УДК 532.516+517.95

ГИДРОДИНАМИКА С КВАДРАТИЧНЫМ ДАВЛЕНИЕМ. 2. ПРИМЕРЫ

А. П. Чупахин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Исследованы точные решения уравнений Эйлера, описывающие движение идеальной несжимаемой жидкости с квадратичным давлением. Решения описываются явными формулами и допускают наглядную физическую интерпретацию. Изучена динамика шарового объема жидкости при различных специальных начальных полях скоростей. Показано, что при соответствующих начальных условиях шаровой объем может эволюционировать в тороподобное тело, изменяя связность области, занятой жидкостью.

Введение. Данная работа является продолжением работы [1], в которой изложен алгоритм интегрирования и указаны общие свойства решений уравнений Эйлера

$$D\boldsymbol{u} + \nabla p = 0, \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0 \tag{1}$$

с квадратичным давлением

$$p = k(t)(x^2 + y^2 + z^2)/2. \tag{2}$$

В работе используются обозначения, принятые в [1].

При наличии у матрицы Якоби $J = \partial \boldsymbol{u}/\partial \boldsymbol{x}$ собственного значения кратности два эллиптические функции времени, определяющие динамику движения, редуцируются к рациональным. Линейное уравнение Ламе, описывающее траектории жидких частиц, переходит в уравнение с рациональным потенциалом. Решения выписываются в элементарных функциях, но описывают нетривиальные движения жидкости. Задавая конкретные начальные поля скоростей $\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x}_0)$ такие, что матрица $J_0 = \partial \boldsymbol{u}_0/\partial \boldsymbol{x}_0$ имеет постоянные алгебраические инварианты, причем $\operatorname{tr} J_0 = 0$, получим примеры точных решений уравнений Эйлера с давлением в виде (2). Общим для них является наличие особенности в движении — вырождения размерности области, занятой жидкостью.

Интегрирование уравнений траекторий. Пусть матрица Якоби J имеет двукратное собственное значение $\lambda = \lambda(t)$ и в $\mathbb{R}^3(\boldsymbol{x})$ существует базис из ее собственных векторов. Тогда, как показано в [1], имеем

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = \lambda_0(1 + \lambda_0(t_0 - t))^{-1}, \qquad \lambda_3 = -2\lambda, \tag{3}$$

где $\lambda_0 = \lambda(t_0)$ — произвольное вещественное число. В этом случае

$$k = 2k_2/3 = -(1/3) \operatorname{tr} J^2 = -2\lambda^2.$$

Уравнения траекторий принимают вид

$$\frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2} - \frac{2\lambda_0}{(1 + \lambda_0(t_0 - t))^2}\, \boldsymbol{x} = 0. \tag{4}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99-01-00523) и Совета поддержки ведущих научных школ (код проекта 00-15-96163).

Фундаментальная система решений каждого уравнения системы (4) состоит из функций

$$q_1 = \tau^{-1}, \qquad q_2 = \tau^2, \tag{5}$$

где $\tau = 1 + \lambda_0(t_0 - t)$. Вронскиан системы решений (5) есть константа $W(t) = W_0 = -3$. Общее решение уравнений (4) с начальными данными

$$\boldsymbol{x}\big|_{t=0} = \boldsymbol{x}_0, \qquad \boldsymbol{u}\big|_{t=0} = \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x}_0)$$

представляется в виде

$$\boldsymbol{x} = [\lambda_0(2q_1 + q_2)\boldsymbol{x}_0 + (q_1 - q_2)\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x}_0)]/(3\lambda_0). \tag{6}$$

Для всех рассматриваемых решений давление имеет вид

$$p = p_0(t) - \lambda_0^2\tau^{-2}r^2,$$

где $p_0(t)$ — произвольная функция, так что $p \geqslant 0$ во все моменты времени. Очевидно, $p \to \infty$ при $\tau \to 0$.

Особыми точками решения линейной системы (4) являются особая точка коэффициентов (особенность собственного числа (3)) и бесконечно удаленная точка: $\tau = 0$, $t = t_0 + \lambda_0^{-1}$ и $\tau = \infty$, $t = \infty$. Тогда решение (6) можно рассматривать на полуинтервалах

$$T_1\colon \quad -\infty < t < t_0 + \lambda_0^{-1}, \qquad T_2\colon \quad t_0 + \lambda_0^{-1} < t < +\infty. \tag{7}$$

Рассмотрим несколько примеров решений, различающихся начальными полями скоростей $\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x}_0)$.

Пример 1. Начальное поле скоростей задается формулами

$$u_0 = -2x_0 + 3U(y_0, z_0), \qquad v_0 = y_0, \qquad w_0 = z_0 \tag{8}$$

с произвольной гладкой функцией U своих аргументов ($\lambda_0 = 1$). Уравнения траекторий (6) для начальных данных (8) принимают вид

$$x = U\tau^{-1} + (x_0 - U)\tau^2, \qquad y = \tau^{-1}y_0, \qquad z = \tau^{-1}z_0, \tag{9}$$

где $\tau = 1 + t_0 - t$.

Движение каждой жидкой частицы происходит в плоскости

$$\Pi\colon\ z_0 y - y_0 z = 0 \tag{10}$$

и задается кривой третьего порядка

$$y^2 x = y_0^{-1}Uy^3 + (x_0 - U)y_0^2. \tag{11}$$

Согласно классификации Ньютона кривых третьего порядка [2] кривая (11) относится к четвертой группе (гиперболизмы конических сечений). Особенностью кривых вида (11) является наличие на плоскости (10) двух асимптот: $y = 0$ (двукратная) и $y = y_0U^{-1}x$. Задание функции $U = U(y_0, z_0)$ определяет расположение кривой на плоскости и наклон асимптоты. Изменение функции U не меняет типа кривой.

Движение жидкости, описываемое в лагранжевых координатах формулами (9), имеет следующее представление в эйлеровых координатах:

$$u = 3\tau^{-2}U - 2\tau^{-1}x, \qquad v = \tau^{-1}y, \qquad w = \tau^{-1}z, \tag{12}$$

где $U = U(y\tau, z\tau)$.

Матрица Якоби поля скоростей (12) имеет вид

$$J = \begin{bmatrix} -2\tau^{-1} & -3\tau^{-1}U_1 & -3\tau^{-1}U_2 \\ 0 & \tau^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \tau^{-1} \end{bmatrix}, \tag{13}$$

где U_i $(i = 1, 2)$ — частные производные функции U по ее аргументам. Матрица J (13) имеет собственные значения $\lambda_{1,2} = \tau^{-1}$, $\lambda_3 = -2\tau^{-1}$, логарифмические потенциалы собственных значений $q_{1,2} = \tau^{-1}$, $q_3 = \tau^2$. Соответствующие правые собственные векторы могут быть выбраны следующими:

$$\boldsymbol{r}_1 = 3(-U_1U_2, U_2, 0)^{\text{т}}, \qquad \boldsymbol{r}_2 = 3(U_1U_2, 0, -U_1)^{\text{т}}, \qquad \boldsymbol{r}_3 = (1, 0, 0)^{\text{т}},$$

где индекс т обозначает транспонирование вектора ($\boldsymbol{r}_i$ — вектор-столбцы). В этом случае представление для вихря $\boldsymbol{\omega}$ [1] имеет вид

$$\boldsymbol{\omega} = \tau^{-1}(\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2) + 0 \cdot \tau^2 \boldsymbol{r}_3 = 3(0, \tau^{-1}U_2, -\tau^{-1}U_1)^{\text{т}}.$$

Объем жидкости, имеющей в начальный момент времени форму шара, ограниченного сферой $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1$, эволюционирует со временем в объем, ограниченный поверхностью

$$\tau^2(y^2 + z^2) + (x - U\tau^{-1})^2\tau^{-4} + 2U(x - U\tau^{-1})\tau^{-2} + U^2 = 1,$$

где $U = U(y\tau, z\tau) = U(y_0, z_0)$.

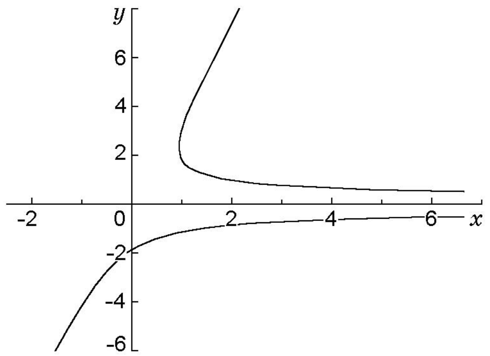

Рис. 1

На рис. 1, 2 показаны траектории (11) и динамика жидкого шара при $U = \sin(y_0^2 + z_0^2)$ и $t_0 = 0$. На рис. 1 приведена траектория жидкой частицы в плоскости $z_0 = 10$ при $(x_0, y_0) = (1, 3)$. Различные ветви кривой (11) соответствуют движению на полуинтервалах T_1 и T_2 вида (7). Поскольку $y_0 > 0$, верхняя ветвь кривой (11), на которой $y > 0$, соответствует значениям $t < 1$, нижняя, где $y < 0$ — значениям $t > 1$. Этим ветвям соответствуют разные асимптотики движения: на верхней $y \to +0$ при $t \to -\infty$, на нижней $y \to -0$ при $t \to +\infty$.

На рис. 2 показана эволюция шарового объема при приближении к разным особым точкам: $t \to 1$ (рис. 2,*а*,*б*) и $t \to -\infty$ (рис. 2,*в*). Особенностями движения являются потеря размерности и вырождение области. Характер вырождения различен. Так, при $t \to 1$ происходит сплющивание шара в почти плоское многообразие, а при $t \to \infty$ — вытягивание его в иглу. Подобные особенности обнаружены и исследованы Л. В. Овсянниковым в [3] для движения с линейным полем скоростей.

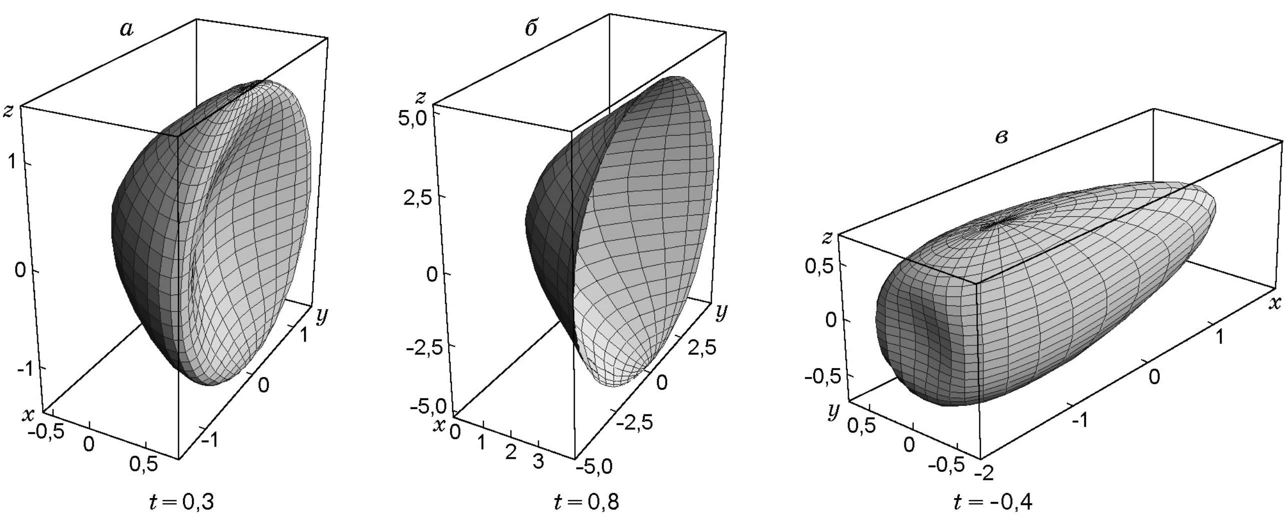

Рис. 2

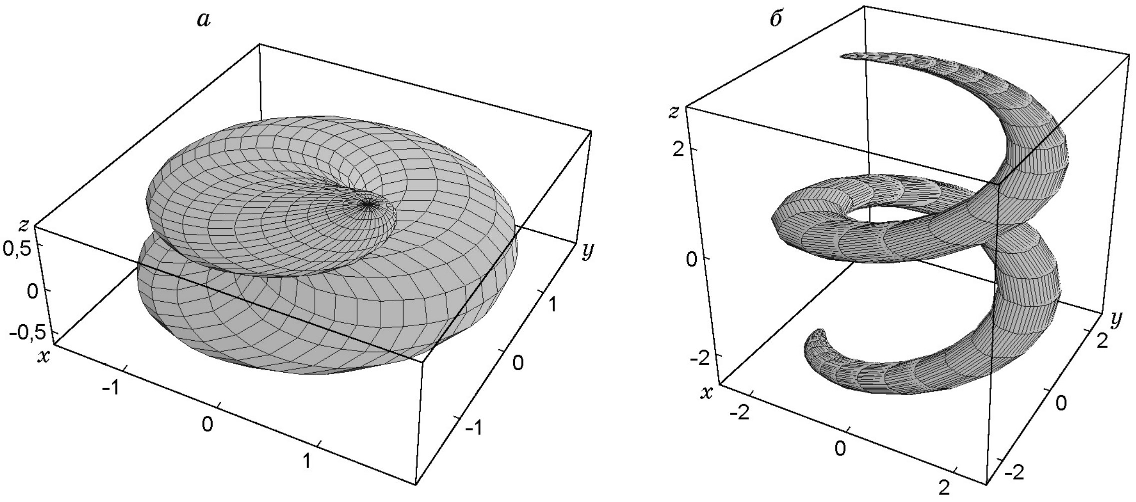

Рис. 3

Пример 2. Начальное поле скоростей в декартовых координатах имеет вид

$$u_0 = x_0 + q_0 \cos(bz_0), \qquad v_0 = y_0 - q_0 \sin(bz_0), \qquad w_0 = -2z_0, \tag{14}$$

где q_0, b — произвольные вещественные параметры. Векторное поле (14) в цилиндрических координатах $x_0 = r\cos\psi$, $y_0 = r\sin\psi$ имеет вид

$$V_{0c} = r + q_0\cos(\psi + bz_0), \qquad W_{0c} = -q_0\sin(\psi + bz_0), \qquad w_0 = -2z_0,$$

где V_{0c}, W_{0c} — радиальная и окружная компоненты вектора скорости. Для векторного поля (14) $\lambda_0 = 1$, так что $\tau = 1 + t_0 - t$. Уравнения траекторий (6) представляются соотношениями

$$x = \tau^{-1}x_0 + (q_0/3)(\tau^{-1} - \tau^2)\cos(bz_0), \quad y = \tau^{-1}y_0 + (q_0/3)(\tau^{-1} - \tau^2)\sin(bz_0), \quad z = \tau^2 z_0.$$

Плоскость П, в которой движется жидкая частица с начальными данными $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x}_0))$ вида (14), задается уравнением

$$(x - \tau^{-1}x_0)\sin(bz_0) - (y - \tau^{-1}y_0)\cos(bz_0) = 0,$$

в которое следует подставить $\tau = |z/z_0|^{1/2}$ при $z_0 \neq 0$. Если $z_0 = 0$, то движение происходит в плоскости $z = 0$. Динамика частиц жидкости, занимавших при $t_0 = 0$ шар, ограниченный сферой $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = a^2$, $a = \mathrm{const}$, описывается уравнениями

$$\begin{gathered} x = a\tau^{-1}\sin\theta\cos\varphi + (q_0/3)(\tau^{-1} - \tau^2)\cos(ab\cos\theta), \\ y = a\tau^{-1}\sin\theta\sin\varphi + (q_0/3)(\tau^{-1} - \tau^2)\sin(ab\cos\theta), \qquad z = a\tau^2\cos\theta, \end{gathered} \tag{15}$$

где стандартные сферические координаты a, θ, φ ($0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$) задают границу области в каждый момент времени из полуинтервалов (7).

На рис. 3,*а,б* показана эволюция поверхности (15) в различные моменты времени при приближении к одной из особых точек: $t \to 1$ и $t \to -\infty$ соответственно. При этом $a = 1$, $b = 6$, $q_0 = 3$. На рис. 3,*а* $t = 0{,}2$, при $t \to 1$ высота витка спирали стремится к нулю. На рис. 3,*б* $t = -0{,}6$, при $t \to -\infty$ шар эволюционирует в дугу спирали, утончающуюся и разворачивающуюся в пространстве со временем. Объем указанных областей сохраняется в силу несжимаемости жидкости и равен объему исходного шара. В данном примере сингулярность движения также проявляется в вырождении размерности области.

Пример 3. Начальное поле скоростей в декартовых координатах имеет вид

$$u_0 = x_0 - \sigma r^{-1}y_0z_0, \qquad v_0 = y_0 + \sigma r^{-1}x_0z_0, \qquad w_0 = -2z_0, \tag{16}$$

где $r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$; σ — вещественный параметр. В цилиндрических координатах $x_0 = r\cos\psi$, $y_0 = r\sin\psi$ векторное поле (16) принимает вид

$$V_{0c} = r, \qquad W_{0c} = \sigma z_0, \qquad w_0 = -2z_0, \tag{17}$$

где V_{0c}, W_{0c} — радиальная и окружная компоненты вектора скорости в плоскости Ox_0y_0; w_0 — компонента вектора скорости вдоль оси Oz_0.

Уравнения траекторий (6) принимают вид

$$x = \tau^{-1}x_0 - \sigma(\tau^{-1} - \tau^2)z_0\sin\psi, \quad y = \tau^{-1}y_0 + \sigma(\tau^{-1} - \tau^2)z_0\cos\psi, \quad z = \tau^2 z_0. \tag{18}$$

Траектория жидкой частицы, стартующей при $t_0 = 0$ из точки x_0 со скоростью $\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x}_0)$ (16), лежит в плоскости

$$(x - \tau^{-1}x_0)\cos\psi + (y - \tau^{-1}y_0)\sin\psi = 0. \tag{19}$$

В уравнение (19) нужно подставить $\tau = |z/z_0|^{1/2}$. Поверхность, состоящую из траекторий жидких частиц, можно построить следующим образом. Исключив из соотношений (18) величину τ, получим уравнение

$$(x - |z_0/z|^{1/2}x_0)^2 + (y - |z_0/z|^{1/2}y_0)^2 = \sigma^2 z_0^2(|z_0/z|^{1/2} - z/z_0)^2. \tag{20}$$

Соотношение (20) задает в $\mathbb{R}^3(\boldsymbol{x})$ поверхность вращения, ось которой проходит через точки $O(0,0,0)$ и $P_0(x_0, y_0, z_0)$, а расстояние от образующей поверхности до оси $R(z) = \sigma|z_0|||z/z_0|^{1/2} - z/z_0|$. Траектория жидкой частицы получается при пересечении поверхности (20) плоскостью (19). Особенностями этой поверхности (как следует из уравнения (20)) являются вырождение в точку оси при $z = z_0$; сужение (горловина) при $|z/z_0|^{1/2} = -\sqrt[3]{2}$; асимптотическое приближение к плоскости $z = 0$, распластывание по ней с двух сторон при $z \to \pm 0$ (уплощение).

Рассмотрим динамику жидкого шара, ограниченного при $t_0 = 0$ сферой $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = a^2$. Введем на сфере радиуса a координаты θ, φ, тогда эволюция жидких частиц шара будет задаваться уравнениями

$$\begin{gathered} x = a[\tau^{-1}\sin\theta\cos\varphi + (\sigma/3)(\tau^{-1} - \tau^2)\cos\theta\sin\varphi], \\ y = a[\tau^{-1}\sin\theta\sin\varphi + (\sigma/3)(\tau^{-1} - \tau^2)\cos\theta\cos\varphi], \qquad z = a\tau^2\cos\theta. \end{gathered} \tag{21}$$

Ввиду линейной зависимости координат (21) от радиуса a движение жидких частиц происходит послойно. Все точки жидкого шара, кроме лежащих на оси Oz_0, имеют ненулевую радиальную и окружную компоненты вектора скорости. Частицы, лежащие на оси Oz_0, движутся вдоль нее в направлении к центру шара. Вихрь начального поля скоростей (17) имеет вид (также в цилиндрических координатах) $\boldsymbol{\omega}_0 = (-\sigma, 0, \sigma r^{-1}z_0)$, так что ω^3 обращается в бесконечность на оси шара. Такая особенность начального поля скоростей приводит к нарушению связности области в процессе движения. Легко показать, что уравнения (21) в любой момент времени описывают тороподобное тело, имеющее внутреннюю полость.

Следствием соотношений (21) является уравнение границы в виде

$$\tau^2(x^2 + y^2) + \tau^{-4}b(\tau)z^2 = a^2, \tag{22}$$

где $b(\tau) = 1 - (\sigma^2/9)(1 - \tau^3)^2$. Из уравнения (22) следует, что тороподобная поверхность эволюционирует, представляя собой в различные моменты времени эллипсоид с полостью ($b > 0$), полую цилиндрическую оболочку ($b = 0$), оболочку в виде однополостного гиперболоида ($b > 0$).

На рис. 4 показана эволюция шара при приближении к особой точке $t = 1$ в моменты времени $t = 0{,}2$ (рис. 4,*а*) и $t = 0{,}6$ (рис. 4,*б*). На рис. 5 представлены различные этапы

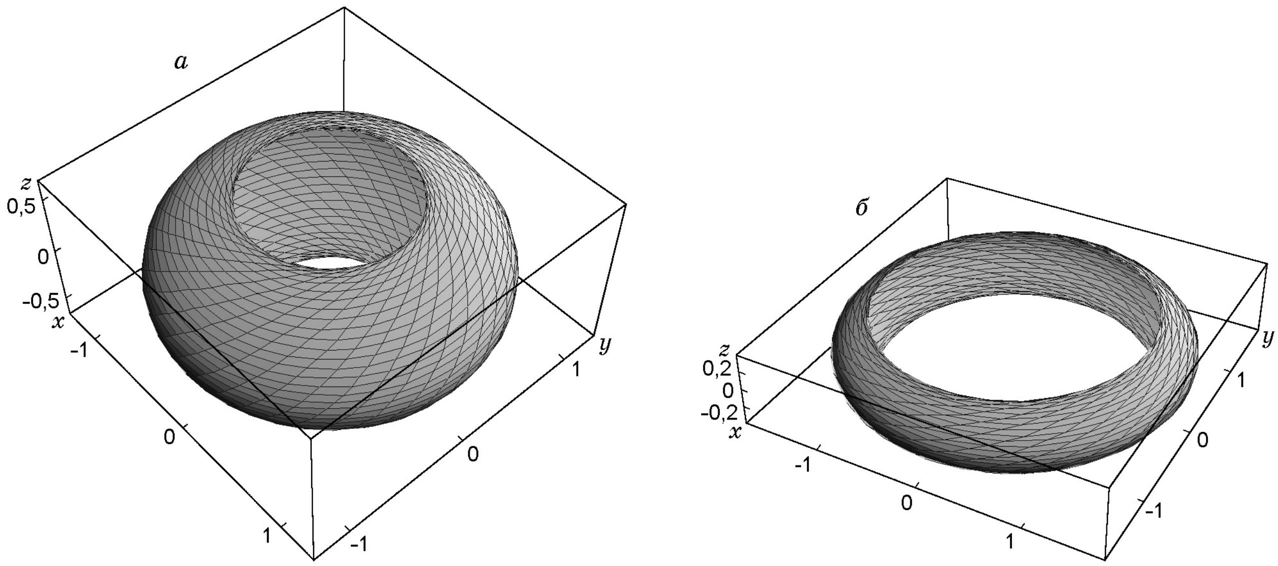

Рис. 4

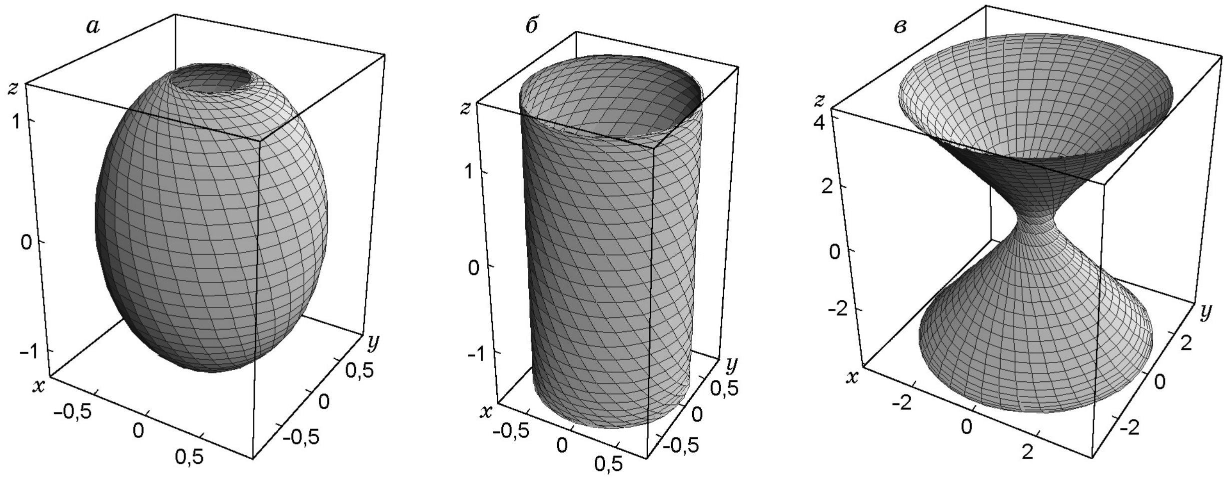

Рис. 5

динамики шара при $t < 0$: эллипсоид при $t = -0{,}1$ (рис. 5,*а*), цилиндрическая оболочка при $t = 1 - \sqrt[3]{2}$ (рис. 5,*б*), гиперболоид при $t = -0{,}4$ (рис. 5,*в*). Особенностями движения являются вырождение размерности области, занятой жидкостью, и уплощение шара со временем. Как и в предыдущих примерах, объем области со временем не меняется.

Вопрос о реализуемости подобных решений связан с вопросом о границах применимости модели идеальной несжимаемой жидкости.

Выводы. Решения уравнений Эйлера (1) с квадратичным давлением в виде (2) в случае кратного собственного значения матрицы $J = \partial \boldsymbol{u}/\partial \boldsymbol{x}$ образуют широкий класс, описываемый простыми формулами и характеризуемый нетривиальной геометрией и физикой движения. Такие движения всегда имеют сингулярность, которая выражается в уплощении или вытягивании области, занятой жидкостью.

Приведены примеры эволюции объема жидкости, имеющего в начальный момент времени форму шара. Указано начальное поле скоростей, при котором в процессе движения нарушается связность области.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Чупахин А. П.** Гидродинамика с квадратичным давлением. 1. Общие результаты // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 1. С. 27–35.
2. **Савелов А. А.** Плоские кривые. М.: Физматгиз, 1960.
3. **Овсянников Л. В.** Общие уравнения и примеры // Задача о неустановившемся движении жидкости со свободной границей. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1967. С. 5–75.

Поступила в редакцию 25/V 2001 г.