

ЗАЖИГАНИЕ В ГОРЯЧЕМ КАНАЛЕ

С. М. Шишкаев, А. К. Леонтьев

(Ленинград)

Решение внутренней нестационарной задачи теплообмена нагретой поверхности с охладителем, способным к экзотермической химической реакции, сводится к нахождению основных характеристик зажигания по известным теплофизическим и кинетическим параметрами гетерогенной системы.

Предположим, что инициирование зажигания в горячем канале лимитирует тепловая стадия, т. е. стадия прогрева сопряженной системы горячая поверхность — конденсированное вещество, а скорость процесса зажигания определяется кинетикой поверхностной (или каталитической) химической реакции нулевого порядка. Сформулируем задачу зажигания в полости канала, с нагретыми стенками которого экзотермически разлагающийся охладитель приводится в идеальный тепловой контакт в начальный момент времени.

При этом считаем, что в процессе зажигания тепло от горячей поверхности в зажигаемое вещество (охладитель) отводится только за счет механизма теплопроводности и, таким образом, для химически инертного вещества закон теплообмена на поверхности контакта с нагретым телом можно было бы представить в форме граничного условия 4-го рода.

Для экзотермически разлагающегося охладителя имеет место скачок теплового потока, равный величине поверхностного химического тепловыделения в результате реакции разложения.

Зажигание в обогреваемом канале с плоскопараллельными границами

С учетом сделанных замечаний выпишем систему уравнений. Граничные и начальные условия:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Theta_1}{\partial \tau} &= \alpha_1 \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial \xi^2} + \sigma(\tau), \quad 0 \leq \xi \leq 1 \\ \frac{\partial \Theta_2}{\partial \tau} &= \alpha_2 \frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial \xi^2}, \quad 1 \leq \xi \leq 1 + \beta \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

$$\tau = 0, \quad \Theta_1 = f_1(\xi), \quad \Theta_2 = f_2(\xi) — \quad (2)$$

начальное распределение температуры в сопряженной системе,

$$\xi = 0, \quad \frac{\partial \Theta_1}{\partial \xi} = 0 — \quad (3)$$

условие отсутствия теплотерь с внешней границы зажигающей поверхности,

$$\xi = 1, \quad \Theta_1 = \Theta_2, \quad \frac{\partial \Theta_1}{\partial \xi} - \mu \frac{\partial \Theta_2}{\partial \xi} = Z_s \exp \left[-\frac{1}{\Theta_s(\tau)} \right] — \quad (4)$$

условие на зажигающей поверхности,

$$\xi = 1 + \beta, \quad \frac{\partial \Theta_2}{\partial \xi} = 0 — \quad (5)$$

из условия симметрии рассматриваемой задачи.

Безразмерные переменные:

$$\xi = \frac{x}{b}, \quad \Theta = \frac{RT}{E_s}, \quad \tau = \frac{t \cdot q_{V_0} \cdot R}{E_s \cdot (cp)_1}. \quad (6)$$

Безразмерные комплексы:

$$\alpha_1 = \frac{a_1 \cdot E_s \cdot (cp)_1}{R \cdot b^2 \cdot q_{V_0}}, \quad \alpha_2 = \frac{a_2 E_s \cdot (cp)_1}{R \cdot b^2 \cdot q_{V_0}},$$

$$Z_s = \frac{Q \cdot k_s \cdot R \cdot b}{\lambda_1 \cdot E_s}, \quad \mu = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \quad \beta = \frac{r^*}{b}, \quad \sigma(\tau) = \frac{q_V}{q_{V_0}}. \quad (7)$$

Здесь b — толщина стенки канала, r^* — половина толщины слоя зажигаемого вещества, x — координата, перпендикулярная слою вещества (плоская задача); t — время; T — температура; E — энергия активации; k — предэкспонент; Q — тепловой эффект химической реакции; q_V — объемное тепловыделение в стенке канала от внешнего (нехимического) источника тепла; R — универсальная газовая постоянная; c — теплоемкость; ρ — плотность; λ — коэффициент теплопроводности; a — коэффициент температуропроводности. Индекс 1 относится к горячей поверхности, 2 — к зажигаемому веществу, s — к условиям на поверхности, 0 — к начальным условиям.

Функцию тепловыделения от внешнего нехимического источника зададим следующим образом:

$$\sigma(\tau) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \tau < \tau_0 \\ 0, & \tau_0 \leq \tau \end{cases}. \quad (8)$$

Условие (8) показывает, что по истечении времени τ_0 действие внешнего источника тепла прекращается. Задача (1) — (5) нелинейна, так как температура на границе раздела двух сред, входящая в граничное условие (4), в общем случае является неизвестной функцией времени.

Предположим, что функция $\Theta_s(\tau)$ известна. Введя обозначение

$$Z_s \cdot \exp \left[-\frac{1}{\Theta_s(\tau)} \right] = \varphi(\tau), \quad (9)$$

будем считать, что правая часть условия (9) является известной функцией времени. В этом случае задача зажигания (1) — (5) квазилинейна и для ее решения можно применить метод конечных интегральных преобразований, разработанный в [1—3]. Общее решение ищем в виде ряда по собственным функциям соответствующей однородной задачи:

$$\Theta(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\xi) \cdot \Phi_n(\tau). \quad (10)$$

Задача Штурма — Лиувилля для нахождения собственных значений и собственных функций X_n однородной задачи имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 \cdot X_1'' + \nu X_1 &= 0, & 0 \leq \xi \leq 1 \\ \alpha_2 \cdot X_2'' + \nu X_2 &= 0, & 1 \leq \xi \leq 1 + \beta \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} \xi = 0, & \quad X_1' = 0, \\ \xi = 1, & \quad X_1 = X_2, \quad X_1' - \mu X_2' = 0, \\ \xi = 1 + \beta, & \quad X_2' = 0. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Решив задачу Штурма — Лиувилля (11), (12), найдем собственные числа

$$\nu = \nu_n = \gamma_n^2 \cdot \alpha_1, \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

и собственные функции однородной задачи

$$X_{n_{1,2}} = \begin{cases} \cos\left(\gamma_n \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \cdot \beta\right) \cdot \cos(\gamma_n \xi), & 0 \leq \xi \leq 1 \\ \cos(\gamma_n) \cdot \cos\left[\gamma_n \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \cdot (1 + \beta - \xi)\right], & 1 \leq \xi \leq 1 + \beta. \end{cases} \quad (13)$$

Значения γ_n являются положительными корнями уравнения (14), полученного из условия нетривиального решения задачи Штурма — Лиувилля:

$$\mu \cdot \sqrt{\alpha_1} \cdot \operatorname{tg}\left(\gamma_n \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \cdot \beta\right) + \sqrt{\alpha_2} \cdot \operatorname{tg}(\gamma_n) = 0, \quad (14)$$

$\nu=0$ является несобственным значением. Можно показать, что собственные функции X_n ортогональны в интервале $[0, (1+\beta)]$ с весом P , причем

$$P_{1,2} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha_1}, & 0 \leq \xi \leq 1 \\ \frac{\mu}{\alpha_2}, & 1 \leq \xi \leq 1 + \beta. \end{cases} \quad (15)$$

Для получения решения задачи (1) — (5) необходимо найти функцию $\Phi_n(\tau)$ в выражении для общего решения (10). Умножим левую и правую части (10) на $P \cdot X_n$ и проинтегрируем по интервалу $[0, (1+\beta)]$. Воспользовавшись ортогональностью собственных функций, получим

$$\Phi_n(\tau) = \frac{u_{n_1} + u_{n_2}}{N_1 + N_2}. \quad (16)$$

В (16) обозначено:

$$u_{n_1} = \int_0^1 \Theta_1 \cdot P_1 \cdot X_{n_1} \cdot d\xi, \quad u_{n_2} = \int_1^{1+\beta} \Theta_2 \cdot P_2 \cdot X_{n_2} \cdot d\xi. \quad (17)$$

$$N_1 = \int_0^1 P_1 \cdot X_{n_1}^2 \cdot d\xi, \quad N_2 = \int_1^{1+\beta} P_2 \cdot X_{n_2}^2 \cdot d\xi. \quad (18)$$

Таким образом, нахождение $\Phi_n(\tau)$ сводится к определению функций u_{n_1} и u_{n_2} .

Преобразуем исходную систему дифференциальных уравнений (1) в уравнения для u_{n_1} и u_{n_2} , а начальные условия (2) в дополнительные условия для u_{n_1} и u_{n_2} . Умножим (1) и (2) на $P \cdot X_n$ и проинтегрируем по интервалу $[0, (1+\beta)]$. После преобразований получим:

$$u'_{n_1} + \nu_n u_{n_1} = F_1(\tau), \quad (19)$$

$$u'_{n_2} + \nu_n u_{n_2} = F_2(\tau), \quad (20)$$

$$u_{n_1}|_{\tau=0} = \int_0^1 f_1(\xi) \cdot P_1 \cdot X_{n_1} \cdot d\xi, \quad (21)$$

$$u_{n_2}|_{\tau=0} = \int_1^{1+\beta} f_2(\xi) \cdot P_2 \cdot X_{n_2} \cdot d\xi. \quad (22)$$

В (19) и (20) обозначено:

$$F_1(\tau) = \cos(\gamma_n) \cdot \cos\left(\gamma_n \cdot \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \cdot \beta\right) \cdot \frac{\partial \Theta_1}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1} + \gamma_n \sin(\gamma_n) \cdot \cos \times \\ \times \left(\gamma_n \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \cdot \beta\right) \cdot \Theta_1 \Big|_{\xi=1} + \frac{\sigma(\tau)}{\alpha_1 \gamma_n} \cdot \sin(\gamma_n) \cdot \cos\left(\gamma_n \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \cdot \beta\right), \quad (23)$$

$$F_2(\tau) = \mu \cdot \gamma_n \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \cdot \cos(\gamma_n) \cdot \sin\left(\gamma_n \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \cdot \beta\right) \cdot \theta_2|_{\xi=1} - \\ - \mu \cos(\gamma_n) \cdot \cos\left(\gamma_n \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \cdot \beta\right) \frac{\partial \theta_2}{\partial \xi}|_{\xi=1}. \quad (24)$$

Чтобы не ограничивать общность результата, не будем конкретизировать вид функций $f_1(\xi)$ и $f_2(\xi)$ в условиях (21) и (22). Отметим, что эти функции определяют начальное распределение температуры в стенке канала и в охладителе, зависящее от предшествующего зажиганию режима теплоотдачи в горячем канале. Решая дифференциальные уравнения (19), (20) при начальных условиях (21), (22), найдем:

$$u_{n1} = \left[\int_0^\tau F_1(\psi) \cdot \exp(\gamma_n \psi) \cdot d\psi \right] \cdot \exp(-\gamma_n \tau) + u_{n1}|_{\tau=0} \cdot \exp(-\gamma_n \tau), \quad (25)$$

$$u_{n2} = \left[\int_0^\tau F_2(\psi) \cdot \exp(\gamma_n \psi) \cdot d\psi \right] \cdot \exp(-\gamma_n \tau) + u_{n2}|_{\tau=0} \cdot \exp(-\gamma_n \tau). \quad (26)$$

Вычислив нормы N_1 и N_2 , согласно (18), найдем

$$N_1 + N_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\alpha_1} \cdot \cos^2\left(\gamma_n \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \cdot \beta\right) + \frac{\mu \cdot \beta}{\alpha_2} \cdot \cos^2(\gamma_n) \right]. \quad (27)$$

С учетом (25) — (27) получим

$$\Phi_n(\tau) = \frac{\exp(-\gamma_n \tau) \left\{ \int_0^\tau \exp(\gamma_n \psi) [F_1(\psi) + F_2(\psi)] d\psi + [u_{n1}|_{\tau=0} + u_{n2}|_{\tau=0}] \right\}}{\frac{1}{2} \left[\frac{1}{\alpha_1} \cdot \cos^2\left(\gamma_n \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \cdot \beta\right) + \frac{\mu \cdot \beta}{\alpha_2} \cdot \cos^2(\gamma_n) \right]}. \quad (28)$$

Вычислим сумму $F_1 + F_2$ в (28), учтя при этом граничное условие (4) и соотношения (9), (14):

$$F_1 + F_2 = \varphi(\tau) \cdot \cos(\gamma_n) \cdot \cos\left(\gamma_n \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \cdot \beta\right) + \frac{\sigma(\tau)}{\alpha_1 \gamma_n} \cdot \sin(\gamma_n) \cdot \cos\left(\gamma_n \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \cdot \beta\right). \quad (29)$$

Согласно (10), запишем общее решение задачи зажигания в горячем канале с плоскопараллельными границами:

$$\Theta(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-\gamma_n^2 d_1 \tau) \cdot \left\{ Z_s \cdot \cos(\gamma_n) \cdot \cos\left(\gamma_n \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \cdot \beta\right) \cdot \int_0^\tau \exp\left[\gamma_n^2 d_1 \psi - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{\Theta_s(\psi)}\right] \cdot d\psi + \frac{1}{\alpha_1^2 \gamma_n^3} \cdot \sin(\gamma_n) \cdot \cos\left(\gamma_n \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \cdot \beta\right) \cdot [\exp(\gamma_n^2 \alpha_1 \tau_0) - 1] + u_0 \right\}}{\frac{1}{2} \left[\frac{1}{\alpha_1} \cdot \cos^2\left(\gamma_n \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \cdot \beta\right) + \right. \\ \left. + \frac{\mu \cdot \beta}{\alpha_2} \cdot \cos^2 \gamma_n \right]} \cdot X_n(\xi). \quad (30)$$

В уравнении (30)

$$u_0 = u_{n1}|_{\tau=0} + u_{n2}|_{\tau=0}. \quad (31)$$

Значения $u_{n1}|_{\tau=0}$ и $u_{n2}|_{\tau=0}$ определены соотношениями (21), (22) соответственно; $X_n(\xi)$ определены в (13) для соответствующего интервала изменения переменной ξ . Положив в (30) $\xi=1$, найдем нестациона-

нарную температуру зажигающей поверхности:

$$\Theta_s(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-\gamma_n^2 \alpha_1 \tau) \left\{ Z_s \cdot \cos(\gamma_n) \cdot \cos\left(\gamma_n \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \beta\right) \cdot \int_0^{\tau} \exp\left[\gamma_n^2 \alpha_1 \psi - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\alpha_1} \cdot \cos^2\left(\gamma_n \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \beta\right) + \right. \right. \right.}{\frac{1}{2} \left[\frac{1}{\alpha_1} \cdot \cos^2\left(\gamma_n \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \beta\right) + \right.} \rightarrow$$

$$\left. \left. \left. - \frac{1}{\Theta_s(\psi)} \right] d\psi + \frac{1}{\alpha_1^2 \gamma_n^3} \cdot \sin(\gamma_n) \cdot \cos\left(\gamma_n \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \beta\right) \cdot [\exp(\gamma_n^2 \alpha_1 \tau_0) - 1] + \right. \right. \rightarrow$$

$$\left. \left. \left. + \frac{\mu \cdot \beta}{\alpha_2} \cdot \cos^2 \gamma_n \right] \right\} \cdot \cos(\gamma_n) \cdot \cos\left(\gamma_n \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \beta\right) \cdot \left. \right. \rightarrow \quad (32)$$

Зажигание в круглом канале

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \Theta_1}{\partial \tau} &= \alpha_1 \left[\frac{1}{\xi} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \xi \cdot \frac{\partial \Theta_1}{\partial \xi} \right] + \sigma(\tau), \quad \beta \leq \xi \leq 1 \\ \frac{\partial \Theta_2}{\partial \tau} &= \alpha_2 \left[\frac{1}{\xi} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \xi \cdot \frac{\partial \Theta_2}{\partial \xi} \right], \quad 0 \leq \xi \leq \beta \end{aligned} \right\}, \quad (33)$$

$$\tau=0, \quad \Theta_1=f_1(\xi), \quad \Theta_2=f_2(\xi), \quad (34)$$

$$\xi=\beta, \quad \Theta_1=\Theta_2.$$

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial \xi} - \mu \cdot \frac{\partial \Theta_2}{\partial \xi} = Z_s \cdot \exp\left[-\frac{1}{\Theta_s(\tau)}\right]. \quad (35)$$

$$\xi=1, \quad \frac{\partial \Theta_1}{\partial \xi} = 0. \quad (36)$$

$$\xi=0, \quad \Theta - \text{ограничена}. \quad (37)$$

Безразмерные переменные: $\xi = \frac{r}{r_1}$, $\Theta = \frac{RT}{E_s}$, $\tau = \frac{t \cdot q_{V_0} \cdot R}{E_s \cdot (c \cdot \rho)_1}$,

Безразмерные комплексы:

$$\alpha_1 = \frac{a_1 \cdot E_s \cdot (c\rho)_1}{R \cdot r_1^2 \cdot q_{V_0}}, \quad \alpha_2 = \frac{a_2 \cdot E_s \cdot (c\rho)_1}{R \cdot r_1^2 \cdot q_{V_0}}, \quad Z_s = \frac{Q \cdot k_s \cdot R \cdot r_1}{\lambda_1 \cdot E_s},$$

$$\mu = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \quad \beta = \frac{r_2}{r_1}, \quad \sigma(\tau) = \frac{q_V}{q_{V_0}}.$$

Здесь r_1 — наружный радиус, r_2 — внутренний радиус. В остальных обозначениях индекс 1 относится к горячему каналу, а индекс 2 — к зажигаемому веществу.

Метод решения задачи поверхностного зажигания в канале круглого сечения аналогичен использованному ранее для решения задачи зажигания в плоском канале. Опуская промежуточные выкладки, запишем сразу общее решение задачи (33) — (37).

$$\Theta(\xi, \tau) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp\left(\frac{\gamma_n^2 \alpha_1}{\beta^2} \cdot \tau\right) \left\{ Z_s \cdot \beta \cdot I_0\left(\gamma_n \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\right) \cdot I_0(\gamma_n) \cdot \int_0^{\tau} \exp\left[\frac{\gamma_n^2 \alpha_1}{\beta^2} \psi - \right. \right.}{N_1 + N_2} \rightarrow$$

$$\left. \left. \left. - \frac{1}{\Theta_s(\psi)} \right] d\psi + \frac{\beta^4}{\gamma_n^3 \alpha_1^2} \cdot I_0\left(\gamma_n \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\right) \cdot I_1(\gamma_n) \cdot \left[\exp\left(\frac{\gamma_n^2 \alpha_1}{\beta^2} \cdot \tau_0\right) - 1 \right] - u_0 \right\}}{N_1 + N_2} \cdot R_n(\xi). \quad (38)$$

Здесь I_0 и I_1 — функции Бесселя 1-го рода нулевого и первого порядка соответствующего аргумента.

Собственные значения γ_n и собственные функции $R_n(\xi)$ однородной задачи даются формулами:

$$\nu = \gamma_n = \frac{\gamma_n^2 \cdot \alpha_1}{\beta^2}, \quad n = 1, 2, 3 \dots, \quad (39)$$

$$R_{n_{1,2}}(\xi) = \begin{cases} I_0\left(\gamma_n \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\right) \cdot I_0\left(\gamma_n \frac{\xi}{\beta}\right), & \beta \leq \xi \leq 1 \\ I_0(\gamma_n) \cdot I_0\left(\gamma_n \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \cdot \frac{\xi}{\beta}\right), & 0 \leq \xi \leq \beta. \end{cases} \quad (40)$$

Значения γ_n есть положительные корни уравнения для функций Бесселя

$$\mu \cdot \sqrt{\alpha_1} \cdot I_0(\gamma_n) \cdot I_1\left(\gamma_n \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\right) \sqrt{\alpha_2} \cdot I_1(\gamma_n) \cdot I_0\left(\gamma_n \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\right) = 0,$$

$\nu=0$ является несобственным значением. Собственные функции $R_n(\xi)$ ортогональны в интервале $[0, 1]$ с весом P , причем

$$P_{1,2} = \begin{cases} \frac{\xi}{\alpha_1}, & \beta \leq \xi \leq 1 \\ \frac{\xi \cdot \mu}{\alpha_2}, & 0 \leq \xi \leq \beta. \end{cases}$$

Остальные обозначения:

$$u_0 = u_{n_1}|_{\tau=0} + u_{n_2}|_{\tau=0},$$

$$u_{n_1}|_{\tau=0} = \int_{\beta}^1 f_1(\xi) \cdot \frac{\xi}{\alpha_1} \cdot R_{n_1}(\xi) \cdot d\xi,$$

$$u_{n_2}|_{\tau=0} = \int_0^{\beta} f_2(\xi) \cdot \frac{\xi \cdot \mu}{\alpha_2} \cdot R_{n_2}(\xi) \cdot d\xi,$$

$$N_1 = \frac{1}{2\alpha_1} \cdot I_0^2\left(\gamma_n \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\right) \cdot \left\{ \left[I_0^2\left(\frac{\gamma_n}{\beta}\right) \right] - \beta^2 \cdot [I_1^2(\gamma_n) + I_0^2(\gamma_n)] \right\},$$

$$N_2 = \frac{\mu}{2\alpha_2} \cdot I_0^2(\gamma_n) \cdot \beta^2 \left[I_1^2\left(\gamma_n \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\right) + I_0^2\left(\gamma_n \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\right) \right].$$

Значение безразмерной температуры на границе раздела сред определяется соотношением:

$$\begin{aligned} \Theta_s(\tau) = & - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp\left(-\frac{\gamma_n^2 \cdot \alpha_1}{\beta^2} \cdot \tau\right) \left\{ Z_s \cdot \beta \cdot I_0\left(\gamma_n \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\right) \cdot I_0(\gamma_n) \cdot \int_0^{\tau} \exp\left[\frac{\gamma_n^2 \cdot \alpha_1}{\beta^2} \cdot \psi - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{\Theta_s(\psi)}\right] d\psi + \frac{\beta^4}{\gamma_n^3 \cdot \alpha_1^2} \cdot I_0\left(\gamma_n \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\right) \cdot I_1(\gamma_n) \cdot \left[\exp\left(\frac{\gamma_n^2 \cdot \alpha_1}{\beta^2} \cdot \tau_0\right) - 1 \right] - u_0 \right\}}{N_1 + N_2} \rightarrow \\ & \times I_0(\gamma_n) \cdot I_0\left(\gamma_n \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\right). \end{aligned} \quad (41)$$

Если известна, например, из эксперимента функция $\Theta_s(\tau)$, полученные зависимости (30) или (38) дают точное решение сопряженной нелинейной задачи зажигания в горячем канале.

В общем случае, когда $\Theta_s(\tau)$ неизвестна, указанные соотношения представляют собой интегральные уравнения для нахождения нестационарного

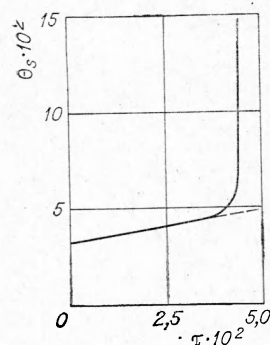


Рис. 1. Зависимость температуры зажигающей поверхности теплообменного канала от времени, представленная в безразмерных величинах ($\alpha_1=338$; $\alpha_2=13$); $Z_s=1,2 \cdot 10^7$; $\mu=3,4 \cdot 10^{-2}$; $\beta=1,6$; $\sigma=1$).

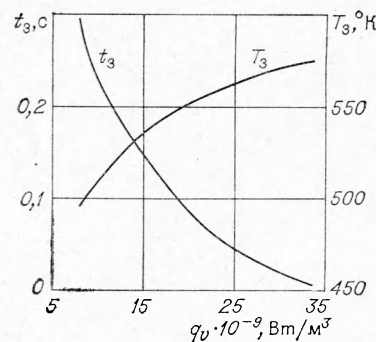


Рис. 2. Влияние мощности внешнего теплового источника на характеристики зажигания в горячем канале.

нарной температуры в любой точке сопряженной системы в процессе инициирования зажигания.

Исключая из числителя соотношений (30), (38) слагаемые, учитывающие тепловыделение от поверхностной химической реакции, можно получить точное решение задачи нагрева химически инертного охладителя в канале с плоскопараллельными границами и в канале круглого сечения соответственно.

Для расчета основных характеристик зажигания в горячем канале (t_3 , T_3) используются соотношения (32) или (41), так как в рассматриваемом случае зажигания определяющей характеристикой процесса является зависимость от времени температуры на поверхности контакта зажигаемого вещества с зажигающей поверхностью.

Некоторые результаты численного расчета для зажигания в обогреваемом канале с плоскопараллельными границами, полученные с применением ЭВМ, приведены на рис. 1 и 2 для непрерывно действующего внешнего теплового источника. Зажигание определяется с помощью зависимости $\Theta_s(\tau)$ как момент времени, соответствующий резкому возрастанию температуры поверхности до очень больших значений, превышающих, например, температуру плавления металла, из которого изготовлен охлаждаемый теплообменный канал.

Полученный для поверхностного зажигания в горячем канале характер зависимости основных характеристик зажигания от интенсивности действия внешнего теплового источника качественно соответствует зависимостям, приведенным в работе [4] для гомогенного зажигания в слое вещества: с увеличением интенсивности действия внешнего теплового источника время задержки зажигания уменьшается, а температура растет.

Как показали вычисления, полученный в решении (32) ряд быстро сходится и в расчетах, не требующих особой точности, и можно ограничиться двумя первыми членами разложения, отбросив члены ряда при $n \geq 3$. Корни γ_n характеристического уравнения (14) достаточно точно и просто можно найти графическим решением уравнения.

В числовом расчете, проведенном методом последовательных приближений, найдено также, что уже второе приближение хорошо отражает картину самоускорения химической реакции. За нулевое приближение при этом принято решение задачи нагрева химически инертного вещества в горячем канале, которое следует из общего решения после исключения слагаемого, учитывающего тепловыделение от химической реакции.

Таким образом, быстрая сходимость ряда в интегральном уравнении и значений задержки зажигания t_z , вычисленных методом последовательных приближений, не только упрощает машинный расчет, но также позволяет найти приближенные значения характеристик зажигания из полученных интегральных уравнений, вообще говоря, без использования электронно-вычислительной техники.

Во всяком случае вычисление основных характеристик зажигания с помощью интегрального уравнения (32) или (41) требует значительно меньших затрат машинного времени, чем числовое решение той же задачи (1)—(5) или (33)—(37) в дифференциальной постановке.

Поступила в редакцию
27/II 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. А. Гринберг. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. М., Изд-во АН СССР, 1948.
2. Г. А. Гринберг. В сборнике, посвященном 70-летию академика А. Ф. Иоффе. М., Изд-во АН СССР, 1950.
3. Г. А. Гринберг, Н. Н. Лебедев и др. ЖТФ, 1950, XX, 12.
4. А. Г. Мержанов, А. Э. Аверсон. Современное состояние тепловой теории зажигания. Препринт. М., Изд-во ФИХФ АН СССР, 1970.

УДК 536.46

О СФЕРИЧЕСКОМ РАСПРОСТРАНЕНИИ ПРОЦЕССА ГОРЕНИЯ В ТОПЛИВНО-КИСЛОРОДНЫХ СМЕСЯХ ПРИ ВЫСОКИХ НАЧАЛЬНЫХ ДАВЛЕНИЯХ И ТЕМПЕРАТУРАХ

А. Л. Подгребенков, С. М. Когарко
(Москва)

Исследование газодинамики процесса горения энергетически богатых систем при высоких начальных давлениях и температурах представляет определенный научный и практический интерес, причем случай распространения расходящегося (сферического, полусферического) фронта горения наиболее интересен как с научной точки зрения, так и с практической стороны.

Переход сферического пламени в детонацию в топливно-кислородных смесях при высоком начальном давлении до 40 атм и температуре $\sim 290^\circ \text{K}$ изучался в работе [1], где было показано, что возникновение детонации в объеме связано с нарушением сферической симметрии при распространении пламени из-за взаимодействия с электродами, препятствиями и стенками. Исследованию процессов самовоспламенения и формирования детонационной волны в трубе в нагретых за отраженной ударной волной топливно-кислородных смесях в диапазоне $600\text{—}1400^\circ \text{K}$ и давлении отражения, не превышающем 3 атм, посвящены работы [2—4]. Было установлено, что при давлении 3 атм в смеси $\text{H}_2 + \text{O}_2$ после задержки воспламенения реакция инициировалась в пристеночном слое во многих точках, очаги воспламенения образовывали единый фронт горения без резко выраженного взрывного самовоспламенения. В отно-