Р О С С И Й С К А Я   А К А Д Е М И Я   Н А У К

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

А В Т О М Е Т Р И Я

2005, том 41, № 5

УДК 519.6 : 531.1

С. В. Леньков

(Ижевск)

ВОССТАНОВЛЕНИЕ СИГНАЛОВ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ДИНАМИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ ЦИФРОВЫМИ РЕГИСТРАТОРАМИ

Проведен анализ алгоритма восстановления входного сигнала по конечной его реализации на выходе цифрового регистратора с использованием быстрого пробразования Фурье. Получена оценка погрешности восстановления.

Введение. Измерение нестационарных (ударных) процессов осуществляется цифровыми системами измерения (цифровыми регистраторами) [1]. Поскольку измерения ударных процессов являются динамическими, то возникает проблема применения средства измерения в динамическом режиме. Динамическое измерение включает в себя наблюдение (регистрацию) и обработку сигнала [1]. Если динамическая цифровая система измерения искажает входной сигнал за счет конечности полосы пропускания и неравномерности АЧХ аналоговой части цифрового регистратора, то возникает проблема определения действительных временных зависимостей значений измеряемых физических величин и интегралов от них [1]. Для решения этой проблемы используется алгоритм восстановления сигналов [2, 3].

Восстановление входного аналогового сигнала по известному аналоговому выходному сигналу, полученному в результате динамических измерений, есть решение обратной задачи, представленной во временной и частотной областях [2, 3]:

$$h(t\quad)a(\ )d\quad A(t);\qquad H(\ )S_a(\ )\quad S_A(\ ),\tag{1}$$

где $a(t)$ – входной сигнал; $A(t)$ – сигнал на выходе аналоговой части цифрового регистратора, включающей в себя датчик и усилительный канал; $h(t)$ – импульсная характеристика аналоговой части регистратора; $H(\ )$ – частотная характеристика аналоговой части регистратора; $S_a(\ )$ – спектр входного сигнала; $S_A(\ )$ – спектр сигнала на выходе аналоговой части регистратора.

Входной сигнал получается обратным преобразованием Фурье от восстановленного спектра входного сигнала $S_a(\omega) = S_A(\omega)/H(\omega)$:

$$a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_A(\omega)}{H(\omega)} \exp(j\omega t)\frac{d\omega}{2\pi}. \qquad (2)$$

Пусть спектр входного сигнала $S_a(\omega)$ – финитная функция. Тогда интеграл в (2) надо брать только по частотам $-\omega_m \le \omega \le \omega_m$, где ω_m – максимальная частота входного сигнала. Выражение (2) можно представить в удобном для дальнейшего использования виде, сделав последовательно две замены переменных:

$$a(t) = \int_0^{\omega_m} \frac{S_A(\omega)}{H(\omega)}\exp(j\omega t)\frac{d\omega}{2\pi} + \int_{\omega_m}^{2\omega_m} \frac{S_A(-(2\omega_m-\omega))}{H(-(2\omega_m-\omega))}\exp(-j(2\omega_m-\omega)t)\frac{d\omega}{2\pi}. \qquad (3)$$

При использовании цифровых регистраторов сигнал на выходе аналоговой части регистратора неизвестен. Для восстановления входного сигнала есть только конечная реализация дискретного во времени и по амплитуде выходного сигнала и оценка дискретного спектра выходного сигнала, полученная с помощью быстрого преобразования Фурье (БПФ). Поэтому актуально рассмотрение алгоритма и точности восстановления входного сигнала по дискретной конечной реализации сигнала и спектра, полученного с помощью БПФ.

Анализ алгоритма восстановления по оцифрованному сигналу. Выходной сигнал цифрового регистратора в дискретные моменты времени t_i согласно (1) имеет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t_i-\tau)a(\tau)d\tau = A(t_i). \qquad (4)$$

Применив к обеим частям (4) прямое БПФ, находим

$$\Delta t \sum_{i=0}^{N-1} \int_{-\infty}^{\infty} h(t_i-\tau)\exp(-j\omega_n t_i)a(\tau)d\tau = G_A(\omega_n), \qquad (5)$$

где $G_A(\omega_n)$ – оценка спектра выходного сигнала, полученная с помощью БПФ; Δt – шаг дискретизации по времени; $\omega_n = n\Delta\omega$, $n = 0,1,2,3,\dots,N$; $\Delta\omega = 2\pi/T$ – шаг квантования спектра по частоте (разрешение по частоте) при выполнении БПФ; N – число отсчетов сигнала (объем выборки), кратное степени числа 2.

Выразив импульсную характеристику и входной сигнал через частотную характеристику аналоговой части регистратора и спектр входного сигнала, получим интегральный аналог выражения (1), связывающий непрерывный спектр входного и дискретный спектр выходного сигналов:

$$\Delta t \int_{-\omega_m}^{\omega_m} H(\omega)S_a(\omega)K_N(\omega-\omega_n)\frac{d\omega}{2\pi} = G_A(\omega_n), \qquad (6)$$

где

$$K_N(\qquad_i) \quad \frac{\exp(j(\qquad_i)T)\quad 1}{\exp(j(\qquad_i)\ \ t)\quad 1} \tag{7}$$

– функция основного спектрального окна при БПФ, определяющая точность оценки спектра [4]; $T \quad tN$ – длина реализации (время измерения процесса); $_D \qquad N$ – частота оцифровки сигнала.

Для восстановления входного сигнала вместо непрерывного спектра имеем дискретную оценку спектра $G_A(\ _i)$, найденную с помощью БПФ. Причем полученный дискретный спектр располагается в области частот $[0, 2\ _m]$, совпадающей с областью интегрирования в (3). Поскольку при оцифровке выполняются равенства $_D \quad 2\ _m$ и $\exp(\ \ j\ _D t_n)\quad 1$, то выражение для оценки отсчетов входного сигнала будет являться дискретным аналогом выражения (3):

$$a_G(t_n) \quad \sum_{i\ \ 0}^{N/2} \frac{G_A(\ _i)}{H(\ _i)}\exp(j\ \ _i t_n)\frac{}{2}$$

$$\frac{1}{2}\ \sum_{i\ \ N/2\ \ 1}^{N\ \ 1} \frac{G_A(\ _i)}{H(\ (\ _D\qquad _i))}\exp(j\ \ _i t_n)\frac{}{2}. \tag{8}$$

Обычно для обеспечения устойчивой процедуры восстановления производят фильтрацию выходного сигнала цифровым фильтром нижних частот (ФНЧ) [2, 3]. Отсчеты сигнала после фильтрации можно представить в виде

$$A_F(t_i) \quad \frac{1}{N} \sum_{n\ \ 0}^{N\ \ 1} G_A(\ _n)F(\quad)K_N(\ _n\qquad)\exp(j\ \ t_i)\frac{d}{2}, \tag{9}$$

где $F(\quad)$ – частотная характеристика цифрового ФНЧ.

Оценка спектра фильтрованного выходного сигнала получается прямым БПФ от (9):

$$G_F(\ _i) \quad \frac{t}{N} \sum_{n\ \ 0}^{N\ \ 1} G_A(\ _n)F(\quad)K_N(\ _n\qquad)K_N(\qquad _i)\frac{d}{2}. \tag{10}$$

Подставив выражение (10) в (8), вместо дискретного спектра $G_A(\ _i)$ получим оценку восстановленного входного сигнала:

$$a_F(t_i) \quad \frac{1}{N^2} \sum_{k\ \ 0}^{N\ \ 1}\sum_{n\ \ 0}^{N\ \ 1} \frac{G_A(\ _n)}{H_D(\ _k)}F(\quad)K_N(\ _n\qquad)K_N(\qquad _k)\exp(j\ \ _k t_i)\frac{d}{2}, \tag{11}$$

где

$$H_D(\ _i) \quad \begin{matrix} H(\ _i), & \quad |\ _i| \quad _D/2; \\ H(\ (\ _D\qquad _i)), & _D/2\quad |\ _i| \quad _D. \end{matrix}$$

Заменим сумму в (11) интегралом, воспользовавшись для этого выражением (6):

$$\sum_{n\ 0}^{N\ 1} G_A(\ \ _n)K_N(\ \ _n\ \ \ \ )\ \ \frac{T}{2}\int_{m}^{m} H(\ )S_a(\ )K_N(\ \ \ \ )d\ . \qquad (12)$$

Подставив (12) в (11), получим

$$a_F(t_i)\ \ \frac{T}{N^2}\sum_{k\ 0}^{N\ 1}\int_{m}^{m}\frac{H(\ )S_a(\ )}{H_D(\ _k)}K_N(\ \ \ \ )F(\ )K_N(\ \ \ \ _k)\exp(j\ \ _k t_i)\frac{d}{2}\frac{d}{2}.$$

(13)

Погрешность алгоритма восстановления входного сигнала найдем как норму разности:

$$_{AF}\ \ \left\|a_F(t_k)\ \ \ a_T(t_k)\right\|\ \ \max_k\left|a_F(t_k)\ \ \ a_T(t_k)\right|\ \ \ t_k\ \ \ [0,T], \qquad (14)$$

где $a_F(t_k)$ – восстановленный сигнал, определяемый выражением (13); $a_T(t_k)$ – отсчеты конечной реализации входного сигнала:

$$a_T(t_k)\ \ \ \ \int_{m}^{m} S_a(\ )K(\ \ \ \ )\exp(j\ \ \ t_k)\frac{d}{2}\frac{d}{2}. \qquad (15)$$

Здесь

$$K(\ \ \ \ )\ \ \frac{1\ \ \ \exp(j(\ \ \ \ )T)}{j(\ \ \ \ )}$$

– основное спектральное окно для реализации длительностью T [5].

Подставив в (14) выражения (13) и (15), получим

$$_{AF}\ \ \ T\max_k\left|\sum_{i\ 0}^{N\ 1}\int_{m}^{m} S_a(\ )\ \ \frac{H(\ )F(\ )K_N(\ \ \ \ )}{H_D(\ _i)N}\ \ \ \frac{K(\ \ \ \ )}{T}\right.$$

$$\left.\frac{K_N(\ \ \ \ _i)}{N}\exp(j\ \ _i t_k)\frac{d}{2}\frac{d}{2}\right|. \qquad (16)$$

Проведя в (16) тождественное преобразование, вычислим оценку погрешности восстановления, обусловленную дискретизацией выходного сигнала по времени и процедурой БПФ, состоящую из двух слагаемых:

$$_{AF}\ \ \ T\sum_{i\ 0}^{N\ 1}\int_{m}^{m} S_a(\ )\frac{F(\ )K(\ \ \ \ )}{N}\ \ \frac{H(\ )}{H_D(\ _i)}\ \ \ 1\ \ \frac{K_N(\ \ \ \ _i)}{N}\ \ \frac{d}{2}\frac{d}{2}$$

$$T \sum_{i\ 0}^{N\ 1} \int_{m}^{m} S_a(\ )\ \frac{F(\ )K_N(\ \ )}{N}\ \ \frac{K(\ \ )}{T}\ \ \frac{K_N(\ \ _i)}{N}\ \frac{d}{2}\frac{d}{2}. \quad (17)$$

Первое слагаемое в (17) определяет погрешность восстановления, вызванную дискретизацией и применением БПФ, второе – вызванную БПФ и фильтрацией выходного сигнала.

В процессе измерения и оцифровки в выходном сигнале регистратора появляется аддитивная помеха, обусловленная шумом аналоговой части регистратора и шумом квантования сигнала по амплитуде [5], что искажает оценку спектра выходного сигнала и соответственно увеличивает погрешность восстановления. В выражении (17) при этом появится дополнительное слагаемое, учитывающее влияние шумов аналогового измерительного тракта и шумов квантования выходного сигнала по амплитуде на погрешность восстановления входного сигнала регистратора. Оценка дополнительной погрешности восстановления сигнала, вызванной аддитивной помехой, примет вид

$$T \sum_{i\ 0}^{N\ 1} \int_{m}^{m} \frac{S\ (\ )F(\ )K_N(\ \ )}{H_D(\ _i)}\frac{K_N(\ \ _i)}{N^2}\ \frac{d}{2}\frac{d}{2}, \quad (18)$$

где $S\ (\ )$ – суммарный спектр шума в выходном сигнале регистратора.

Проведя оценку интегралов в (17) и (18) с помощью интегрального неравенства Коши – Буняковского, получим

$$_{AF}\qquad T \sum_{i\ 0}^{N\ 1} \sqrt{\int_{F\ \ m}^{F\ \ m} \left|S_a(\ )\right|^2 \frac{F(\ )K_N(\ \ )}{N}\ d\ d}$$

$$\sqrt{\int_{F\ \ m}^{F\ \ m} \frac{F(\ )K_N(\ \ )}{N}\ \ \frac{H(\ )}{H_D(\ _i)}\ \ 1^{\ \ 2}\ \frac{K_N(\ \ _i)}{N}^{2}\ \frac{d\ d}{(2\ )^2}}$$

$$T \sum_{i\ 0}^{N\ 1} \sqrt{\int_{m}^{m} \left|S_a(\ )\right|^2\ \ F(\ )\frac{K_N(\ \ )}{N}\ \ \frac{K(\ \ )}{T}\ \ d\ d}$$

$$\sqrt{\int_{m}^{m} \frac{K_N(\ \ _i)}{N}^{2}\ \ F(\ )\frac{K_N(\ \ )}{N}\ \ \frac{K(\ \ )}{T}\ \ \frac{d\ d}{(2\ )^2}}$$

$$T \sum_{i\ 0}^{N\ 1} \sqrt{\int_{F\ \ m}^{F\ \ m} \left|S\ (\ )\right|^2\ F(\ )\frac{K_N(\ \ )}{N}\ d\ d}$$

$$\sqrt{\int_{F\quad m}^{F\quad m} F(\ )\frac{K_N(\quad)}{N}\ \frac{K_N(\quad_i)}{NH_D(\ _i)}^2 \frac{d\ d}{(2\ )^2}}, \qquad (19)$$

где $_F \quad _m$ – полоса пропускания ФНЧ.

Вычислим интегралы в (19), аппроксимируя $|K_N(\ )|$ на отрезке $[\quad,\quad]$ треугольной функцией и раскладывая функцию $H(\ )$ в ряд Тейлора около отсчета частоты $_i$:

$$_{AF} \quad \sum_{i\ 0}^{N_2} {}_{aF} \ \frac{d\ln(|H(\ _i)|)}{d} \quad \frac{d\ (\ _i)}{d} \ \frac{\sqrt{\quad}}{\sqrt{30}}$$

$$_{aF\ 1}(N_1 \quad N_2)\frac{}{\sqrt{3}} \quad \sum_{i\ 0}^{N_2} \frac{_F}{|H(\ _i)|}\frac{}{\sqrt{3}}, \qquad (20)$$

где N_1 – число отсчетов спектра, находящихся в полосе входного сигнала; N_2 число отсчетов спектра в полосе пропускания ФНЧ; $_{aF}$ – среднеквадратичное значение входного сигнала в полосе пропускания фильтра; $_{aF\ 1}$ среднеквадратичное значение входного сигнала вне полосы пропускания фильтра; $_F$ – среднеквадратичное значение шумовой компоненты выходного сигнала в полосе пропускания фильтра; $(\ )$ – фазочастотная характеристика аналоговой части регистратора.

Из выражения (20) видно, что максимальная погрешность восстановления сигнала получается при наличии максимума скорости изменения логарифмической амплитудно-частотной и фазочастотной характеристик аналоговой части регистратора, т. е. имеющихся резонансных подъемах на частотной характеристике, а влияние шумовой компоненты возрастает с уменьшением модуля коэффициента передачи. Следовательно, для уменьшения погрешности восстановления при проведении цифровой фильтрации ФНЧ должен «обрезать» подъемы сигнала, вызванные резонансом датчиков на собственной или установочной частоте. В присутствии широкополосной помехи для корректной оцифровки сигнала приходится осуществлять передискретизацию, при этом величина N_2 может быть значительно меньше, чем общее число отсчетов сигнала. Таким образом, ФНЧ, имеющий частоту среза, равную максимальной частоте входного сигнала, или сигма–дельта-АЦП значительно снижает погрешность восстановления. При проведении фильтрации стоит проблема выбора оптимальной частоты среза ФНЧ, которую можно оценить из условия равенства погрешности восстановления, вызванной фильтрацией выходного сигнала, и погрешности, вызванной наличием шума в полосе пропускания ФНЧ. Согласно (20) имеем

$$_{aF\ 1}(\ _m \quad _F) \quad _F \frac{_F}{H_0}, \qquad (21)$$

где H_0 – значение коэффициента передачи аналоговой части регистратора в области плато АЧХ.

Заключение. В работе рассмотрены алгоритм и точность восстановления сигнала по результатам динамических измерений цифровыми регистраторами с использованием БПФ. Точность восстановления сигнала определяется скоростью изменения амплитудной и частотной характеристик аналоговой части регистратора в полосе пропускания цифрового ФНЧ (регуляри- зирующего сомножителя), величиной разрешения по частоте при быстром преобразовании Фурье и величиной аддитивной помехи. Получено соотношение, позволяющее оценить величину частоты среза цифрового ФНЧ при обеспечении требуемой точности восстановления сигнала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Грановский В. А. Динамические измерения. Л.: Энергоатомиздат, 1984.
2. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.
3. Василенко Г. И. Теория восстановления сигналов: О редукции к идеальному прибору в физике и технике. М.: Сов. радио, 1979.
4. Леньков С. В. Измерение амплитуды синусоидального сигнала ускорения в системе вибродиагностики с помощью БФП и сигнатурного спектрального анализа // Датчики и системы. 2004. № 12. С. 12.
5. Бендат Дж., Пирсол А. Прикладной анализ случайных данных: Пер. с англ. М.: Мир, 1989.

Физико-технический институт УрО РАН,
E-mail: gep@pti.udm.ru

Поступила в редакцию
17 мая 2005 г.