УДК 537.311.5

РАСЧЕТ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ И ТОКОВ В АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ СИСТЕМАХ ИНДУКТИВНО СВЯЗАННЫХ ПОДВИЖНЫХ ПРОВОДНИКОВ

С. В. Станкевич

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: stan@hydro.nsc.ru

С использованием гибридного метода, объединяющего методы конечных и граничных элементов, разработан алгоритм расчета магнитных полей и токов в аксиально-симметричных системах индуктивно связанных подвижных и неподвижных проводников. Метод конечных элементов используется при аппроксимации нестационарного уравнения диффузии для θ-компоненты магнитного вектор-потенциала в проводниках, метод граничных элементов — для исключения окружающего проводники пространства. Предложенный метод позволяет учитывать соединения проводников между собой или с внешними источниками энергии с помощью идеальных электрических цепей с сосредоточенными параметрами R, L, C. Разработан эффективный метод учета внешних цепей посредством соответствующей модификации матрицы масс и вектора источников полученной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрены случаи применения метода для расчетов полей одновитковых и многовитковых соленоидов, концентраторов магнитного потока, индукционных ускорителей с различными вариантами подвода внешней электромагнитной энергии. Показана высокая вычислительная эффективность метода, в частности для случая, когда электротермические свойства проводников и их размеры постоянны.

Ключевые слова: магнитное поле, индуктор, ускоряемое тело.

Введение. Во многих важных с практической точки зрения случаях, связанных с ускорением твердых тел до высоких скоростей, получением сильных магнитных полей и т. д., для нахождения параметров силового воздействия на проводники и их тепловой нагрузки требуется детальный расчет распределений магнитных полей и токов в объеме проводников с учетом динамики подвода энергии в систему, определяемой внешним источником энергии и параметрами подводящих энергию цепей.

Исследуемая электрофизическая установка должна описываться в рамках модели с распределенными параметрами, в то время как для упрощения анализа внешние цепи можно рассматривать в качестве цепей с сосредоточенными параметрами. При этом возникает две проблемы: необходимость учета конечного размера установки и соответственно определения полей в бесконечном пространстве, окружающем исследуемую систему проводников; необходимость согласования токов в двух подсистемах: пространственно распределенных токов в установке и полных токов во внешних электрических цепях. Затруднения возникают также при относительном движении проводников, например в индукционных электромагнитных ускорителях твердых тел или в случае деформации проводников под действием электромагнитных сил в установках, предназначенных для получения сверхсильных магнитных полей при их интенсивной тепловой и силовой нагрузке.

При расчете магнитных полей в непроводящем окружающем пространстве [1–4] наиболее часто используется метод граничных элементов (ГЭ). Этот метод не требует расчета в явном виде поля вне проводников, поэтому отсутствует необходимость строить и перестраивать (при движении и деформации проводников) сетку в окружающем пространстве, что значительно уменьшает время вычислений. Для расчета полей в проводниках, в частности в задачах со сложной геометрией проводников, хорошо зарекомендовал себя метод конечных элементов (КЭ). Метод, объединяющий эти два метода и получивший название гибридного КЭ/ГЭ-метода, в настоящее время широко используется для решения электромагнитных задач [2–5]. Одной из особенностей численного моделирования электромагнитного поля, создаваемого системой проводников, является необходимость задания электрических напряжений на этих проводниках. Как правило, эти напряжения неизвестны и должны рассчитываться в процессе решения либо на основе заданной зависимости полного тока через проводники, либо на основе анализа работы исследуемой установки с учетом внешних электрических цепей, обеспечивающих подвод к ней энергии. В обоих случаях на каждом временном шаге, как правило, используется дополнительный итерационный цикл, в котором выбираются напряжения на проводниках, обеспечивающие согласование токов в этих проводниках с заданными токами во внешних электрических цепях [2, 3] или с токами и их производными по времени [5].

В данной работе предложен гибридный алгоритм расчета полей в системах подвижных проводников с учетом внешних электрических соединений, не требующий промежуточных итераций.

1. Постановка задачи. Будем полагать, что исследуемая система проводников симметрична относительно некоторой оси z. В таких системах изучение распределений электромагнитных полей и токов удобно проводить в цилиндрической системе координат (r,θ,z). Будем рассматривать системы с азимутальными токами $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{e}_\theta j$, создающими полоидальное магнитное поле с индукцией $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{e}_r B_r + \boldsymbol{e}_z B_z$. Компоненты магнитных полей и токов зависят от пространственных координат r, z и времени t. В предположении, что $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$, вектор магнитного потенциала $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_\theta A_\theta$, а компоненты вектора магнитной индукции определяются соотношениями $B_r = -(1/r)\,\partial\psi/\partial z$, $B_z = -(1/r)\,\partial\psi/\partial r$ ($\psi = rA_\theta$ — функция потока). Используя стандартные предположения, принимаемые при анализе сильноточных импульсных устройств в квазистационарном приближении (т. е. пренебрегая токами смещения и полагая магнитную проницаемость среды $\mu = 1$), из системы уравнений Максвелла для функции потока в проводниках получаем уравнение [2]

$$\frac{\sigma}{r}\,\frac{d\psi}{dt} + j_\theta = \frac{\sigma U_{ext}}{2\pi r}, \tag{1}$$

где $j_\theta = (1/\mu_0)\nabla\,(1/r)\nabla\psi$; U_{ext} — электрическое напряжение, создаваемое внешними источниками на проводниках; σ — электропроводность; μ_0 — магнитная проницаемость вакуума; $\nabla = \boldsymbol{e}_r\,(\partial/\partial r) + \boldsymbol{e}_z\,(\partial/\partial z)$ — двумерный дифференциальный оператор в пространстве (r,z).

Поскольку вне проводников $j_\theta = 0$, вместо (1) имеем

$$\nabla\frac{1}{r}\,\nabla\psi = 0. \tag{2}$$

Будем полагать, что в общем случае рассматриваемая система проводников представлена на плоскости (r,z) областью $\Omega_c = \sum \Omega_k$ с границей Γ_c, состоящей из n_c односвязных подобластей Ω_k $(k = 1, 2, \ldots, n_c)$, имеющих границы Γ_k. Окружающее проводники непроводящее пространство занимает область Ω_0, которая помимо границ с проводниками имеет бесконечно удаленную границу Γ_∞ и границу Γ_0, совпадающую с осью z. На границах проводников должны выполняться условия непрерывности касательной и нормальной составляющих вектора магнитной индукции. На внешней бесконечно удаленной границе выполняются условия $\psi\big|_{\Gamma_\infty} = 0$, $\nabla\psi\big|_{\Gamma_\infty} = 0$, $(\partial\psi/\partial r)\big|_{\Gamma_0} = 0$. На оси симметрии системы (граница Γ_0) $B_r = 0$ и, следовательно, $(\partial\psi/\partial z)\big|_{\Gamma_0} = 0$, кроме того, можно также положить, что $\psi\big|_{\Gamma_0} = 0$. В начальный момент времени токи в проводниках отсутствуют, следовательно, $\psi\big|_{t=0} = 0$. Если зависимости внешних напряжений, приложенных к проводникам, от времени $U_{ext}(t)$ известны, задачу можно считать поставленной. Однако во многих случаях эти напряжения неизвестны и должны рассчитываться в ходе решения задачи с учетом параметров внешних электрических цепей и схемы соединения проводников.

2. Методика численного решения. Разобьем область проводников конечно-элементной сеткой. Аппроксимируем пространственное распределение функции потока и ее производных по времени с помощью функций формы $N_i(r, z)$ $(i = 1, 2, \ldots, n_p)$ и узловых значений соответствующих величин ψ_i, $d\psi_i/dt$:

$$\psi \approx \sum_i N_i \psi_i, \qquad \frac{d\psi}{dt} \approx \sum_i N_i \frac{d\psi_i}{dt}. \tag{3}$$

Для построения решения уравнения (1) в области проводников используем конечно-элементный метод взвешенных невязок Галеркина. В результате получаем систему линейных дифференциальных уравнений, которую запишем в матричной форме:

$$M \frac{d\boldsymbol{\psi}}{dt} + K\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}} U + G \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial n}. \tag{4}$$

Здесь M, K, G, U — матрицы с элементами

$$M_{ij} = \iint\limits_{\Omega_c} \sigma \frac{N_i N_j}{r}\, ds, \quad K_{ij} = \iint\limits_{\Omega_c} \frac{\nabla N_i \cdot \nabla N_j}{\mu r}\, ds, \quad G_{ij} = \sum_{k=1}^{n_c} \int\limits_{\Gamma_c} \frac{N_i N_j}{r}\, dl, \quad U_{ij} = \delta_{ij} U_{k(i)};$$

δ_{ij} — символ Кронекера; $\boldsymbol{Y}$ — вектор с компонентами $Y_i = \displaystyle\iint\limits_{\Omega} \sigma \frac{N_i}{2\pi r}\, ds$; $\boldsymbol{\psi}$ — вектор узловых значений функции потока. В правой части уравнения (4) содержатся неизвестные узловые значения нормальных производных функции потока $\partial\psi/\partial n$, которые должны определяться из условий непрерывности этих производных на границе проводников при согласовании решений уравнений (1), (2) для проводников и окружающего их непроводящего пространства.

Применяя метод взвешенных невязок к уравнению (2) с весовой функцией, являющейся фундаментальным решением (2), и используя формулу Грина, получаем интегральное уравнение [1]

$$\frac{\beta_i}{2\pi} \psi_i + \sum_{k=1}^{n_c} \oint\limits_{\Gamma_k} \frac{1}{r} \Big(\psi \frac{\partial \psi_i^*}{\partial n} - \psi_i^* \frac{\partial \psi}{\partial n} \Big)\, d\Gamma = 0 \tag{5}$$

(ψ^* — фундаментальное решение). Для рассматриваемого случая [6] имеем

$$\psi_i^* = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{r_i r}{m_i}} \Big(\Big(1 - \frac{m_i}{2}\Big) K(m_i) - E(m_i) \Big),$$

где K, E — полные эллиптические интегралы первого и второго рода; $m_i = 4r_i r/((r_i + r)^2 + (z_i - z)^2)$; коэффициент β_i равен внешнему углу границы в граничном узле r_i, z_i.

Границу $\partial\Omega_c$ разобьем на граничные элементы Γ^b $(b = 1, 2, \ldots, n_b)$ таким образом, чтобы они совпадали с ребрами конечно-элементной сетки. Аналогично (3) интерполируем функцию потока и ее нормальную производную на границах и вычислим (5) в каждом граничном узле. В результате получаем

$$H\boldsymbol{\psi} = Q \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial n}, \tag{6}$$

где H, Q — матрицы с элементами

$$H_{ij} = \frac{\delta_{ij}\beta_i}{2\pi} + \sum_{k=1}^{n_c} \oint\limits_{\Gamma_k} \frac{N_j}{r} \frac{\partial \psi_i^*}{\partial n}\, d\Gamma, \qquad Q_{ij} = \sum_{k=1}^{n_c} \oint\limits_{\Gamma_k} \frac{N_j}{r}\, \psi_i^*\, d\Gamma.$$

Из системы линейных уравнений (6) найдем значения нормальных производных от функции потока в узлах на границах проводников

$$\frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial n}\Big|_{\Gamma_c} = -Q^{-1} H \boldsymbol{\psi}\big|_{\Gamma_c}$$

(знак "минус" обозначает, что направление внешней нормали для проводящих подобластей противоположно направлению нормали на внешних границах непроводящего пространства). Подставляя это выражение в (4), получаем полную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для узловых значений функции потока:

$$M \frac{d\boldsymbol{\psi}}{dt} + (K + K')\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}} U, \qquad K' = G Q^{-1} H. \tag{7}$$

В случае если зависимости внешних напряжений на проводниках от времени $U_k(t)$ ($k = 1, 2, \ldots, n_c$) известны, интегрирование системы уравнений (7) при нулевых начальных условиях позволяет определить значения функции потока в последующие моменты времени.

Получим выражения для расчета полных токов в проводниках. Для k-го проводника имеем

$$I_k = \mu_0^{-1} \oint\limits_{\Gamma_k} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l}$$

($d\boldsymbol{l}$ — вектор, касательный к границе Γ_k). Учитывая, что

$$\boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial n}\, dl,$$

и используя аппроксимацию (3), находим

$$I_k = \mu_0^{-1} \oint\limits_{\Gamma_k} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \sum_{b(\Gamma_k)} \int\limits_{\Gamma^b} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} \approx$$

$$\approx -\mu_0^{-1} \sum_{i(\Gamma_c)} \sum_{b(i)} \int\limits_{\Gamma_b} N_i \frac{1}{\mu_0 r} \frac{\partial \psi}{\partial n}\, dl = \sum_{i(\Gamma_k)} \sum_{j(\Gamma_c)} K'_{ij} \psi_j = \boldsymbol{J}_k^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\psi} \tag{8}$$

$\Big(\boldsymbol{J}_k^{\mathrm{T}} = \sum\limits_{i(\Gamma_k)} K'_{ij}\Big)$ — строчный вектор. Выражение $i(\Gamma_k)$ обозначает множество индексов узлов, принадлежащих границе Γ_k; $b(i)$ — множество индексов граничных элементов, содержащих узел i, и т. д. Заметим, что в k-м проводнике полный ток определяется значениями функции потока в узлах, расположенных на границах всех проводников.

Рассмотрим случай, когда в k-м проводнике зависимость полного тока от времени $I_k(t)$ известна. Для простоты будем полагать, что на остальных проводниках системы внешнее напряжение равно нулю. Подставим в соотношение (1) аппроксимацию функции потока (3) и проинтегрируем его по площади k-го проводника S_k. С учетом

$$\iint\limits_{S_k} \frac{\sigma}{r} \frac{d\psi}{dt}\, ds = \sum_{i(S_k)} \frac{d\psi_i}{dt} \iint\limits_{S_k} \frac{\sigma N_i}{r}\, ds = 2\pi \boldsymbol{Y}_k^{\mathrm{T}} \frac{d\boldsymbol{\psi}}{dt}$$

имеем

$$U_k = 2\pi R_{0k}\Big(\boldsymbol{Y}_k^{\text{т}}\,\frac{d\boldsymbol{\psi}}{dt} + I_k\Big), \tag{9}$$

где R_{0k} — электрическое сопротивление проводника при постоянном токе:

$$R_{0k} = \Big(\iint\limits_{S_c} \frac{\sigma}{2\pi r}\,ds\Big)^{-1}.$$

Подставляя выражение для напряжения (9) в систему уравнений (7), получаем

$$(M - 2\pi R_{0k}\boldsymbol{Y}_k\boldsymbol{Y}_k^{\text{т}})\dot{\boldsymbol{\psi}} + (K + K')\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{Y}_k R_{0k} I_k(t).$$

Поскольку вектор $\boldsymbol{Y}_k$ имеет отличные от нуля компоненты, соответствующие множеству индексов $i(\Omega_k)$ узлов в проводнике, к матрице M добавляется заполненный блок $2\pi R_{0k}\boldsymbol{Y}_k\boldsymbol{Y}_k^{\text{т}}$, ненулевые элементы которого находятся на пересечении строк и столбцов с номерами, принадлежащими множеству индексов $i(\Omega_k)$.

Следует отметить, что данный подход можно использовать и в случае $I_k(t) = 0$, соответствующем незамкнутому проводнику (кольцевой проводник с тонким радиальным разрезом). Такая ситуация возникает при использовании в системе концентраторов магнитного потока и (или) проводящих внешних электрически разомкнутых креплений, удерживающих какой-либо из проводников.

3. Объединение с внешней электротехнической цепью. Соотношения (8), (9) можно использовать для вычисления напряжений на проводниках, соединенных как с внешними электротехническими цепями с сосредоточенными параметрами, так и между собой. Рассмотрим два характерных примера.

3.1. *R-, L-, C-внешняя цепь.* Пусть k-й проводник соединен с конденсаторной батареей емкостью C с помощью передающей линии с сопротивлением R и индуктивностью L, на остальных проводниках внешнее напряжение равно нулю. В этом случае $U_k = U_C - RI_k - L\dot{I}_k$ (U_C — электрическое напряжение на конденсаторе). Подставляя это выражение в (7) и используя соотношения для полного тока в проводнике (8), получаем

$$(M + L\boldsymbol{Y}_k\boldsymbol{J}_k^{\text{т}})\,\frac{d\boldsymbol{\psi}}{dt} + \Big(K + K' + R\boldsymbol{Y}_k\boldsymbol{J}_k^{\text{т}} + L\boldsymbol{Y}_k\,\frac{d\boldsymbol{J}_k^{\text{т}}}{dt}\Big)\boldsymbol{\psi} = U_C\boldsymbol{Y}_k. \tag{10}$$

Для определения напряжения на конденсаторе к системе уравнений (10) необходимо добавить уравнение

$$\dot{U}_C = -\frac{I_k}{C} = -\frac{\boldsymbol{J}_k^{\text{т}}\boldsymbol{\psi}}{C}, \qquad U_C(0) = U_0.$$

Матрица $L\boldsymbol{Y}_k\,d\boldsymbol{J}_k^{\text{т}}/dt$ появляется при любом относительном движении проводников или их деформациях.

3.2. *Последовательное соединение проводников.* Рассмотрим случай последовательного соединения проводников, который может иметь место, например, при расчете полей, создаваемых многовитковым соленоидом. Пусть m проводников соединены последовательно, при этом через каждый проводник протекает одинаковый полный ток $I = I_1 = I_2 = \ldots = I_k = \ldots = I_m$. Пусть к этой группе проводников приложено суммарное внешнее напряжение

$$U_{ext} = \sum_{k=1}^{m} U_k. \tag{11}$$

Заметим, что даже в случае проводников одинаковой геометрии падение напряжения на каждом из них различно. Используя условие равенства токов и соотношения (9), (11), находим напряжения на проводниках:

$$U_k = U_{ext} - \sum_{j\neq k} R_{0j}\Big(\boldsymbol{J}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\psi} + 2\pi\boldsymbol{Y}_j^{\mathrm{T}}\,\frac{d\boldsymbol{\psi}}{dt}\Big). \tag{12}$$

Напряжения, рассчитанные по формуле (12), можно использовать для вычисления матрицы U в соотношениях (7). Если U_{ext} является напряжением, передаваемым к проводникам от конденсаторной батареи, то матрицы M, K необходимо модифицировать согласно методике, описанной в подп. 3.1.

Предложенные методы учета внешних соединений проводников приводят к заполнению матрицы масс в получаемой системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Так, при объединении проводника с внешней цепью с индуктивностью (10) ненулевые элементы появляются на пересечении строк с номерами, принадлежащими множеству $i(\Omega_k)$, и на пересечении столбцов с номерами, принадлежащими множеству индексов узлов, расположенных на границах всех проводников $i(\Gamma_c)$. Учет последовательного соединения проводников приводит к заполнению блока в матрице масс, соответствующего индексам всех узлов в последовательно соединенных проводниках. Матрица M не зависит от времени, если в процессе расчета электропроводность материала постоянна, а проводники неподвижны. В случае движения проводников и (или) учета изменения электропроводности при их нагреве матрица масс зависит от времени. Однако если в исследуемой задаче электропроводность можно считать постоянной, то и для системы движущихся проводников можно проводить эффективную факторизацию матрицы масс, поскольку в рассмотренных случаях зависящую от времени добавку можно представить в качестве матричного произведения столбцевого и строчного векторов.

4. Пример численного моделирования многовиткового индукционного ускорителя металлических пластин. На основе представленного алгоритма создана компьютерная программа и проведено моделирование работы индукционного ускорителя металлического тела в форме диска с плоским многовитковым индуктором. Эта задача аналогична рассмотренной в работе [7], где индуктор моделировался системой кольцевых концентрических бесконечно тонких проводников, по которым протекают одинаковые заданные токи. Магнитное поле рассчитывалось с использованием закона Био — Савара, однако такой подход не позволяет получить информацию о тепловой нагрузке индуктора и об эффективности ускорителя. В данной работе проведено полное моделирование ускорителя с детальным расчетом полей и распределений токов как в ускоряемом теле, так и в индукторе. Полный ток в системе определялся с учетом реальных параметров внешней цепи.

Индуктор моделировался системой концентрических кольцевых медных проводников с сечением 9×5 мм и расстоянием между витками 0,5 мм. Внутренний радиус индуктора 25 мм. Ускоряемое тело из алюминия имело диаметр 68 мм, равный внешнему диаметру индуктора, толщину 5 мм и массу 200 г. Начальное расстояние от ускоряемого диска до индуктора составляло 0,5 мм. Используемая в расчетах конечно-элементная сетка (рис. 1) включала 3400 треугольных элементов, 1800 узлов и 430 граничных элементов. Скорость тела и его перемещение определялись на основе решения уравнений движения

$$M\,\frac{dV}{dt} = 2\pi\iint\limits_{\Omega_d} j_\theta B_r r\,dr\,dz, \qquad \frac{dZ}{dt} = V.$$

Предполагалось, что к индуктору подключена конденсаторная батарея емкостью 1000 мкФ, передающая линия имеет сопротивление 1 мОм и индуктивность 0,1 мкГн.

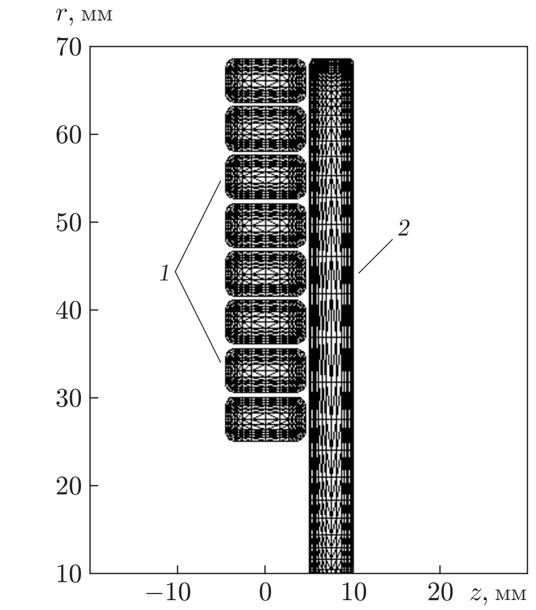

Рис. 1

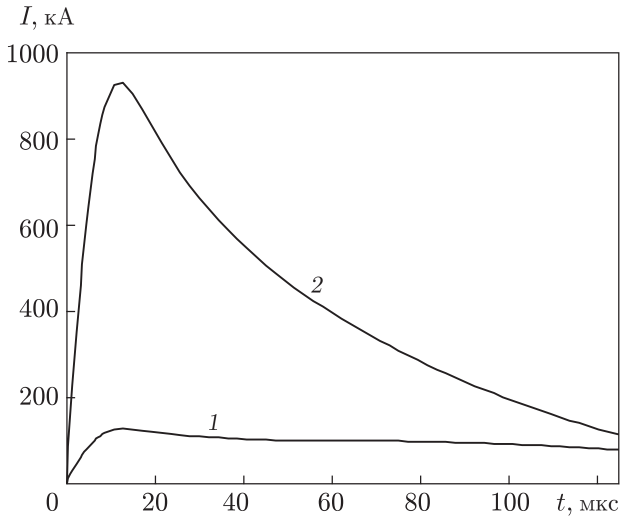

Рис. 2

Рис. 1. Схема расположения конечно-элементной сетки для индуктора (*1*) и ускоряемого тела (*2*)

Рис. 2. Зависимости полных токов в индукторе (*1*) и ускоряемом диске (*2*) от времени

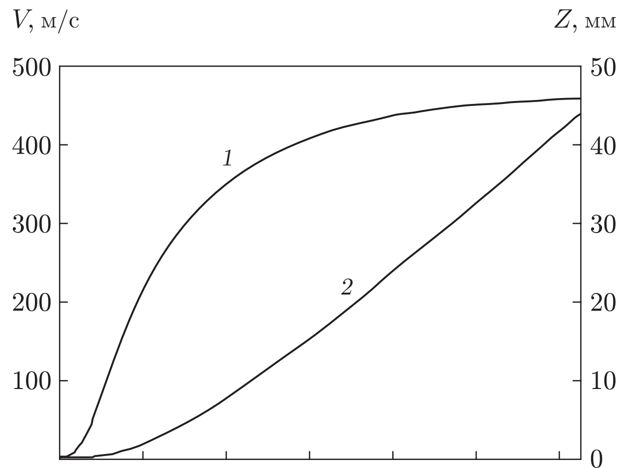

Рис. 3

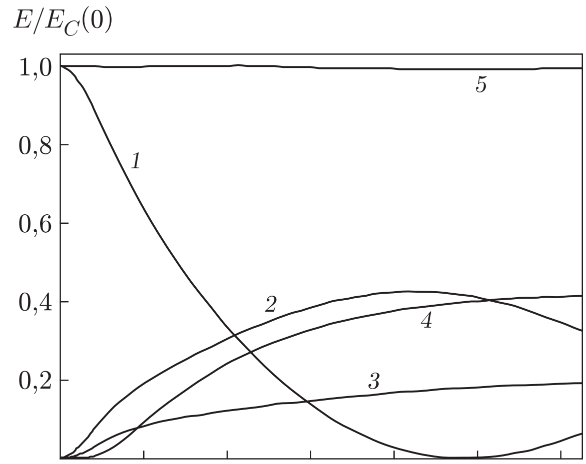

Рис. 4

Рис. 3. Зависимости скорости тела (*1*) и пройденного им расстояния (*2*) от времени

Рис. 4. Нормированные зависимости различных видов энергии от времени: *1* — энергия в конденсаторе, *2* — энергия магнитного поля, *3* — энергия джоулевых потерь, *4* — кинетическая энергия тела, *5* — сумма энергий

Расчеты проводились при начальном напряжении на конденсаторе 10 кВ. Использовалась методика расчета напряжений на витках, заданная соотношениями (9). При этом различие полных токов в витках индуктора не превышало 1 %. Полученные зависимости полных токов в индукторе и ускоряемом теле от времени представлены на рис. 2. На рис. 3 приведены зависимости скорости тела и пройденного им расстояния от времени. Система обеспечивает разгон диска до скорости 450 м/с. Максимальная температура индуктора в конце процесса ускорения 370 °C, диска — 240 °C. Максимальный нагрев диска происходит в зоне, соответствующей среднему радиусу индуктора. Эффективность преобразования электрической энергии конденсатора в кинетическую составляет примерно 40 %. Для многовитковых систем эффективное ускорение осуществляется при смещении диска на расстояние, приблизительно равное удвоенной высоте витка индуктора. На рис. 4 показана динамика изменения различных видов энергии в системе (энергии в конденсаторе, энергии магнитного поля системы, энергии джоулевых потерь, а также кинетической энергии тела). Видно, что отличие суммы всех видов энергии от начальной энергии в конденсаторе составляет не более 0,5 %. Следовательно, представленная методика является корректной.

Заключение. Представленный метод расчета нестационарных распределений электромагнитных полей и токов в системах индуктивно связанных подвижных проводников, учитывающий внешние цепи, позволяет осуществить полное моделирование работы различных устройств (например, индукционных ускорителей твердых тел с одно- или многовитковыми индукторами), систем генерации электромагнитных полей, включающих такие устройства, как концентраторы магнитного потока, проводящие разомкнутые крепления проводников и др. Несмотря на существенное заполнение матрицы масс в получаемой системе обыкновенных дифференциальных уравнений, предложенный алгоритм не требует промежуточных итераций и является достаточно эффективным с точки зрения затрат машинного времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Chen Q., Konrad A.** A reviwe of finite element open boundary techniques and quasi-static electromagnetic field // IEEE. Trans. Magn. 1997. V. 33, N 1, pt 2. P. 663–676.
2. **Krivosheev S. I., Shneerson G. A., Titkov V. V.** Experimental study solenoid destruction in megagauss magnetic field // Proc. of the 7th Intern. conf. on magnetic field generation and related topics, Sarov (Russia), 5–10 Aug. 1996. Sarov: VNIIEF, 1997. P. 233–240.
3. **Hainsworth G., Rodger D.** Finite element modeling of flux concentrators for coilguns // IEEE. Trans. Magn. 1997. V. 33, N 1, pt 1. P. 175–177.
4. **Михайлов В. М.** Импульсные электромагнитные поля. Харьков: Вища шк., 1979.
5. **Thiagarajan V., Hsieh K.-T.** An algorithm to couple an external RL circuit with the finite element code EMAP3D // IEEE. Trans. Magn. 2007. V. 43, N 1. P. 376–379.
6. **Ландау Л. Д.** Электродинамика сплошной среды / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М.: Наука, 1982.
7. **Grishin Yu. M., Lobanov S. V., Kuzenov V. V., et al.** Mathematical model for computation of parameters of electromagnetic acceleration of bulk metal bodies for inductive method of acceleration with capacitance power source // Proc. of the 9th Intern. conf. on magnetic field generation and related topics, Moscow — St.-Petersburg, 7–14 July 2002. Sarov: VNIIEF, 2004. P. 616–622.

Поступила в редакцию 1/VI 2007 г.,
в окончательном варианте — 29/XII 2007 г.