная функция относительных удлинений $k_i > 0$ ($i = 1, 2, 3$) вдоль главных осей деформации; S — энтропия на единицу массы. Предположим, что (1.1) удовлетворяет следующим условиям:

$$T = \hat{E}_s > 0, \ \hat{r} = \frac{k_1\hat{E}_{k_1} - k_2\hat{E}_{k_2}}{k_1 - k_2} > 0; \tag{1.2}$$

$$\begin{cases} c^2 = \hat{E}_{k_1^2} > 0, \ l = \hat{E}_{k_1 S} < 0, \\ g = k_1k_2\hat{E}_{k_1k_2} - k_1^2\hat{E}_{k_1^2} - k_1\hat{E}_{k_1} = \dfrac{k_1\hat{E}_{k_1S}}{\hat{E}_S}(k_1E_{k_1} - k_2E_{k_2}) < 0; \end{cases} \tag{1.3}$$

$$\hat{q} = \frac{\partial c^2}{\partial k_1} = \hat{E}_{k_1^3} < 0, \ \frac{1}{3}k_1^2\hat{E}_{k_1^2} + \frac{2}{3}k_1k_2\hat{E}_{k_1k_2} + \frac{1}{3}k_1\hat{E}_{k_1} > 0. \tag{1.4}$$

В силу симметричности функции $\hat{E}$ по k_i аналогичные неравенства справедливы и для выражений, получающихся из (1.2)—(1.4) циклической заменой k_i. Следствием неравенств (1.2)—(1.4) и симметричности $\hat{E}$ являются неравенства для $\hat{E}$ (k_1, k_2, k_3, S) в том случае, когда рассматриваются деформации, состоящие в равномерном растяжении по всем направлениям, т. е. $k_1 = k_2 = k_3 = k$. Эти неравенства имеют вид

$$\hat{E}_{vv} > 0, \ \hat{E}_{vS} < 0, \ \hat{E}_{vvv} < 0, \ k = \sqrt[3]{v/v^0}. \tag{1.5}$$

В дальнейшем внутренняя энергия E будет рассматриваться как функция параметров α, β и γ, представляющих логарифмы относительных удлинений вдоль главных осей деформации,

$$\alpha = \ln k_1, \ \beta = \ln k_2, \ \gamma = \ln k_3, \ E = E(\alpha, \beta, \gamma, S). \tag{1.6}$$

В этом случае неравенства (1.2) — (1.4) имеют вид

$$T = E_s > 0, \ r = (E_\alpha - E_\beta)/(\alpha - \beta) > 0; \tag{1.7}$$

$$\begin{cases} c^2 = E_{\alpha\alpha} - E_\alpha > 0, \ l = E_{\alpha S} < 0, \\ g = E_{\alpha\beta} - E_{\alpha\alpha} - E_{\alpha S}(E_\beta - E_\alpha)/E_S < 0; \end{cases} \tag{1.8}$$

$$q = E_{\alpha\alpha\alpha} - 3E_{\alpha\alpha} + 2E_\alpha < 0, \ (1/3)E_{\alpha\alpha} + (2/3) \times E_{\alpha\beta} - E_\alpha > 0. \tag{1.9}$$

2. Структура ударных волн. Система дифференциальных уравнений, описывающих движение упруговязкой среды параллельно оси x в пространстве (x, y, z), имеет вид [1]

$$(2.1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \dfrac{\partial\rho u}{\partial x} = 0, \dfrac{\partial\rho u}{\partial t} + \dfrac{\partial(\rho u^2 - \sigma_x)}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial\rho(E + u^2/2)}{\partial t} + \dfrac{\partial[\rho u(E + u^2/2) - \sigma_x u]}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial\beta}{\partial t} + u\dfrac{\partial\beta}{\partial x} = -\dfrac{\beta - (\alpha + \beta + \gamma)/3}{\tau}, \end{cases}$$

где x и t — пространственные координаты и время; u — скорость движения вдоль оси x, $\rho = \rho^0 e^{-\alpha-\beta-\gamma}$. В силу изотропности среды $\beta \equiv \gamma$. Величина ρ^0 — плотность среды в нормальных условиях. Главные напряжения σ_x, σ_y, σ_z вдоль осей x, y, z связаны с деформациями формулами

$$\sigma_x = \rho E_\alpha, \ \sigma_y = \rho E_\beta, \ \sigma_z = \rho E_\gamma.$$

Как показано в [1], вопрос о структуре ударных волн (решений системы (2.1) вида $\alpha = \alpha(x - Ut)$, $\beta = \gamma = \beta(x - Ut)$, $S = S(x - Ut)$) сводится к решению системы уравнений

$$(2.2)\quad \sigma_x + p_0 = w^2(v - v_0), \ E - E_0 + [(p_0 - \sigma_x)/2](v - v_0) = 0, \ \beta = \gamma$$

и квадратуре

$$(2.3)\quad dx/d\beta = 3\tau w/\rho(\alpha - \beta),$$

где p_0, ρ_0, E_0, u_0 характеризуют состояние вещества перед волной; $w = \rho_0 u_0$ — массовая скорость; $v = 1/\rho$. Характерное время τ релаксации напряжений за счет пластических деформаций зависит от напряженного состояния среды.

Система (2.2) определяет в пространстве (α, β, S) кривую, которую назовем, следуя [1], кривой возможных состояний. В [1] для уравнений состояния вида

$$E = E(v, D, S), \ D = \frac{1}{2}(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2), \ d_1 = \alpha - (\alpha + \beta + \gamma)/3,$$
$$d_2 = \beta - (\alpha + \beta + \gamma)/3, \ d_3 = \gamma - (\alpha + \rho + \gamma)/3$$

проведены расчеты кривой возможных состояний, которые показали, что она представляет собой гладкую кривую, соединяющую состояния ($\alpha_0 = \beta_0$, S_0) и ($\alpha_1 = \beta_1$, S_1) перед и за волной соответственно.

При $M_0 = |w|/\rho_0 c_0 > 1$ (c_0 — скорость звука (1.8)) ударная волна содержит упругий скачок (предшественник), который определяется дополнительным соотношением $\beta = \beta_0$ и располагается впереди пластической волны, возникающей на профиле в силу нелинейной зависимости от параметров вещества. Расчеты показали, что энтропия S и величина β на волне монотонно возрастают. Ниже будет показано, что подобная структура профиля имеет место и для сред с уравнением состояния (1.6)—(1.9), а значит, и для (1.1)—(1.4).

3. Свойства кривой возможных состояний. Рассмотрим функции

$$s = (p - p_0)/(v_0 - v), \quad H = E - E_0 + (p + p_0)(v - v_0)/2, \quad p = -\sigma_x = -\rho E_\alpha, \quad v = v^0 e^{\alpha+\beta+\gamma}.$$

Дифференциалы этих функций имеют вид

$$dv = v(d\alpha + d\beta + d\gamma),$$

$$dp = -\rho^2c^2dv + \rho(E_{\alpha\beta} - E_{\alpha\alpha})d\beta + \rho(E_{\alpha\gamma} - E_{\alpha\alpha})d\gamma + \rho E_{\alpha S}dS,$$

$$ds = [(v_0 - v)dp + (p - p_0)dv]/(v - v_0)^2,$$

$$dH = TdS + (E_\beta - E_\alpha)d\beta + (E_\gamma - E_\alpha)d\gamma - (1/2)(v - v_0)^2ds.$$

Кривую возможных состояний (2.2), которая задается уравнением $H = 0$, $s = w^2$, $\beta = \gamma$, представим в параметрическом виде $\alpha = \alpha(v)$, $\beta = \beta(v)$, $S = S(v)$. Тогда дифференциалы уравнения кривой возможных состояний имеют вид

$$\begin{cases} \dfrac{d\alpha}{dv} = \rho - \dfrac{\rho c^2}{g}(\mathrm{M}^2 - 1), \ \alpha(v_0) = \ln\sqrt[3]{v_0/v^0}, \\ \dfrac{d\beta}{\partial v} = \dfrac{\rho c^2}{g}(\mathrm{M}^2 - 1), \ \beta(v_0) = \ln\sqrt[3]{v_0/v^0}, \\ \dfrac{dS}{dv} = \dfrac{\rho c^2}{T}(E_\beta - E_\alpha)(1 - \mathrm{M}^2), \ S(v_0) = S_0, \end{cases} \tag{3.1}$$

где число Маха $\mathrm{M} = |w|/\rho c$. Из (3.1) следует, что вдоль кривой возможных состояний

$$d\rho^2c^2/dv = \rho^3[q + (c^2(\mathrm{M}^2 - 1)/g)(E_{\alpha\alpha\beta} - E_{\alpha\alpha\alpha} - E_{\alpha\beta} + E_{\alpha\alpha} - (E_\beta - E_\alpha)(E_{\alpha\alpha S} - E_{\alpha S}))]. \tag{3.2}$$

Установим некоторые свойства кривой возможных состояний.

А. Состояние вещества за волной и перед волной удовлетворяет условиям [1]:

$$\begin{cases} E_1 - E_0 + (p_1 + p_0)(v_1 - v_0)/2 = 0, \ p_1 - p_0 = -w^2(v_1 - v_0), \\ \alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = \ln\sqrt[3]{v_1/v^0}, \ \alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = \ln\sqrt[3]{v_0/v^0} \end{cases} \tag{3.3}$$

(индексы 1 и 0 соответствуют началу и концу волны). Поскольку система (3.3) — обычные газодинамические соотношения, условия (1.5) являются достаточными для того, чтобы эта система (3.3) имела единственное решение $(v_1, S_1) \neq (v_0, S_0)$ при заданных значениях v_0, S_0, w [2]. Это означает, что кривая возможных состояний имеет в пространстве (α, β, S) две и только две точки пересечения с плоскостью $\alpha = \beta$, отвечающие при заданном w начальному и конечному состоянию ударной волны.

Б. Назовем критической такую точку $Z^* = (\alpha^*, \beta^*, S^*)$ кривой возможных состояний, в которой $\mathrm{M} = 1$, т. е. $|w| = \rho c$. Из (3.2) следует, что в критической точке

$$d(\rho^2c^2)/dv = \rho^3q < 0, \ d\mathrm{M}^2/dv > 0, \tag{3.4}$$

т. е. величина $\mathrm{M}^2 - 1$ возрастает. Из (3.1) следует, что $d\beta/dv = dS/dv = 0$ при $\mathrm{M}^2 = 1$, т. е. $\beta(v)$ и $S(v)$ в критической точке перестают быть монотонными функциями.

В. Рассмотрим участок кривой возможных состояний для интервала $v_- < v < v_+$. Если $\mathrm{M}^2(v_+) < 1$, то $\mathrm{M}^2(v) < 1$ для всего интервала (v_-, v_+). Если бы это было не так, то нашлась бы точка v^*, $v_- \leqslant v^* \leqslant v_+$, в которой $\mathrm{M}^2(v^*) = 1$, $d\mathrm{M}^2(v^*)/dv < 0$, что противоречило бы (3.4).

Г. Наконец, кривая возможных состояний представляет собой простую кривую в пространстве (α, β, S), т. е.

$$0 < (d\alpha/dv)^2 + (d\beta/dv)^2 + (dS/dv)^2 < \infty. \tag{3.5}$$

Нарушение неравенств (3.5) противоречило бы в силу (3.1) выполнению (1.7), (1.8).

4. Построение профиля волны. Рассмотрим вначале случай $M_0 = |w|/\rho_0 c_0 < 1$, т. е. дозвуковой случай распространения ударной волны. Пусть $v_0 > v_1$ — значения v, соответствующие началу и концу ударной волны. Поскольку $M_0^2 = M^2(v_0) < 1$, то, как показано в случае В, всюду на интервале $v_1 < v < v_0$ имеет место неравенство $M^2 < 1$. Это означает, согласно (3.1), (1.8), что $d\beta/dv > 0$, т. е. $\beta(v)$ — монотонно возрастающая функция. При $v_1 < v < v_0$ участок кривой возможных состояний расположен по одну сторону плоскости $\beta = \alpha$ в пространстве (α, β, S) (случай А). Следуя [1], сделаем разложение кривой возможных состояний в окрестности точки $(\alpha_0 = \beta_0, S_0)$. Получим

$$\beta - \alpha \approx \frac{1 - M_0^2 + \frac{2}{3c_0^2}\left(E^0_{\alpha\beta} - E^0_{\alpha\alpha}\right)}{1 - M_0^2}\left(\frac{d\beta}{dv}\right)_0 (v - v_0),\ S \approx S_0.$$

Из (1.9) следует, что $\frac{2}{3}\left(E^0_{\alpha\beta} - E^0_{\alpha\alpha}\right)/c_0^2 + 1 = a_0^2/c_0^2 > 0$. Поскольку $M_0^2 > a_0^2/c_0^2$, $(d\beta/dv)_0 > 0$, следует, что $\beta - \alpha \geqslant 0$ в окрестности $v \leqslant v_0$, значит, и всюду при $v_1 \leqslant v \leqslant v_0$ имеет место неравенство $\beta \geqslant \alpha$. Из (3.1), (1.7) заключаем, что $dS/dv \leqslant 0$ при $v_1 \leqslant v \leqslant v_0$, т. е. $S(v)$ — монотонная функция. Квадратура (2.3) определяет при этих условиях параметр $x = x(\beta)$ как монотонную функцию β, значит, $x(v)$ — также монотонная функция.

Перейдем к случаю $M_0 = |w|/\rho_0 c_0 > 1$ (сверхзвуковой случай). При этом, как показано в [1], невозможно построить гладкое решение для ударной волны. Это утверждение справедливо и для уравнения состояния $E(\alpha, \beta, \gamma, S)$ общего вида. Следуя [1], введем «упругий» скачок из начального состояния $(\alpha_0 = \beta_0, S_0)$ в некоторое промежуточное (α_2, β_2, S_2), определяемое условиями

$$\begin{cases} E_2 - E_0 + [(p_2 + p_0)/2](v_2 - v_0) = 0, \\ p_2 = p_0 - w^2(v_2 - v_0),\ \gamma_2 = \beta_2 = \beta_0. \end{cases} \tag{4.1}$$

Неравенства (1.7) — (1.9) [2] достаточны для того, чтобы система (4.1) имела единственное решение (α_2, β_2, S_2) и при этом $M_2 = |w|/\rho_2 c_2$ было бы меньше единицы.

Рассмотрим теперь участок кривой возможных состояний $\alpha(v)$, $\beta(v)$, $S(v)$, где $v_1 \leqslant v \leqslant v_2$. Поскольку $M_2^2 = M^2(v_2) > 1$, для этого участка справедливы утверждения, сформулированные для дозвукового случая, т. е. всюду при $v_1 \leqslant v \leqslant v_2$ $M^2 < 1$, а $\beta(v)$, $S(v)$ и $x(v)$ являются монотонными функциями. Это позволяет продолжить гладким образом решение для ударной волны за упругим скачком.

5. Неравенства для уравнения состояния вида $E(v, D, \Delta, S)$. Представляет интерес переформулировка неравенств (1.7) — (1.9) на случай уравнения состояния $E = E(v, D, \Delta, S)$, которое часто используется в приложениях (здесь $\Delta = \frac{1}{3}\left(d_1^3 + d_2^3 + d_3^3\right)$). Однако релаксация касательных напряжений за счет пластических деформаций, характеризуемая временем релаксации τ, происходит тем быстрее, чем больше величина касательных напряжений, т. е. чем больше величины D и Δ. Существенно нелинейный характер зависимости τ от касательных напряжений [1] приводит к тому, что в реальных процессах

$$|d_1| + |d_2| + |d_3| \ll 1,\ D \ll 1,\ |\Delta| \ll 1.$$

В этих условиях, пренебрегая членами, содержащими d_i в качестве сомножителей, неравенства (1.7) — (1.9) можно записать в виде

$$(5.1)\quad \begin{cases} r = E_D > 0,\ c^2 = v^2E_{vv} + (2/3)\,E_D > 0, \\ l = vE_{vS} < 0,\ T = E_S > 0,\ g = -E_D < 0, \\ q = -2E_D + 2vE_{vD} + v^2E_{vvv} + (4/3)\,E_\Delta < 0,\ a^2 = v^2E_{vv} > 0. \end{cases}$$

Достаточными условиями для выполнения условий (5.1) являются неравенства

$$E_D > 0,\ E_{vv} > 0,\ E_{vS} < 0,\ E_{vD} < 0,\quad E_{vvv} < 0,\ E_\Delta < 0,$$

которые выполнены для интерполяционных формул уравнений состояний $E(v,\ D,\ S)$, приведенных в [3].

Автор выражает благодарность С. К. Годунову и Е. И. Роменскому за интерес к работе.

Поступила 3 XI 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. **Годунов С. К., Козин Н. С.** Структура ударных волн в упруговязкой среде с нелинейной зависимостью максвелловской вязкости от параметров вещества.— ПМТФ, 1974, № 5.
2. **Курант Г., Фридрихс К.** Сверхзвуковые течения и ударные волны. М., ИЛ, 1950.
3. **Годунов С. К., Козин Н. С., Роменский Е. И.** Уравнение состояния упругой энергии металлов при нешаровом тензоре деформаций.— ПМТФ, 1974, № 2.

УДК 539.21

УДАРНЫЕ АДИАБАТЫ ЩЕЛОЧНО-ГАЛОИДНЫХ КРИСТАЛЛОВ

В. А. Жданов, В. В. Поляков

(*Томск*)

Беспараметрический расчет ударных адиабат дает возможность связать параметры ударного сжатия материала, непосредственно определяемые в эксперименте, с параметрами, характеризующими свойства материала на атомном уровне. Установление такой связи является необходимым звеном в предварительном вычислении параметров ударного сжатия, имеющем существенное значение при планировании эксперимента, а также в проблемах, связанных с конструированием материалов с заданными оптимальными свойствами.

Беспараметрический расчет ударных адиабат щелочно-галоидных кристаллов интересен тем, что эти кристаллы в значительной мере изучены экспериментально, что обеспечивает экспериментальную проверку расчетов. В то же время, учитывая, что многие неорганические материалы, в том числе ситаллы, стекла, керамика, а также некоторые взрывчатые вещества имеют ионные или преобладающие ионные связи, изучение