

ПОЛЗУЧЕСТЬ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ ПОЛИМЕРНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Н. И. Малинин

(Москва)

Обзор¹ составлен в основном по результатам работ, опубликованных в период с 1964 по 1967 г., т. е. в промежуток между II и III Всесоюзными съездами по теоретической и прикладной механике. Обзоры более ранних работ по ползучести пластмасс [1] и по механике ориентированных стеклопластиков [2] опубликованы в трудах II Всесоюзного съезда.

Ползучесть изделий и конструкций из полимеров и полимерных материалов проявляется, как правило, в большей степени, чем например, у металлов, причем полимеры, пластмассы ползут в поле механических напряжений уже при достаточно низких температурах, например близких к комнатной. Поэтому при определении ресурсов работы пластмассовых изделий, конструкций, при проведении расчетов на длительную прочность, устойчивость и т. д. необходимо принимать во внимание ползучесть полимеров.

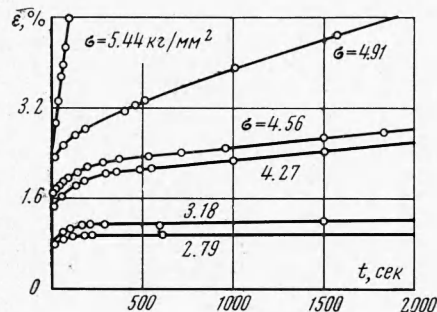
Ползучесть представляет собой одно из механических релаксационных явлений. Рассмотрение последних ограничим в данном обзоре рамками феноменологических подходов. При этом материал, несмотря на его физическую и химическую неоднородность, рассматривается как квазиоднородная сплошная среда, лишь в отдельных случаях, когда свойства композитного материала исследуются в функции свойств составляющих его компонентов, рассматриваются модели составных сред, при этом одна фаза полагается распределенной в другой в виде отдельных включений.

По своим механическим свойствам пластмассы разделяются на изотропные и анизотропные. Естественно, что различия в поведении изотропных и анизотропных материалов и изделий могут проявиться лишь в том случае, когда например, рассматривается сопротивление материала при сложном напряженном состоянии или изучается работа более или менее сложной конструкции в целом. При простом напряженном состоянии поведение изотропного материала феноменологически не отличается от поведения анизотропного. Поэтому вначале рассмотрим основные закономерности ползучести пластмасс в условиях простого напряженного состояния. Этот вопрос является и наиболее изученным.

Вначале рассмотрим поведение полимерных материалов при неизменных на протяжении опыта напряжениях.

На фиг. 1 представлены для примера кривые кратковременной ползучести при растяжении непластифицированного поливинилхлорида при температуре $T = 19^\circ\text{C}$, полученные в работе [3]. На протяжении одного опыта номинальное напряжение сохранялось постоянным, приведены кривые, полученные при различных напряжениях. Представленные здесь опыты не заканчивались разрушением, лишь при высоких напряжениях спустя некоторое время после приложения нагрузки происходила холодная вытяжка образца. В некоторых случаях для хрупких и высокоэластических полимеров опыт на ползучесть при достаточно высоких напряжениях заканчивается разрушением образца в результате образования и развития в нем трещин. При этом на кривых ползучести наблюдается область, где скорость ползучести не уменьшается, как на начальном участке, а наоборот возрастает вплоть до момента разрушения образца. Этот последний участок незначителен у хрупких пластмасс, у которых кривая ползучести перед разрушением лишь незначительно загибается вверх. Но для эластомеров, в особенности высоконаполненных [4], участок возрастающей скорости ползучести представлен очень ярко, т. е. перегиб на кривой ползучести появляется задолго до разрушения образца и после него деформации возрастают очень сильно, увеличиваясь иногда по сравнению с деформацией в точке перегиба в несколько раз.

Для полимеров, по-видимому, не было попыток найти функцию, которая хорошо описывала бы всю кривую ползучести, включая ее последний участок, аналогичной функции, предложенной Эндрейдом и применяемой для описания ползучести металлов (см., например, [5], стр. 171). Но в этом, по-видимому, нет необходимости, так как на протяжении последнего периода ускоренной ползучести в материале происходит ин-



Фиг. 1

¹ Статья представляет собой обзорный доклад автора на III Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике.

тенсивное накопление повреждений (обычно в виде трещин), которого нельзя допустить в изделии или конструкции. В связи с этим расчетные методы основываются на зависимостях, описывающих начальную часть кривой ползучести, когда скорость деформирования с течением времени монотонно снижается. Ниже приводятся некоторые из них со ссылкой на соответствующие работы, здесь же выписаны материалы, для которых эти зависимости применялись, и для длительных опытов указана продолжительность испытаний.

Формулы со степенным членом. Шарма [6] (пентон), А. С. Обухов [7] (капрон, опыты длительностью до 1000 час), Бонджиованни [8] (ацетат целлюлозы, полиметилметакрилат, поликарбонат, хлорированный полиэфир), П. В. Мелентьев [9] (полиэтилен, полиметилметакрилат, древесно-слоистый пластик и др.) использовали зависимость деформаций ε от времени t , отсчитываемого с момента нагружения, в виде

$$\varepsilon = \varepsilon_* t^n \quad (1)$$

(ε_* — параметр кривой, n — параметр материала).

Финдли [10] (см. также [1, 5]; ряд термо- и реактопластов, текстолиты, стеклопластики; опыты до 100000 час и более), Шарма [11] (ацетобутират целлюлозы; опыты до 100 час), П. В. Мелентьев [9] (материалы те же, что и упоминавшиеся выше, n в соотношении (2) всегда полагалось равным 0.25), Н. Т. Смотрин, В. М. Чебанов [12] (текстолит; опыты до 500 час) применяли соотношение

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_* t^n \quad (2)$$

Согласно (2) деформация полагается состоящей из двух частей, причем ε_0 (назовем ее мгновенной деформацией) не зависит от времени, другая часть (деформация ползучести) растет во времени пропорционально t^n .

П. В. Мелентьев [9] для описания тех же опытов, что и упомянутые выше, использовал также трехчленную формулу

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_* t^n + \varepsilon_v t \quad (3)$$

третий член этой формулы представляет собой деформацию, нарастающую с постоянной скоростью. Такие деформации принято связывать с вязким, или вязко-пластическим поведением вещества. Однако здесь следует отметить, что наличие третьего члена в формуле (3) при постоянном и не равном нулю напряжении, пропорционального t , еще не свидетельствует о наличии вязкого или вязко-пластического течения. Например, Плацек [13] установил, что после приложения нагрузки к образцам полицинкафосфината деформации возрастали пропорционально t , а после разгрузки эти деформации, которые на первый взгляд можно было считать вязкими, полностью исчезали, т. е. это были деформации упругого последствия.

Логарифмические зависимости. О. Д. Хлопотов [14] (полиэтилен), П. В. Мелентьев [9] использовали зависимость

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_c \lg t \quad (4)$$

Лемменс [15] (эластомерные волокна), П. В. Мелентьев [9] (полагал параметр τ в соотношении (5) равным нулю) применяли зависимость

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_c \lg(t + \tau) + \varepsilon_v t \quad (5)$$

А. М. Иванов и Г. А. Соколов [16] (оргстекло; длительность опытов — один год) использовали функцию

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_c \lg^2(t + 1) \quad (6)$$

Экспоненциальные функции. Простейшую экспоненциальную зависимость, соответствующую четырехэлементной реологической модели (Бюргерса), использовал Бонджиованни [8] (опыты те же, что и упомянутые выше). Модель Бюргерса обладает одним временем упругого последствия, или двумя временами релаксации. Свойства ползучести, релаксации для полимеров плохо описываются моделями с ограниченным числом времен упругого последствия или релаксации. Еще хуже такие модели описывают динамическое поведение реальных материалов. Чтобы получить лучшее согласование теории с результатами эксперимента, модель усложняют, вводя в ее состав большее число элементов, которым соответствует и больший набор времен последствия или релаксации. Этот путь приводит к спектральным методам описания механического релаксационного поведения полимеров, в механике полимеров широко используются как линейчатые, так и сплошные или полосатые спектры. Например, из одной такой спектральной модели, использующей нормальный закон распределения, вытекает уравнение кривой ползучести в виде (Теокарис [17])

$$\lg \varepsilon = \lg Q_1 + \lg Q_2 \operatorname{erf}(h \lg t / k) \quad (7)$$

где k — характерное время, h — параметр функции нормального распределения времен последствия.

Очень хорошее согласование экспериментальных и расчетных кривых получается в случае применения так называемых дробно-экспоненциальных функций, в показателе которых время t входит не в первой степени, а в некоторой степени t^k , где k — дробное число. Для примера приведем функцию, описывающую кривую упругого последования пластмасс (древесно-слоистые пластики, стеклотекстолиты и др.) в длительных опытах при напряжениях ниже некоторого критического называемого В. Ф. Яценко [18] пределом длительного сопротивления. Она имеет вид

$$\varepsilon = a + b \exp[-\alpha (t/t_1)^c] \quad (8)$$

где α и c — параметры материала, a и b — функции напряжений, t_1 — условно выбираемая единица масштаба времени. В настоящее время в связи с широким использованием теории наследственности для решения задач деформирования полимерных материалов и изделий применяются дробно-экспоненциальные функции более сложного вида, выражаемые посредством степенных рядов. Этот вопрос будет изложен ниже.

Приведем также используемые различными авторами уравнения кривых релаксации, снимаемых при постоянной деформации $\varepsilon = \varepsilon_0 = \text{const}$.

Степенные зависимости использовали А. С. Обуховым [7]

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{1 - [1 - (t^*/t)^n]^{1-n}} \quad (9)$$

Здесь n — параметр материала, σ_0 — максимальное напряжение в момент окончания процесса нагружения $t = t^*$, производимого с постоянной скоростью $\dot{\varepsilon}$ до тех пор, пока ε не станет равной ε_0 . Так как $n \ll 1$, то автор считает возможным положить $1 - n \approx 1$ и при этом получаем формулу

$$\sigma = \sigma_0 (t/t^*)^{-n} \quad (10)$$

Вегенер для полиамида-6 использовал для уравнения кривой релаксации степенной ряд по степеням $\ln(1+t)$ [19]. Им также отмечена зависимость функции от скорости деформации $\dot{\varepsilon}_0$ в начале опыта, так что уравнение кривой релаксации записано им в работе [20] в виде

$$\sigma = \sum_{m,n} A_{mn} [\ln(1+t)]^m (\dot{\varepsilon}_0)^n \quad (11)$$

где m имеет значения от 0 до +5, n — от -6 до +3, коэффициенты A_{mn} могут иметь положительные и отрицательные значения.

Теокарис [17] для описания кривой релаксации напряжений использовал формулу аналогичную (7). Г. Л. Слонимский [21] применял уравнение, содержащее экспоненциальную функцию дробного порядка в виде

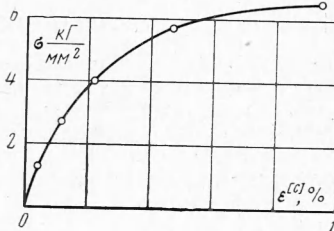
$$\sigma(t) = \sigma_\infty + \sigma_r \exp(-at^k) \quad (12)$$

где σ_∞ и σ_r — параметры кривой, a , k — параметры материала.

Все приведенные зависимости для кривых ползучести, релаксации более или менее удовлетворительно описывают ползучесть полимерных материалов в некоторой средней области времен, доступной для исследований. Попытки экстраполировать полученные зависимости в область очень больших времен t , или наоборот в область очень малых t могут дать оценки, значительно отличающиеся от фактических характеристик материала в этих условиях. Более того, приведенные выше простые зависимости могут и не удовлетворяться в очень широком интервале времени. Так, например, Танг [22] описывал ползучесть полиэтилена при временах меньше 1 мин зависимостью (2), при $t > 1$ мин — зависимостью (4).

Для оценки долговременного сопротивления изделия, предназначенного для длительной работы, важно исследовать, как ведет себя материал для больших t , настолько больших, что по сравнению с принятым масштабом времени можно считать t стремящимся к бесконечности. В этой связи заслуживают особого внимания данные Финдли, который показал, что для большого числа пластмасс при временах 100 000 час и более удовлетворяется формула (2), т. е. при $t \rightarrow \infty$ деформация непрерывно нарастает пропорционально t^n . Н. Т. Смотрин, В. М. Чебанов [12], а также В. Ф. Яценко [18] показали, что при достаточно высоких напряжениях больше некоторого критического σ_r , названного в работе [12] пределом пропорциональности, а в работе [18] — пределом длительного сопротивления, полная деформация материала имеет пластическую составляющую, скорость которой не зависит от t и пропорциональна разности $\sigma - \sigma_r$. При не слишком высоких напряжениях у некоторых армированных пластмасс, например стеклотекстолитов, древесно-слоистых пластиков [18], при $t \rightarrow \infty$ ε приближается к определенному пределу, т. е. ползучесть таких материалов ограничена.

По поводу особенностей функций ползучести и релаксации при малых временах $t \rightarrow 0$ необходимо заметить следующее. Формула (4) неприменима при очень малых t , ибо она приводит к абсурдной оценке величины деформации при $t \rightarrow 0$. Поэтому аргументом логарифмических членов функций ползучести или релаксации следует считать $t + \tau$, как в (5), или $t + 1$, как в (6), (11). Обращаясь еще раз к фиг. 1, видим, что при малых t деформация после приложения нагрузки быстро нарастает, так что вначале



Фиг. 2

кривая ползучести практически сливается с осью ординат. Попытки определения фактической скорости ползучести в опыте при $\sigma = \text{const}$ даже при очень малых t (например, измеряемых сотыми долями секунды) оканчиваются неудачей, так как или скорость ползучести остается больше той, какая может быть измерена применяемыми регистрирующими приборами, или конструкция машины не позволяет произвести достаточно быстрое нагружение, или, если нагружение производится очень быстро, то не удается исключить колебательные явления. В связи с изложенным практически все исследователи в области ползучести пришли к заключению, что функция ползучести для реального материала обязательно имеет слабую (интегрируемую) особенность, так что при $\sigma = \text{const}$ и очень малых $t < \Delta$ (Δ — любое положительное сколь угодно малое число) скорость деформации $\dot{\epsilon}$ бесконечно растет при стремлении Δ к нулю. Наличие этой особенности требует, чтобы величина τ в (5) была равна единице. В связи с этим заметна тенденция исследователей использовать для анализа задач ползучести функции ползучести и релаксации, а также ядра соответствующих интегральных уравнений, имеющие слабую особенность при $t = 0$.

При рассмотрении задач ползучести конструкций из полимерных материалов важно знать, является ли исследуемый материал линейным. У линейного материала в опытах на ползучесть все составляющие деформации: упругая, вязкая (или вязкопластическая) и деформация упругого последействия пропорциональны (при прочих равных условиях) действующему напряжению. Для суждения о том, является ли рассматриваемый материал линейным, большую пользу оказывает построение так называемых изохронных диаграмм σ - ϵ , например, по кривым ползучести. Располагая набором кривых ползучести, полученных при различных σ , можно для одного и того же значения времени t , которое при этом рассматривается как параметр, найти соответствующее каждому σ значение ϵ (или деформации ползучести $\epsilon^{[c]}$); полученные таким образом точки, нанесенные в координатах σ - ϵ , дают изохронную кривую. Пример такой кривой в координатах σ - $\epsilon^{[c]}$ представлен на фиг. 2, где приведены данные для образцов равнопрочного стеклопластика 33-18 С, вырезанных под углом 45° к оси стекловолокна, при $T = 30^\circ \text{C}$; $\epsilon^{[c]}$ — за 168 час. Из этой фигуры видно, что при малых напряжениях деформации $\epsilon^{[c]}$ приблизительно пропорциональны приложенным напряжениям, далее деформации возрастают не пропорционально σ , а быстрее, так что жесткость материала понижается с ростом σ . Такого рода нелинейность, когда жесткость материала падает с ростом σ , типична для жестких и прочных полимерных материалов, для эластомеров характерна иная нелинейность, когда вначале жесткость падает с ростом σ , далее она возрастает и, наконец, снова падает.

Представляет большой интерес и имеет большую важность вопрос о том, проявляется ли нелинейность свойств полимерного материала с самого начала, т. е. от $\sigma = 0$, или же имеется какая-то область линейного поведения. Все исследователи, ставившие эксперименты с этой целью, высказываются в пользу последнего утверждения. За рубежом линейному вязко-упругому поведению полимеров посвящена обширная литература (см., например, [23, 24]). Из числа советских работ, где затронуты вопросы о существовании области линейного вязко-упругого поведения полимеров и полимерных материалов, упомянем диссертации¹. Так, В. И. Озеров, изучавший эпоксидные компаунды, указывает, что исследованный им состав вел себя как линейное вязко-упругое тело при температуре 295°K вплоть до напряжений $\sigma = 0.8 \sigma_b$, где σ_b — прочность материала при данной температуре, при более высоких напряжениях проявлялась нелинейность свойств материала. В других условиях и для других полимеров нелинейность вязко-упругого поведения проявляется в большей степени.

¹ Б р ы з г а л и н Г. И. Некоторые вопросы ползучести конструкционных пластмасс. Канд. дисс., СО АН СССР, Новосибирск, 1964.

М а л и н и н Н. И. Исследование вопросов ползучести и прочности пластмасс. Докт. дисс., Ин-т проблем механики АН СССР, М., 1965.

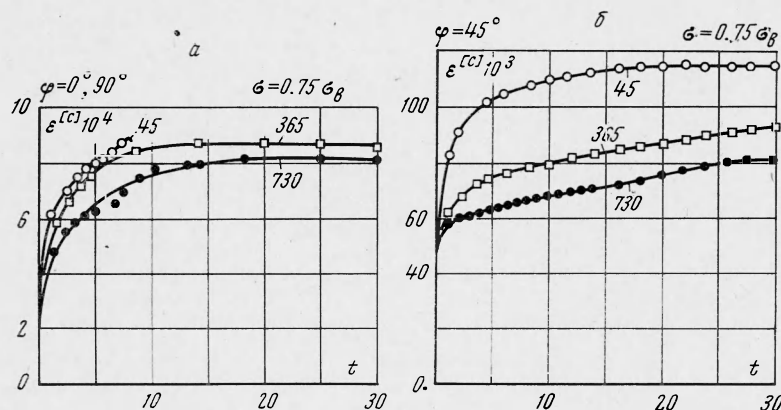
О з е р о в В. И. Исследование анизотропной вязкоупругости ориентированных стеклопластиков и цилиндрических оболочек из них. Канд. дисс., Ин-т механики АН УССР, Киев, 1966.

Заканчивая рассмотрение ползучести пластмасс при постоянных напряжениях и иных постоянных условиях, необходимо заметить, что на практике изделия, конструкции работают, как правило, в условиях изменяющихся напряжений. Здесь следует заметить, что напряжения в материале могут изменяться не только при изменении действующих на тело сил, но для ползучего материала и при постоянных силах.

Поведение материалов при меняющихся напряжениях описывается различными теориями ползучести, из которых в настоящее время общеприняты четыре, а именно теории старения, течения, упрочнения и наследственности [5]. Первые две теории из числа названных обладают существенным недостатком, который заключается в том, что уравнения этих теорий не инвариантны относительно начала отсчета времени. Однако теории старения, течения могут дать удовлетворительный результат, если основная нагрузка, действующая на тело, незначительно меняется во времени, а за начало отсчета принят момент приложения основной нагрузки. Так, например, кривые релаксации напряжений, рассчитанные по теориям старения и течения из результатов опытов на ползучесть, удовлетворительно согласуются с результатами прямых опытов на релаксацию (Б. В. Миненков, данные для капрона [25], полиэтилена и полипропилена [26]).

При определенных (менее жестких, чем названные) ограничениях удовлетворительные результаты для пластмасс дает и теория упрочнения [7]. Однако обычная теория упрочнения не описывает возврата после снятия нагрузки [5], и, чтобы получить удовлетворительное согласование предсказаний теории с результатами экспериментов при разгрузке образцов или изделий, возникает необходимость соответствующим образом модифицировать теорию.

Наиболее широкое применение для пластмасс получила теория наследственности, удовлетворяющая экспериментальным данным при меняющихся напряжениях лучше других теорий из числа названных. Свойства наследственных материалов, в особенности линейные свойства в некоторых случаях удобно представлять с помощью механических моделей, составляемых из пружин, вязких элементов и т. д. Модели линейных сред содержат только линейные элементы: пружины и амортизаторы. В. Р. Регелем [27] и А. И. Леоновым [28] предложены нелинейные механические модели разупрочняющихся и тиксотропных сред (в том числе полимеров), содержащие элементы разупрочнения.



Фиг. 3

По своим деформационным свойствам линейная механическая модель эквивалентна среде, подчиняющейся линейному дифференциальному уравнению

$$P\varepsilon = Q\sigma \quad (13)$$

где P и Q — дифференциальные операторы вида

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i}{dt^i}$$

Уравнения (13) могут быть переписаны в форме, содержащей интегральный оператор Вольтерра. Можно рассматривать ядро полученного линейного интегрального уравнения Вольтерра совершенно независимо от операторного уравнения (13) или от соответствующей реологической модели. При этом сохраняется лишь общий принцип наложения Больцмана — Вольтерра, согласно которому, например, деформация от напряжения $\sigma_1 + \sigma_2$ равна сумме от σ_1 и σ_2 . При этом предполагается, что среда имеет постоянные, независимые от времени свойства; старение исключено. Последнее поло-

жение удовлетворяется для пластмасс не совсем точно, так как их свойства с течением времени меняются. На фиг. 3 приведены данные М. М. Мартиросяна по ползучести стеклопластика СВАН в зависимости от его «возраста» (указанного на кривых в днях), исчисляемого с момента изготовления данного материала [29]; φ — угол между осью образца и направлением стекловолокон; σ_b — прочность образцов при машинных испытаниях. Из этих фигур видно, что в интервале возрастов от 45 до 730 дней прочность и жесткость материала возрастают. В некоторых случаях, наоборот, прочность и жесткость полимерных материалов снижаются с течением времени, в особенности, если старение происходит во влажной атмосфере или в агрессивной среде. Там, где необходимо принимать во внимание изменение свойств полимерного материала с его возрастом, можно рекомендовать для расчета изделий использование современных теорий ползучести стареющих наследственных сред, разработанных в основном применительно к бетонам. В настоящее время теории такого типа для расчетов изделий и конструкций из полимерных материалов практически не применяются.

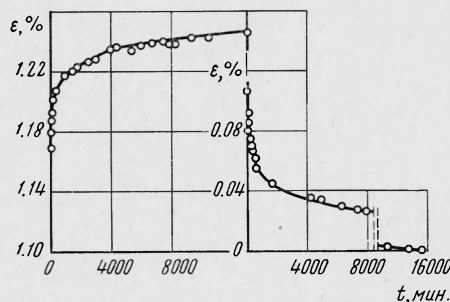
Согласно линейному принципу наложения Больцмана — Вольтерра напряжения σ , которые действовали в течение промежутка времени θ , предшествующего рассматриваемому моменту времени t , вносят вклад в величину деформации в момент t , равный

$$d\varepsilon^{[c]} = \sigma(\theta)J(t - \theta)d\theta \quad (14)$$

где J — гладкая, убывающая функция своего аргумента, функция «памяти», или ядро ползучести. Производя интегрирование этого соотношения в пределах от 0 до t (предполагаем, что до момента $t = 0$ напряжения на тело не действовали) и учитывая также

упругую деформацию, которую в соответствии с гипотезой о линейности свойств полагаем связанной с напряжениями законом Гука, получаем

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E} \left[\sigma + E \int_0^t J(t - \theta) \sigma(\theta) d\theta \right] \quad (15)$$



Фиг. 4

самым определились бы и модуль упругости E и ядро ползучести $J(t)$. К сожалению, такое разделение, учитывая упомянутую выше особенность кривых ползучести при $t = 0$, нельзя произвести достаточно объективно. Поэтому модуль упругости E определяется какими-либо специальными опытами. Можно, например, определить E либо частотным методом (при этом он неизбежно будет функцией круговой частоты ω), либо, как в работе [3], можно вычислить E по диаграмме быстрой разгрузки. В принципе можно и не отделять упругую деформацию от деформации ползучести, т. е. считать, что вся деформация материала есть деформация ползучести. При этом интегральное уравнение Вольтерра первого рода (15) вырождается в интеграл типа свертки Стильтьеса.

Интегральное уравнение (15) можно записать иначе, так, чтобы под интегралом была деформация ε , при этом вместо ядра ползучести в интеграл будет входить другая функция — ядро релаксации $K(t)$, являющееся резольвентой ядра ползучести. Представляет большой интерес вопрос о том, какими свойствами обладают ядра $J(t)$ и $K(t)$ при $t \rightarrow \infty$ и $t \rightarrow 0$. Если при $t \rightarrow \infty$ $J(t)$ и $K(t)$ стремятся к нулю и вязкая деформация отсутствует, то это равносильно условию о том, чтобы деформация была полностью обратимой. Здесь имеется в виду, естественно, не термодинамическая обратимость, а обратимость с той точки зрения, что развивающаяся при нагружении деформация должна полностью исчезать при возврате. Жесткие и прочные пластмассы, а также трехмерные полимеры при не слишком высоких напряжениях ведут себя именно таким образом, о чем можно судить по фиг. 4, заимствованной из работы Д. В. Замбахидзе и А. Л. Рабиновича [30]. На этой фигуре приведена кривая ползучести «равнопрочного» стеклопластика СВАН при растяжении его вдоль одного из направлений стекловолокон напряжением $\sim 32 \text{ кг/мм}^2$ и кривая возврата после разгрузки при $T = 70^\circ \text{C}$, $\varphi = 0$. Из этой фигуры видно, что возврат — полный.

Особенности при $t \rightarrow 0$ вида $\varepsilon' = \infty$ на кривой ползучести и $\sigma' = -\infty$ на кривой релаксации требуют, чтобы ядра при $t \rightarrow 0$ обладали слабой (интегрируемой) особенностью. Выше упоминались дробно-экспоненциальные функции ползучести и релаксации, записываемые в виде степенных рядов. Приведем ядра для двух функций, перспективных для использования их для решения практических задач операционно-сим-

волическими методами. Ядро Ю. Н. Работнова (см. [5], стр. 128)

$$\mathcal{O}_\alpha(\beta, t - \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n (t - \tau)^{n(1+\alpha)-\alpha}}{\Gamma[(n+1)(1+\alpha)]} \quad (16)$$

Второе ядро, рассмотренное в работах [31-33], есть резольвента ядра А. Р. Ржаницына, которое представляет собой дробно-экспоненциальную функцию. Оно имеет вид

$$E_\alpha[\beta, \kappa, t - \tau] = e^{-\beta t} \mathcal{O}_\alpha(\kappa, t - \theta) \quad (17)$$

В цитированных выше диссертациях показано, что ядро Ю. Н. Работнова (16) с достаточно большой точностью описывает кривые ползучести полимеров и полимерных материалов. Кроме того, в диссертации В. И. Озерова, осуществлявшего различные программы нагружения, в том числе такие, когда напряжения и деформации изменялись скачком, еще раз подтвержден для полимерных материалов (эпоксидные смолы, стеклопластики) принцип наложения Больцмана — Вольтерра в области линейного поведения этих материалов.

В работе [34] предложен расчетный метод достаточно объективного определения параметра ядра Ю. Н. Работнова из экспериментальных данных с применением ЭЦВМ.

Выше отмечалось, что при достаточно высоких напряжениях полимеры обнаруживают нелинейное вязко-упругое поведение. Нелинейные соотношения вязко-упругости полимеров можно получить, если предположить, что наследуемая деформация складывается не только из вкладов, определяемых правой частью соотношения (14), но она зависит также от членов, определяющих взаимные влияния напряжений, действующих в различные моменты времени, предшествующие рассматриваемому. Эта точка зрения приводит к нелинейному интегральному уравнению Фреше, записываемому для нестареющих наследственных материалов в виде

$$\varepsilon(t) = \sum_{i=1}^k \int_0^t \dots \int_0^t \sigma(\theta_1) \dots \sigma(\theta_i) J_i(t - \theta_1, \dots, t - \theta_i) d\theta_1 \dots d\theta_i \quad (18)$$

где ядра J_i могут иметь сильные особенности, например, в виде δ -функции Дирака; эти сильные особенности определяют мгновенные деформации.

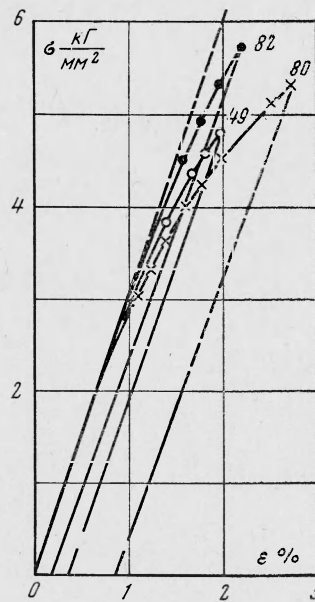
Нелинейные интегральные уравнения вида (18) применялись Уордом [35, 36] для описания ползучести при одноосном растяжении полипропиленовых волокон и Финдли [37] для описания ползучести непластифицированного поливинилхлорида в условиях сложного напряженного состояния. Уорд в разложении Фреше удерживал одно- и трех-, Финдли — одно-, двух- и трехкратные интегралы. Контрольные эксперименты, проведенные этими авторами, показали хорошее совпадение предсказаний теории с результатами опытных проверок.

К сожалению, соотношения (18) сложны, пользоваться ими для решения практических задач затруднительно, отсюда понятны попытки некоторых исследователей найти более простые зависимости, пригодные для описания наследственных свойств полимеров. Попытка, предпринятая автором [3], заключалась в следующем. Предположим, что зависимость наследуемой деформации от напряжения $\sigma(\theta)$ не линейная, как в (14), а имеет более общий вид

$$d\varepsilon^{[c]} = J[\sigma(\theta), t - \theta] d\theta \quad (19)$$

Если упругая деформация — линейная функция напряжений, то в результате интегрирования этого уравнения имеем

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E} + \int_0^t J[\sigma(\theta), t - \theta] d\theta \quad (20)$$



Фиг. 5

Линейность зависимости упругой деформации $\varepsilon^{[c]}$ от σ проверялась для непластифицированного поливинилхлорида; на фиг. 5 приведены для примера кривые нагружения и разгрузки при температуре $T = 15^\circ \text{C}$. Скорости нагружения для образцов №№ 49, 80 и 82 составляли соответственно $\sigma' = 8.6 \cdot 10^{-3} \text{ кг/мм}^2 \cdot \text{сек}$, $3.86 \cdot 10^{-3} \text{ кг/мм}^2 \cdot \text{сек}$ и $6.6 \text{ кг/мм}^2 \cdot \text{сек}$.

В этих опытах производилось быстрое нагружение и еще более быстрая (за 0.03 сек) разгрузка, которую считали практически мгновенной. Диаграмма разгрузки представляла собой прямую линию, тангенс угла ее наклона определял модуль Юнга.

Контрольные эксперименты подтвердили нелинейный принцип суперпозиции, описываемый соотношением (20) и позволили более и менее отчетливо выделить у области напряжений от $\sigma = 0$ до $\sigma = \sigma_b$ (предела прочности) три подобласти. В линейной подобласти материал ведет себя как линейное вязко-упругое тело. В подобласти слабой нелинейности функция $J(\sigma, t - \theta)$ может быть представлена в виде произведения двух функций: одна есть функция только σ , вторая — функция только $t - \theta$. Наконец, при высоких напряжениях имеем подобласть сильной нелинейности, где такое разделение невозможно. Последнее обстоятельство можно трактовать в связи с зависимостью времен релаксации материала от действующего напряжения, подобно рассматриваемой А. Л. Рабиновичем (см., например, [2, 39]).

И. И. Бугаков [38, 39] соотношение (20) записывал в обобщенном виде для анизотропного тела с учетом возможного влияния температуры

$$\varepsilon_{ij}(t) = \varepsilon_{ij}^e(t) + \int_0^t Q_{ij}[t - \theta, \dot{\varepsilon}_{\alpha\beta}(\theta), T(\theta)] d\theta \quad (i, j, \alpha, \beta = 1, 2, 3) \quad (21)$$

Опыты проводились им на трубчатых образцах из органического стекла и полиэфирной смолы в условиях растяжения, сжатия и кручения, а также при совместном действии растяжения (сжатия) с кручением при постоянной температуре. Они показали, что нелинейный принцип суперпозиции, определяемый соотношением (21), удовлетворяется при $T = \text{const}$ с достаточной точностью.

Еще один способ описания наследственных свойств полимерных материалов в области сильной нелинейности, предложенный в 1951 г. М. И. Розовским, основан на использовании нелинейного интегрального уравнения типа Вольтерра в виде

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E} + \int_0^t J(\sigma, t - \theta) \dot{\varepsilon}(\theta) d\theta \quad (22)$$

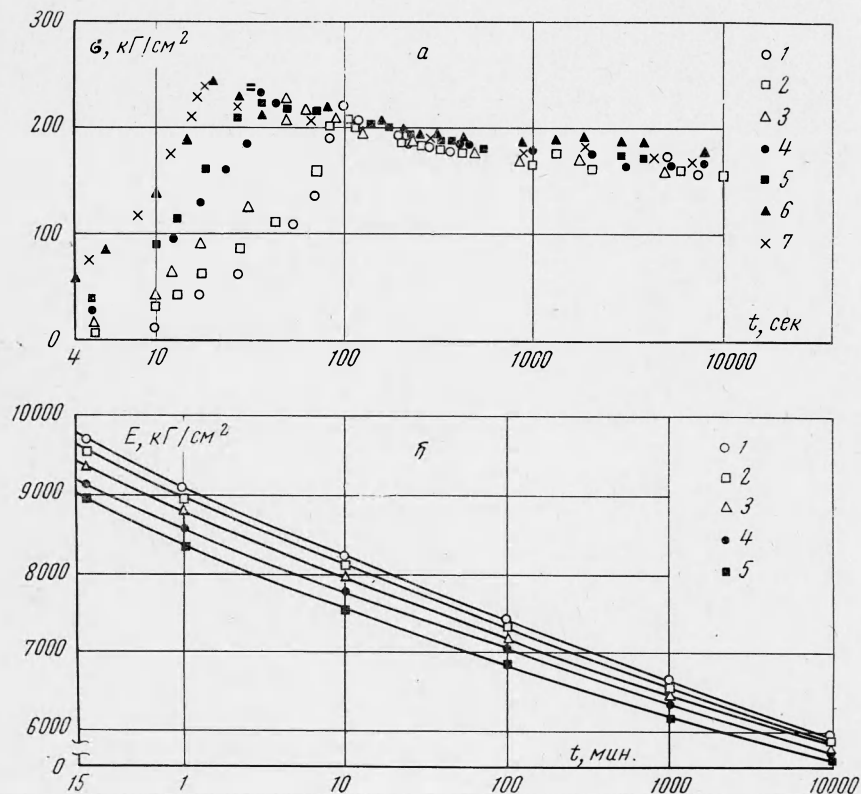
Здесь напряжение σ , входящее как аргумент нелинейного ядра J , рассматривается в отличие от соотношений (20), (21) как функция разности $t - \theta$. Уравнение (22) использовалось в работе [40] для сравнения результатов испытаний на ползучесть при периодической нагрузке с данными при статической нагрузке. Экспериментальная проверка (Г. И. Буянов, В. Д. Касюк, Б. И. Паншин) выведенного автором соотношения для определения ползучести материала при наличии периодической составляющей по данным статического эксперимента проводилась на оргстекле СО-120 в условиях, исключающих саморазогревание образцов. Она подтвердила возможность использования соотношения (22) для описания наследственных свойств исследованного материала в случае, когда температура материала, вызванная, например, его нагреванием внешними источниками тепла, или саморазогревом образца, изделия вследствие рассеяния в них механической энергии, не меняется. Если периодическая составляющая нагрузки имеет достаточно высокую частоту и не очень малую амплитуду, то необходимо считаться с саморазогреванием материала, вызванным механическими потерями при колебаниях [41]. Явления виброразогрева у полимерных материалов были исследованы Г. И. Баренблаттом [41], при этом было замечено, что виброразогрев иногда увеличивает скорость ползучести материала на 2—3 десятичных порядка. Главной причиной ускорения ползучести в условиях вибраций авторы работы [41] считают эффекты виброразогрева, вызывающие в соответствии с известными температурными зависимостями релаксационных свойств полимеров снижение их механических характеристик и соответствующее увеличение скорости $\dot{\varepsilon}$ при заданном σ . Р. Д. Максимов и Ю. С. Уржумцев [42] установили, что малые вибрации вызывают увеличение скорости ползучести не только вследствие повышения температуры материала, но и вследствие каких-то иных причин, не связанных с температурными эффектами.

Выше в разделе, посвященном рассмотрению релаксации напряжений, отмечалось влияние режима нагружения на начальном этапе, когда деформация возрастает от $\varepsilon = 0$ до $\varepsilon = \varepsilon_0$. В дополнение к тем данным, которые там были представлены, отметим еще работу Шармы [43]. Этот автор исследовал релаксацию напряжений у пентона в нелинейной области и для кривых, получаемых при различных скоростях деформаций $\dot{\varepsilon}_0$ на этапе нагружения, предложил функцию релаксации в виде

$$\Psi(t, \varepsilon_0) = \Phi(t) (\varepsilon_0)^n \quad (23)$$

где время t отсчитывается от момента, когда деформация достигла заданного значения.

Здесь следует заметить, что само по себе влияние скорости $\dot{\epsilon}_0$ на ход последующих кривых ползучести, релаксации не представляется удивительным. При различных скоростях $\dot{\epsilon}_0$ осуществляются различные режимы нагружения, а значит будут различными и законы изменения во времени напряжений в опыте на релаксацию. Однако вследствие упоминавшегося выше свойства наследственных материалов, согласно которому ядра ползучести, релаксации стремятся к нулю при стремлении их аргумента — разности $t-\theta$ — к бесконечности, материал должен при больших временах постепенно «забывать» об особенностях начального этапа процесса нагружения, и например, кривые релаксации, полученные при разных $\dot{\epsilon}_0$, должны с течением времени в силу законов линейной и нелинейной наследственности, приведенных выше, сливаться в единую кривую. М. А. Колтунов, ссылаясь на собственные мало убедительные данные, считает [44], что такого слияния не происходит, и предлагает кроме ϵ и σ вводить в применяемое им нелинейное интегральное уравнение типа Ю. Н. Работнова (см. [5] стр. 209) еще и σ' .



Фиг. 6

Влияние начального этапа процесса нагружения на последующий ход кривой релаксации показано на фиг. 6, данные взяты из работы Шармы [43]. На фиг. 6, а приведен начальный участок кривых релаксации в опытах, скорость $\dot{\epsilon}_0$ для которых менялась в пять раз, точки 1, ..., 7 соответствуют значениям $10^5 \dot{\epsilon}_0 = 23, 27, 41, 56, 66, 108, 115$. В начале процесса σ возрастает в соответствии со скоростью $\dot{\epsilon}_0$, далее идет процесс релаксации. Данные более длительного опыта представлены на фиг. 6, б, точки 1, ..., 5 соответствуют значениям $10^4 \dot{\epsilon}_0 = 25, 20, 15, 10, 5$; соотношение скоростей $\dot{\epsilon}_0$ в различных опытах приблизительно такое же, как и на фиг. 6, а. Спустя 10000 мин воспоминание о различиях начальной стадии опыта у разных образцов в соответствии с обычными теориями наследственности должно изгладиться и кривые должны совпасть. Они, однако, не совпали и, например, σ для нижней кривой, полученной при самой низкой $\dot{\epsilon}_0$, отличается приблизительно на 5% от σ для верхней кривой.

По поводу температурных зависимостей свойств ползучести и релаксации полимеров и полимерных материалов можно сделать следующие замечания. Большинство исследователей считают полимеры и материалы на их основе термореологически просты-

ми телами. Термин «термореологически простое тело» был введен Шварцлем и Ставерманом в 1952 г. [45]. Такое тело, например, при заданном напряжении при изменении температуры от T_0 до T деформируется так же, как и при температуре T_0 , лишь скорость развития деформаций ползучести изменяется в a_T раз.

Морлэнд и Ли [46], затем Стернберг и Гертин [47] рассмотрение задач линейной вязко-упругости в переменных и нестационарных температурных полях для термореологически простых тел предлагают вести следующим образом. В общей системе уравнений, определяющих рассматриваемую задачу, только физические уравнения связаны с температурой. Последние записываются так же, как и для постоянной температуры (см., например, уравнение (15)), только вместо реального времени всюду вводится приведенное время, зависящее от температуры. Кроме того, в физические соотношения вводится член, учитывающий температурные напряжения. Изложенная в работах [46, 47] концепция разделяется также А. А. Ильюшиным и П. М. Огибаловым [48].

Температурная зависимость коэффициента a_T принимается обычно в соответствии с формулой Вильямса, Ландела и Ферри (см., например, [23]). Недавно эта формула была еще раз подтверждена экспериментально, однако исходная физическая концепция упомянутых авторов была подвергнута критике.

Здесь следует заметить, что представления о термореологически простом поведении, а также зависимости типа формулы Вильямса — Ландела — Ферри удовлетворяются лишь для аморфных полимеров. Для кристаллических полимеров можно привести ряд примеров, когда эти концепции совершенно неприменимы. Более сложные температурные зависимости релаксационного поведения кристаллических полимеров вызваны тем обстоятельством, что их кристаллическая структура в значительно большей степени чувствительна к температурным и иным воздействиям, а влияние структуры на свойства выражено значительно более ярко, чем у аморфных полимеров.

При рассмотрении вязко-упругого поведения полимеров и полимерных материалов в переменных и нестационарных температурных полях можно также считать, что входящие в наследственные соотношения параметры и функции зависят от температуры. Выше было приведено соотношение (21), куда входила также и температура, это соотношение может применяться для более общих тел, чем термореологически простые.

Выше рассматривались вопросы ползучести пластмасс в условиях одноосного напряженного состояния. В условиях сложного напряженного состояния поведение полимерных материалов в значительной степени зависит от того, являются ли они изотропными, или анизотропными. Вначале рассмотрим свойства изотропных полимерных материалов.

Для изотропных линейных наследственных материалов система физических уравнений, связывающих компоненты тензоров напряжений и деформаций, распадается на два тензорных уравнения: одного для шаровых тензоров, второго для девиаторов. Для линейного тела зависимость между компонентами σ_{ij} и ε_{ij} может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(t) = & \delta_{ij} \left[B_0 \sigma_{kk}(t) \right] + \int_0^t B_1(t-\theta) \sigma_{kk}(\theta) d\theta \Big] + \\ & + J_0 \sigma_{ij}(t) + \int_0^t J_1(t-\theta) \sigma_{ij}(\theta) d\theta \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь по двойным индексам производится суммирование, уравнение записано как интегральное уравнение Вольтерра первого рода, а не в виде свертки Стильтьеса. Для слабо нелинейного тела соотношение (24) обобщается Финдли в соответствии с нелинейным интегральным уравнением Лидермана и записывается следующим образом

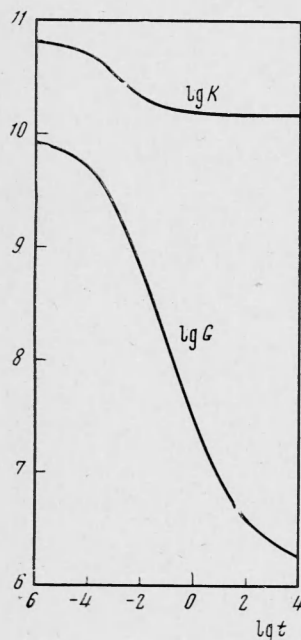
$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(t) = & \delta_{ij} \left\{ B_0 f[\sigma_{kk}(t)] + \int_0^t B_1(t-\theta) f_1[\sigma_{kk}(\theta)] d\theta \right\} + \\ & + J_0 F[\sigma_{ij}(t)] + \int_0^t J_1(t-\theta) F[\sigma_{ij}(\theta)] d\theta, \dots \end{aligned} \quad (25)$$

где f и F — нелинейные функции σ_{kk} и σ_{ij} , такие, что при малых напряжениях f и F вырождаются в σ_{kk} и σ_{ij} соответственно.

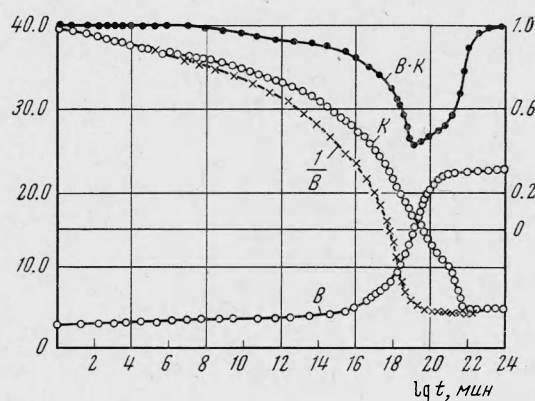
При решении практических задач большинство авторов принимают во внимание наследственные свойства лишь при деформациях сдвига. Считается, что по отношению к всестороннему растяжению (сжатию) полимерные материалы ведут себя упруго, иногда вообще тело считается несжимаемым. В большей части исследуемых расчетных слу-

чаев неточности описания объемных свойств материала (под словом «объемные» здесь понимаются свойства материала по отношению к деформациям всестороннего растяжения или сжатия) не оказывают заметного влияния на исследуемую картину напряженно-деформированного состояния. Однако существуют задачи, для которых погрешности при выборе закона, описывающего объемные свойства, существенно сказываются на

результатах. Одной из таких задач, рассмотренной Хуаном, Ли и Роджерсом [49], является плоская задача о деформировании полого вязко-упругого цилиндра с внутренней абдирующей поверхностью под действием внутреннего давления, цилиндр заключен в упругую оболочку. Закон объемной релаксации принимался ими на основании опытных данных Мэрвина, Олдрича и Сека, полученных с применением температурно-временной суперпозиции и описанных в книге [23], стр. 467—468).



Фиг. 7



Фиг. 8

Данные по частотной зависимости объемного модуля полиизобутилена при $T = 25^\circ$ пересчитывались на модуль объемной релаксации по приближенной формуле Ниномия и Ферри ([23], стр. 93). Эти данные в координатах $\lg K - \lg t$ представлены на фиг. 7 (K — объемный модуль в $\text{дин}/\text{см}^2$). Видно, что в диапазоне $\lg t$ от -5 до $+2$ модуль релаксации $K(t)$ изменяется приблизительно на 0,85 десятичных порядка (t — в сек). Здесь же для сравнения приведена зависимость модуля релаксации G от времени в логарифмических координатах. Анализ показал, что результаты вычисления поля напряжений в рассматриваемой задаче зависят от того, в какой мере учитывается объемная ползучесть материала.

Непосредственные измерения объемной ползучести производили на высоконаполненном инертными и боевыми наполнителями эластомере «Хайкар» (сшитый сополимер бутадиена и акриловой кислоты) Шарма и Мак-Карти [50], объемные ползучесть и релаксацию исследовал Теокарис [51]. На фиг. 8 представлены данные Теокариса по объемной ползучести и релаксации эпоксидной смолы C-100—0—8 холодного отверждения, для расширения интервала времени им также использовался принцип температурно-временной суперпозиции.

Температура приведения 298°K , на фиг. 8

$$B^* = T/298 B(t) \cdot 10^{-9} \text{ дин} \cdot \text{см}^{-2}, K^* = \frac{258}{T} K(t) \cdot 10^{11} \text{ дин}^{-1} \cdot \text{см}^2$$

Множители при B и K представляют собой температурную поправку, учитывающую увеличение равновесного модуля полимера с повышением температуры в соответствии с кинетической теорией упругости каучука.

Здесь же приведено произведение модуля релаксации на податливость, в соответствии с соотношением Вронского [52] это произведение должно равняться единице. Как видим, там, где ползучесть проявляется в достаточной степени, оно значительно отличается от единицы.

Экспериментальная проверка возможности применения соотношений (24) и (25) для описания ползучести изотропных стеклообразных полимеров (исследовался жесткий отожженный поливинилхлорид при комнатной температуре) и в условиях сложного нагружения было произведено Финдли в работе [10]. Было установлено, что уравне-

ние (24), а еще лучше (25), где функции f и F зависят от своих аргументов по закону гиперболического синуса, описывают наследуемую часть общей деформации с удовлетворительной точностью. В работе [37] для описания нелинейных наследственных свойств изотропных полимеров при сложном напряженном состоянии и сложных путях нагружения применялось нелинейное интегральное уравнение типа (18), в котором удерживались интегралы первой, второй и третьей кратности.

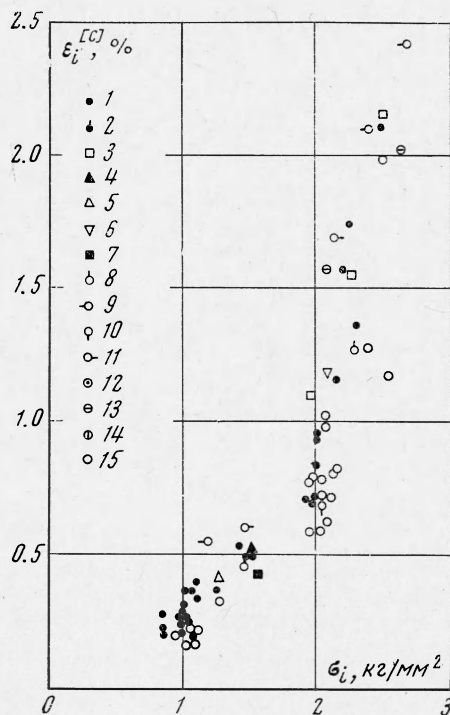
Относительно компонент тензоров ε_{ij} и σ_{ij} это уравнение было второй степени, так как кубические тензорные члены выражались через квадратичные в соответствии с тождеством Кэли — Гамильтона. Скалярные же функции, которых было в общем случае трехмерного напряженного состояния 12, а в плоском случае 9, содержали первый, второй и третий инварианты тензора напряжений.

В заключение данного раздела необходимо остановиться на результатах работы [53]. На фиг. 9 представлены результаты испытаний на ползучесть органического стекла (полиметилметакрилата), проведенные на трубчатых образцах при совместном действии растяжения с кручением:

точки	1	2	3	4	5	6	7	8
$\tau/\sigma =$	0	0.2	0.3	0.34	0.4	0.5	0.62	0.8

точки	9	10	11	12	13	14	15
$\tau/\sigma =$	0.9	0.94	1.0	1.07	1.8	2.0	$-\infty$

Результаты представлены в координатах: интенсивность деформаций ползучести $\varepsilon_i^{[c]}$ — интенсивность напряжений σ_i , нагружение простое, продолжительность опыта



Фиг. 9

ные результаты трактуются с позиций теории Малмейстера, представляющей собой один из вариантов теории пластического скольжения.

Следует заметить, что применение изотропных пластмасс в высоконагруженных изделиях и конструкциях нецелесообразно с точки зрения максимального использования прочности материала. В распоряжении технолога, конструктора, инженера имеется ряд методов, с помощью которых сопротивление полимерного материала может быть повышено в каком-либо направлении, где действуют максимальные напряжения, иногда за счет ослабления прочности материала в другом направлении, где напряжения значительно меньше.

5 час, температура комнатная. Применялись отношения касательных напряжений к нормальным в пределах от $\tau/\sigma = 0$ до ∞ . Из фиг. 9 видно, что, несмотря на некоторый разброс, экспериментальные точки располагались в пределах достаточно узкой полосы. Все испытания при одном и том же значении τ/σ располагались в пределах еще более узкой полосы, так что положение рассматриваемой точки на данном графике зависело не только от заданного значения σ_i , но и от отношения τ/σ . Таким образом, величина σ_i определяет при заданных условиях величину ε_i лишь в первом приближении; по-видимому, на зависимость между скалярными инвариантами тензоров напряжений и деформаций оказывает влияние не только второй вариант тензора σ_{ij} , но и его первый и третий инварианты. К сожалению, к настоящему времени этот вопрос практически не исследован.

В этой же работе были приведены некоторые данные, свидетельствующие о том, что зависимость между девиаторами тензоров напряжений и деформаций является в первом приближении тензорно линейной, нелинейность может существенно проявляться при больших деформациях порядка 100%.

Ряд исследований ползучести полимерных материалов в условиях сложного напряженного состояния при простом и сложном нагружении выполнены в Институте механики полимеров [54, 55].

Анизотропные материалы в общем случае будут иметь и свойства анизотропной ползучести. К сожалению, в последнее время было очень мало работ, в которых бы с позиций феноменологических теорий исследовалась ползучесть анизотропных полимеров. В качестве примера экспериментальной работы в этом плане можно назвать работу Н. Т. Смотриной и В. М. Чебанова [12], исследовавших ползучесть образцов текстилита, вырезанных под разными углами по отношению к основе.

Здесь следует остановиться на двух теоретических работах, посвященных выводу соотношения между напряжениями и деформациями при больших деформациях. Конечные деформации могут определяться различными способами, наиболее теоретически обоснованным представляется определение тензора деформации через метрический тензор подвижной лагранжевой системы координат, связанной с материальными точками в соответствии с формулой [56]

$$\varepsilon_{ij}(t) = 1/2 [g_{ij}(t) - g_{ij}(0)] \quad (26)$$

где $g_{ij}(t)$ — метрический тензор этой системы в момент t , а $g_{ij}(0)$ — при $t = 0$ (обычно полагают $g_{ij}(0)$ равным единичному тензору). Таким образом, деформация однозначно определяется метрическим тензором $g_{ij}(0)$.

Наиболее общее соотношение между тензорами напряжений и деформаций для на-следственной среды, свойства которой не зависят от времени, Пипкин [57] записывает в виде

$$\sigma_{ij}(t) = \frac{\partial X_i(t)}{\partial x_p} \frac{\partial X_j(t)}{\partial x_q} S^{pq} [g_{rs}(t - \theta)] \Big|_{\theta=0}^{\infty} \quad (27)$$

где S^{pq} — тензор напряжений в материальной системе координат X_i , x_i — декартовы координаты рассматриваемой материальной точки. Выражение в квадратных скобках означает, что S^{pq} есть функционал g_{rs} . Далее используется разложение функционала в ряд Фреше и исследуются различные возможные формы записи полученной зависимости.

В работе Херрманна [58] аналогичные построения проводятся для теории типа теории потенциала.

В заключение отметим некоторые практические работы, посвященные разработке основных принципов теорий вязко-упругости и методам решения краевых задач.

Попытка строгого аксиоматического построения линейной теории вязко-упругости содержится в работах Гертца и Стернберга ([59] и другие работы). Ими исследуются, в частности, такие вопросы, как существование и единственность решения, анализируются некоторые свойства решений краевых задач, обобщаются на вязко-упругость известные теоремы и принципы теории упругости (теорема Бетти, принцип Сен-Венана и др.), рассматриваются возможности обобщения на задачи вязко-упругости известных методов, таких как методы Галеркина, Папковича и др.

Постановка задач теории вязко-упругости отличается от постановки задач теории упругости тем, что в физические соотношения входит время, так что связь между напряжениями и деформациями выглядит или как операторное уравнение, содержащее операторы $d(\cdot)/dt$, или как интегральное уравнение Вольтерра типа приведенных выше. Чтобы решить поставленную краевую задачу теории вязко-упругости, нужно каким-либо способом преодолеть трудности, связанные с временными зависимостями процессов деформирования. Многие задачи (см., например, [60]) решаются применением преобразования Лапласа. При этом задача сводится к так называемой сопряженной упругой задаче в пространстве изображений. Решение этой упругой задачи зависит от параметра преобразования p . Совершая обращение преобразования, получаем искомое решение. В некоторых случаях решение сопряженной упругой задачи оказывается сложным и обращение преобразования Лапласа не удается произвести. При этом прибегают к численным методам обращения, осуществляемым обычно с помощью ЭВМ (см., например, [61]), или к различным приближенным методам [62].

В работе Морлэнда [63] плоская задача о контакте при качении в линейной теории вязко-упругости решена с помощью преобразования Фурье.

Для некоторых задач, например задач со смешанными граничными условиями, или с аблирующей поверхностью, сопряженная упругая задача не определена и метод интегральных преобразований не может быть применен.

Рассмотрение задач линейной вязко-упругости может быть проведено по методу Вольтерра, основанному на следующем. Операции дифференцирования (если используются операторные физические уравнения) или интегрирования (если физические уравнения суть интегральные уравнения Вольтерра) по времени переставимы с аналогичными операциями по координатам пространства. Поэтому решение задач вязко-упругости можно вести так же, как и в теории упругости, при этом только всегда нужно иметь в виду, что параметры физических уравнений не просто константы, а временные дифференциальные или интегральные операторы. В итоге в результате интегриро-

вания дифференциальных уравнений в частных производных по пространственным координатам приходят к дифференциальным, интегральным или интегро-дифференциальным уравнениям, где переменной величиной является время. Интегрирование этих уравнений приводит к решению задачи. Примеры таких подходов содержатся в работах Шиноуки [64], Бадрана [65]. Иногда интегрирование этих уравнений в виду большой их сложности производится численными методами с применением ЭВМ.

Ю. Н. Работнов [5], затем М. И. Розовский с сотрудниками разработали метод, основанный на применении принципа Вольтерра, согласно которому решение упругой задачи, в котором упругие константы заменены вязко-упругими операторами, является пригодным и для вязко-упругого тела. Трудности возникают при расшифровке таких решений, так как при этом необходимо осуществлять алгебраические и иные математические действия над операторами. Ю. Н. Работновым и М. И. Розовским с сотрудниками достаточно детально разработана алгебра операторов с дробно-экспоненциальным ядром (16). Предложен ряд асимптотических формул, облегчающих вычисление $\mathcal{E}_\alpha$ -функций в области больших t , в Институте машиноведения закончена работа по табулированию $\mathcal{E}_\alpha$ -функций. В. Г. Громовым [33] предпринята попытка построить алгебру интегральных операторов, основанных на ядрах (16).

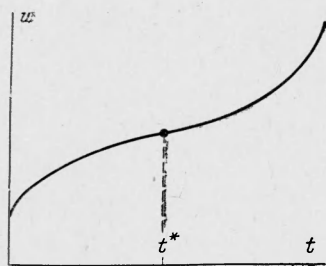
С помощью изложенных методов многими исследователями как в СССР, так и за рубежом рассмотрен ряд задач теории линейной вязко-упругости.

К числу задач, приковывающих в настоящее время особо пристальное внимание исследователей, относятся задачи, рассматривающие свойства композитной среды в функции свойств образующих ее фаз. Ряд задач в таком плане рассмотрен А. М. Скудрой¹. Им рассматривалось поведение армированного полимерного материала (например, стеклопластика) в функции свойств наполнителя и связующего, концентрации наполнителя и ориентации армирующих элементов. Автор считал, что армирующие элементы имеют прямоугольное сечение, напряжения в арматуре и связующем распределены равномерно. Учитывалась ползучесть арматуры, связующее и арматура считались стандартными линейными телами.

Г. А. Ван Фо Фы [66, 67] рассматривая сходную задачу, полагал, что армирующие стержни распределены в сечении в узлах правильной двоякопериодической сетки. Им учитывались эффекты концентрации напряжений в связующем в зазорах между волокнами, ползучесть описывалась интегральными уравнениями Вольтерра с ядрами Работнова.

В. В. Болотин [68] при построении теории армированных сред вводит так называемый принцип «размазывания». Согласно этому принципу повышенная жесткость армирующих элементов не сосредоточена в каких-то ограниченных объемах среды, а равномерно «размазана» по всему ее объему. На основе вариационных принципов он устанавливает, что исследуемая среда должна подчиняться основным соотношениям теории моментных напряжений Фойгта — Коссера. Обобщение на вязко-упругость предлагается вести с помощью дифференциальных операторов.

И. Г. Терегулов [69, 70] проводил исследования ползучести пластин и оболочек из вязко-упругого материала с использованием принципа Вольтерра и операторов Ю. Н. Работнова. В работе [70] им, в частности, было установлено, что при внешней нагрузке, большей некоторого критического значения, определяемого длительными модулями пластины (оболочки), прогибы при некотором отклонении формы



Фиг. 10

пластины от идеальной будут нарастать с течением времени примерно так, как показано на фиг. 10 при t^* — точке перегиба. В соответствии с определением критического состояния по С. А. Шестерикову предложено за критическое время t_* считать время, соответствующее точке перегиба. В работе [71] за критическое время предложено считать такое, при котором прогиб превышает начальный прогиб в k раз, где величина k назначается с учетом допусков на начальную погиб и величину допустимого прогиба.

В работе Хуана и Ли [72] известная задача о деформировании внутренним давлением вязко-упругого цилиндра в упругой оболочке решается с учетом конечных деформаций. Определение деформации принимается по (26). В работе Ф. М. Ф. Бадрана [65] аналогичное рассмотрение проводится с использованием логарифмической конечной деформации по Хенки.

¹ Скудра А. М. Деформативность и статическая усталость армированных пластинок при простом плоском нагружении. Докт. дисс. М., Ин-т проблем механики АН СССР, 1967.

А. А. Ильюшин и П. М. Огибалов в работе [73] предприняли попытку построения общей тензорно-линейной теории вязко-упругости с использованием соотношений типа (18), в правой части которых удерживаются лишь интегралы первой и третьей кратности, а в этих интегралах удерживаются лишь тензорно-линейные члены. В. В. Москвитин [74] рассматривается эта же теория, физически нелинейный член полагается пропорциональным некоторому малому параметру. Решение краевых задач предложено вести методом последовательных приближений.

Б. Е. Победря [75] на основе функционального анализа доказывает ряд теорем для нелинейной вязко-упругости, основанной на использовании соотношений (18). В другой работе [76] им предложен способ построения резольвент ядер функционалов такого типа.

Еще один случай нелинейного вязко-упругого поведения линейного термореологически простого тела, вызванного процессами виброразогрева, рассмотрен Г. И. Баренблаттом [77].

К сожалению, построение новых теорий не всегда сопровождается соответствующими экспериментальными работами, подтверждающими или опровергающими выводы теории.

Поступила 21 XI 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. М а л и н и н Н. И. Ползучесть пластмасс. Тр. II Всес. съезда по теор. и прикл. механ., вып. 3; Механика твердого тела, М., «Наука», 1966.
2. Р а б и н о в и ч А. Л. Основные вопросы механики ориентированных стеклопластиков. Тр. II Всес. съезда по теор. и прикл. механ., вып. 3; Механика твердого тела, М., «Наука», 1966.
3. Д о л г о в А. В., М а л и н и н Н. И. О ползучести полимеров в стеклообразном состоянии. ПМТФ, 1964, № 5.
4. S c h w a r z l F. R. On mechanical properties of unfilled and filled elastomers. In: Mech. and Chem. Solid Propellants. Oxford — London — Edinburg — New York — Toronto — Sydney — Braunschweig, Pergamon Press, 1967.
5. Р а б о т н о в Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М., «Наука», 1966.
6. S h a r m a M. G., S e n Y. K. Nonlinear dynamic behavior of plastics. J. Appl. Polymer Sci., 1965, vol. 9, No. 2.
7. О б у х о в А. С. О зависимости между напряжением и деформацией полимеров в линейном напряженном состоянии. Механика полимеров, 1965, № 5.
8. B o n g i o v a n n i G. La legge della deformazione in funzione della sollecitazione e del tempo a temperatura costante nello scorrimento viscoso dei materiali termoplastici. Ingegneria Mecc., 1965, vol. 14, No. 12.
9. М е л е н т ь е в П. В., З н а м е н с к а я Е. А., Л е б е д е в а Т. А., Р о м а н о в Е. С., Ф р а н ц у з о в а Л. П., П и л и п е н о к Д. А., С т а л е в и ч З. Ф. Работы по сопротивлению полимерных материалов. Тр. н.- и. и. проектно-констр. ин-та технол. машиностр., 1966, № 2.
10. O n a g a n K., F i n d l e y W. N. Creep experiments and examples for viscoelastic material under combined stress with abrupt changes in state of stress. Polymer Engng. Sci., 1965, vol. 5, No. 4.
11. S h a r m a M. G., W e n P. R. Nonlinear viscoelastic behavior of cellulose acetate butyrate. SPE Trans., 1964, vol. 4, No. 4.
12. С м о т р и н Н. Т., Ч е б а н о в В. М. Ползучесть текстолита по различным направлениям в плоскости листа. Сб. Исследования по упругости и пластичности. Л., изд. Ленингр. ун-та, 1966, № 5.
13. P l a z e k D. J. Creep and recovery properties of a zinc phosphinate polymer. Trans. Soc. Rheol., 1965, vol. 9, No. 1.
14. Х л о п о т о в О. Д. Влияние повышения температуры на ползучесть полиэтилена при кручении. Пласт. массы, 1963, № 8.
15. L e m m e n s J. Représentation du comportement rhéologique des fils elastomères à l'aide d'un modele analogique. Ann. Scient. Text. Belg., 1966, No. 2.
16. И в а н о в А. М., С о к о л о в Г. А. Ползучесть оргстекла. В: Сб. Тр. Воронежск. инж.-строит. ин-та, 1964, № 10, вып. 1.
17. T h e o c a r i s P. S. A review of the rheo-optical properties of linear high polymers. Exptl. Mech., 1965, vol. 5, No. 4.
18. Я ц е н к о В. Ф. Прочность и ползучесть слоистых пластиков. Киев, «Наукова думка», 1966.
19. W e g e n e r W., E g b e r s G. Dynamometrisches Verhalten und Struktur von auf Dauerstand beanspruchten unbehandelten und behandelten Polyamid-6-Fäden. 1. Chemiefasern, 1966, Bd 16, Nr 1.
20. W e g e n e r W., E g b e r s G. Dynamometrisches Verhalten und Struktur von auf Dauerstand beanspruchten unbehandelten und behandelten Polyamid-6-Fäden. 2. Chemiefasern, 1966, Bd 16, Nr 2.

21. С л о н и м с к и й Г. Л., Р о г о в и н а Л. З. Определение механических характеристик полимерного материала по релаксации напряжения при постоянной деформации. Высокомолекул. соединения, 1964, т. 6, № 4.
22. T u n g L. H. Stress-cracking of polyethylene examined from the view-point of critical strain. J. Polymer Sci., 1965, vol. A3, No. 3.
23. Ф е р р и Дж. Д. Вязкоупругие свойства полимеров. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
24. Г о б о л ь с к и й А. В. Свойства и структура полимеров. М., «Химия», 1964.
25. М и н е н к о в Б. В., С л ю д и к о в а Н. Н. Влияние стабилизирующих добавок на ползучесть и релаксацию капрона. Пласт. массы, 1964, № 9.
26. М и н е н к о в Б. В., Л е б е д е в а Р. Е., С л ю д и к о в а Н. Н., Б ы ч к о в В. В. Влияние времени на поведение под нагрузкой полипропилена и полиэтилена низкого давления. Сб. тр. Моск. высш. техн. уч-ща им. Баумана, 1966, т. 6.
27. Р е г е л ь В. Р. Механические модели полимеров, включающие элементы разрушения. Высокомолекул. соединения, 1964, т. 6, № 3.
28. Л е о н о в А. И. Теория тиксотропии упруго-вязких сред с непрерывным распределением времен релаксации. ПМТФ, 1964, № 4.
29. М а р т и р о с я н М. М. Влияние старения на ползучесть стеклопластика СВМ при растяжении с учетом ориентации волокон. Механика полимеров, 1965, № 6.
30. З а м б а х и д з е Д. В., Р а б и н о в и ч А. Л. Неупругие константы ориентированного стеклопластика в функции температуры. Механика полимеров, 1967, № 2.
31. К о л т у н о в М. А., Б е з у х о в В. Н. Анализ ползучести ортотропного стеклопластика. Вестн. Моск. ун-та, Матем., механ., 1963, № 6.
32. К о л т у н о в М. А. К вопросу выбора ядер при решении задач с учетом ползучести и релаксации. Механика полимеров, 1966, № 4.
33. Г р о м о в В. Г. Об одном способе описания вязко-упругого поведения полимерных тел. Докл. АН СССР, 1967, т. 173, № 2.
34. З в о н о в Е. Н., М а л и н и н Н. И., П а п е р н и к Л. Х., Ц е й т л и н Б. М. Определение характеристик ползучести и релаксации линейных упруго-наследственных материалов с использованием ЭЦВМ. Инж. ж. МТТ, 1968, № 5.
35. H a d l e y D. W., W a r d I. M. Non-linear creep and recovery behavior of polypropylene fibres. J. Mech. and Phys. Solids., 1965, vol. 13, No. 6.
36. W a r d I. M., W o l f e J. M. The non-linear mechanical behaviour of polypropylene fibres under complex loading programmes. J. Mech. and Phys. Solids, 1966, vol. 14, No. 3.
37. О п а г а н К., F i n d l e y W. N. Combined stress - creep experiments on a non-linear viscoelastic material to determine the kernel functions for a multiple integral representation of creep. Trans. Soc. Rheol., 1965, vol. 9, No. 2.
38. Б у г а к о в И. И. О наследственной теории ползучести полимерных материалов. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 2.
39. Б у г а к о в И. И. Принципы сложения деформаций и напряжений и ползучесть полимерных материалов. Инж. ж. МТТ, 1966, № 1.
40. Б у я н о в Г. И., К а с ю к В. Д., М а л и н и н Н. И., П а н ш и н Б. И. О ползучести полимерных материалов при периодически изменяющихся нагрузках. Механика полимеров, 1966, № 3.
41. Б а р е н б л а т т Г. И., К о з ы р е в Ю. И., М а л и н и н Н. И., П а в л о в Д. Я., Ш е с т е р и к о в С. А. О виброползучести полимерных материалов. ПМТФ, 1965, № 5.
42. У р ж у м ц е в Ю. С., М а к с и м о в Р. Д. Виброползучесть полимерных материалов. Механика полимеров, 1968, № 1, 2, 3.
43. S h a r m a M. G., H a a s T. W. Some viscoelastic studies on penton. J. Polymer Sci., 1963, vol. A1, No. 10.
44. К о л т у н о в М. А. Влияние режимов нагружения на механические характеристики, ползучесть и релаксацию стеклопластика. Вестн. Моск. ун-та. Матем., механ., 1965, № 4.
45. S c h w a r z l F., S t a v e r m a n A. J., Time-temperature dependence of linear viscoelastic behavior. J. Appl. Phys., 1952, vol. 23, No. 8.
46. M o r l a n d L. W., L e e E. H. Stress analysis for linear viscoelastic materials with temperature variation. Trans. Soc. Rheol., 1960, vol. 4, pp. 233—263.
47. S t e r n b e r g E., G u r t i n M. E. Uniqueness in the theory of thermo-rheologically simple ablating viscoelastic solids. In: Progr. Appl. Mech. N. Y., Macmillan Co., Collier — Macmillan Ltd., 1963.
48. И л ь ю ш и н А. А., О г и б а л о в П. М. Некоторые основные вопросы механики полимеров. Механика полимеров, 1965, № 3.
49. H u a n g N. C., L e e E. H., R o g e r s T. G. On the influence of viscoelastic compressibility in stress analysis. Div. Engng. Mech., Stanford Univ., 1963, Techn. Rep. No. 140.

50. Sharma M. G., McCarty V. Experimental investigations on the dynamic compressibilities of polymeric materials. In: High Speed Testing. vol. 5, New York — London — Sydney, Interscience, 1965.
51. Theocaris P. S. Creep and relaxation contraction ratio of linear viscoelastic materials. *J. Mech. Phys. Solids.*, 1964, vol. 12, No. 3.
52. Бронский А. П. Деформация несовершенно упругих тел. Уч. зап. Моск. гор. пед. ин-та, 1956, т. 49.
53. Баев Л. В., Малинин Н. И. Исследование ползучести органического стекла (полиметилметакрилата) при совместном действии растяжения с кручением. *Механика полимеров*, 1966, № 5.
54. Вилкс У. К., Крегерс А. Ф. Простое нагружение нелинейно ползучего полимерного материала. *Механика полимеров*, 1967, № 2.
55. Вилкс У. К., Крегерс А. Ф. Сложное нагружение нелинейно ползучего полимерного материала. *Механика полимеров*, 1967, № 3.
56. Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М., «Мир», 1965.
57. Pipkin A. C. Small finite deformations of viscoelastic solids. *Rev. Mod. Phys.*, 1964, vol. 36, No. 4.
58. Herrmann L. R. On a general theory of viscoelasticity. *J. Franklin Inst.*, 1965, vol. 280, No. 3.
59. Gurtin M. E., Sternberg E. On the linear theory of viscoelasticity. *Arch. Ration. Mech. and Analysis*, 1962, vol. 11, No. 4.
60. Бленд Д. Теория линейной вязко-упругости. М., «Мир», 1965.
61. Humphreys J. S., Martin C. J. Determination of transient thermal stresses in a slab with temperature — dependent viscoelastic properties. *Trans. Soc. Rheol.* 1963, vol. 7, pp. 155—170.
62. Cost L. Approximate Laplace transform inversions in viscoelastic stress analysis. *AIAA Journal*, 1964, vol. 2, No. 12.
63. Morland L. W. A plane problem of rolling contact in linear viscoelasticity theory. *Trans. ASME, Ser. E., J. Appl. Mech.*, 1962, vol. 29, No. 2.
64. Shinozuka M. Stresses in a linear incompressible viscoelastic cylinder with moving inner boundary. *Trans. ASME, Ser. E., J. Appl. Mech.*, 1963, vol. 30, No. 3.
65. Бадран Ф. М. Ф. Большие деформации термореологически простых тел. *Механика полимеров*, 1967, № 3.
66. Ван Фо Фы Г. А. К теории анизотропной ползучести стеклоленты. *Механика полимеров*, 1965, № 2.
67. Ван Фо Фы Г. А. Основные соотношения теории ориентированных стеклопластиков с полыми волокнами. *Механика полимеров*, 1966, № 5.
68. Болотин В. В. Основные уравнения теории армированных сред. *Механика полимеров*, 1965, № 2.
69. Терегулов И. Г., Муртазин Р. З. Квазистатический изгиб и устойчивость оболочек при ползучести (теория наследственности). В сб.: «Исследования по теории пластин и оболочек». Сб. 2, Казань. Изд-во Казанск. ун-та, 1964.
70. Терегулов И. Г. Расчет пластинок из ориентированного стеклопластика. Тр. 6 Всес. конф. по теории оболочек и пластин, Баку, 1966, М., «Наука», 1966.
71. Коминар В. А., Малинин Н. И. Об устойчивости прямоугольной пластинки из ортотропного стеклопластика с учетом ползучести. *Вестн. Моск. ун-та., Матем., механ.*, 1968, № 1.
72. Huang N. C., Lee E. H. Nonlinear viscoelasticity for short time ranges. *Trans. ASME, Ser. E. J. Appl. Mech.*, 1966, vol. 33, No. 2.
73. Ильюшин А. А., Огибалов П. М. Квазилинейная теория вязко-упругости и метод малого параметра. *Механика полимеров*, 1966, № 2.
74. Москвитин В. В. Об одной простейшей возможности учета нелинейности в вязко-упругих средах. *Механика полимеров*, 1967, № 2.
75. Победра Б. Е. Об уравнениях состояния в нелинейной теории вязко-упругости. *Механика полимеров*, 1967, № 3.
76. Победра Б. Е. О связи между напряжениями и деформациями в нелинейной вязкой упругости. Докл. АН СССР, 1967. т. 173, № 1.
77. Баренблатт Г. И. Об эффектах малых вибраций при деформировании полимеров. *ПММ*, 1966, т. 30, вып. 1.