УДК 539.37

РАДИАЛЬНОЕ РАСШИРЕНИЕ СЫПУЧЕЙ СРЕДЫ В СФЕРИЧЕСКОМ И ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ СЛОЯХ

В. М. Садовский

Институт вычислительного моделирования СО РАН, 660036 Красноярск
E-mail: sadov@icm.krasn.ru

В рамках теории малых деформаций идеально сыпучей среды с жесткими частицами строится точное решение, описывающее поля перемещений и напряжений в расширяющемся сферическом слое. При конечных деформациях задача сводится к нелинейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которой получено с помощью численных методов. Аналогичные решения найдены в задаче для цилиндрического слоя. На основе этих решений анализируется влияние дилатансии сыпучей среды на напряженно-деформированное состояние вблизи расширяющихся полостей.

Ключевые слова: сыпучая среда, упругость, дилатансия, логарифмический тензор деформации Генки, вариационное неравенство.

Введение. Простейшее точное решение, описывающее сферически-симметричное состояние несжимаемой упругой среды вокруг расширяющейся полости, строится по аналогии с решением задачи о точечном источнике в гидродинамике вязкой жидкости [1]. Это решение не зависит от радиуса полости и имеет следующий вид:

$$u = \frac{Q}{4\pi r^2}, \qquad \sigma_r = -p - \frac{\mu Q}{\pi r^3}, \qquad \sigma_\varphi = \sigma_\psi = -p + \frac{\mu Q}{2\pi r^3}.$$

Здесь u — радиальное перемещение точки; σ_r, σ_φ, σ_ψ — компоненты тензора напряжений в сферической системе координат; p — давление на бесконечности; Q — изменение объема полости (расход); μ — модуль сдвига. Такое же распределение перемещений и напряжений реализуется в расширяющемся упругом слое, на внешней границе которого действует заданное давление.

Решение задачи с цилиндрической симметрией имеет вид

$$u = \frac{Q}{2\pi r}, \qquad \sigma_r = -p - \frac{\mu Q}{2\pi r^2}, \qquad \sigma_\varphi = -p + \frac{\mu Q}{2\pi r^2}, \qquad \sigma_z = -p.$$

При деформации сыпучей среды, в отличие от упругой, происходит дилатансионное увеличение объема за счет сдвигов и процесс деформирования существенно усложняется, особенно если изменение объема полости оказывается достаточно большим. В этом случае дилатансия имеет место только до момента достижения состояния предельного разрыхления материала, в котором он становится несжимаемым. Исследуем возникающее напряженно-деформированное состояние как при малых, так и при конечных деформациях среды.

1. Расширение сферического слоя. Предположим, что внутренняя поверхность сферического слоя $r_0 < r < r_1$ плотноупакованной сыпучей среды с жесткими частицами

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08-01-00148) и в рамках Комплексной программы фундаментальных исследований Президиума РАН № 14 “Фундаментальные проблемы информатики и информационных технологий”.

расширяется и ее радиальное перемещение равно u_0, а на внешней поверхности действует сжимающее напряжение, равное $-q$. Для такой среды дилатансионное уравнение [2] имеет вид

$$\varkappa\gamma(\varepsilon)=\vartheta(\varepsilon), \tag{1.1}$$

где $\varkappa \geqslant 0$ — параметр внутреннего трения; $\gamma(\varepsilon)$ — интенсивность сдвига; $\vartheta(\varepsilon)$ — объемная деформация:

$$\gamma(\varepsilon)=\sqrt{\frac{2}{3}\sum_{i>j}(\varepsilon_i-\varepsilon_j)^2}, \qquad \vartheta(\varepsilon)=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3;$$

ε_i — главные значения тензора малых деформаций ε.

В сферически-симметричном случае главные значения равны $\varepsilon_r = u'$ и $\varepsilon_\varphi = \varepsilon_\psi = u/r$ (штрих означает производную по r). Учитывая, что при расширении слоя $\varepsilon_\varphi > \varepsilon_r$, получаем

$$\frac{2\varkappa}{\sqrt{3}}\Big(\frac{u}{r}-u'\Big)=u'+2\,\frac{u}{r}.$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее граничному условию при $r=r_0$, имеет вид

$$u=u_0\Big(\frac{r_0}{r}\Big)^{\alpha}, \qquad \alpha=2\,\frac{\sqrt{3}-\varkappa}{\sqrt{3}+2\varkappa}.$$

При $\varkappa=0$ решение совпадает с приведенным выше решением для несжимаемой среды, если u_0 выразить через Q. При $\varkappa<\sqrt{3}$ с увеличением r перемещение уменьшается, стремясь к нулю в бесконечном слое. При $\varkappa>\sqrt{3}$ перемещение увеличивается, в то время как деформации

$$\varepsilon_r=-\alpha\varepsilon_\varphi, \qquad \varepsilon_\varphi=\varepsilon_\psi=\frac{u_0}{r_0}\Big(\frac{r_0}{r}\Big)^{\alpha+1}$$

уменьшаются независимо от $\varkappa$ и остаются малыми при достаточно малых значениях u_0. Условие $\varepsilon_r+2\varepsilon_\varphi>0$, при нарушении которого уравнение (1.1) не имеет смысла, всегда выполняется.

Заметим, что при сжатии слоя ($u_0<0$), когда $\varepsilon_r>0$ и $\varepsilon_\varphi<0$, из (1.1) следует другое дифференциальное уравнение

$$\frac{2\varkappa}{\sqrt{3}}\Big(u'-\frac{u}{r}\Big)=u'+2\,\frac{u}{r},$$

решение которого

$$u=u_0\Big(\frac{r_0}{r}\Big)^{\beta}, \qquad \beta=2\,\frac{\sqrt{3}+\varkappa}{\sqrt{3}-2\varkappa}$$

имеет смысл, только если $\varkappa<\sqrt{3}/2$, поскольку при бо́льших значениях $\varkappa$ деформация объема $\vartheta(\varepsilon)=\varepsilon_r+2\varepsilon_\varphi$ становится отрицательной. В этом случае решения (1.1) не существует: наблюдается эффект заклинивания частиц — среда не деформируется, оставаясь в жестком состоянии.

Для того чтобы найти напряжения, определяющие соотношения для идеально сыпучей среды запишем в виде вариационного неравенства [2]

$$\sum_{i=1}^{3}\sigma_i(\tilde\varepsilon_i-\varepsilon_i)\leqslant 0,$$

где $\tilde\varepsilon_i$ — компоненты произвольного тензора $\tilde\varepsilon$, удовлетворяющего ограничению $\varkappa\gamma(\tilde\varepsilon) \leqslant \vartheta(\tilde\varepsilon)$. С использованием теоремы Куна — Таккера это неравенство приводится к уравнениям

$$\frac{\sigma_i}{p} = \frac{4\varkappa}{3\gamma(\varepsilon)}\Big(\varepsilon_i - \frac{\varepsilon_j+\varepsilon_k}{2}\Big) - 1, \tag{1.2}$$

где $p > 0$ — множитель Лагранжа, равный гидростатическому давлению; $i \ne j \ne k$. В случае сферической симметрии уравнения (1.2) с учетом (1.1) преобразуются к виду

$$\sigma_r = -(2\varkappa/\sqrt{3}+1)p, \qquad \sigma_\varphi = \sigma_\psi = (\varkappa/\sqrt{3}-1)p.$$

Из уравнения равновесия

$$\sigma_r' + 2(\sigma_r - \sigma_\varphi)/r = 0 \tag{1.3}$$

с помощью граничного условия $\sigma_r = -q$ на внешней поверхности находим

$$p = \frac{\sqrt{3}\,q}{\sqrt{3}+2\varkappa}\Big(\frac{r_1}{r}\Big)^{2-\alpha}.$$

Напряжение на внутренней поверхности слоя определяется через гидростатическое давление, вычисленное по данной формуле при $r = r_0$.

Так как показатель степени $2-\alpha = 6\varkappa/(\sqrt{3}+2\varkappa)$ строго положителен, для бесконечного слоя ($r_1 \to \infty$) полученное решение не имеет смысла, если напряжение q отлично от нуля. В данном случае расширение сферической полости невозможно, поскольку для этого необходимо, чтобы со стороны полости на среду действовало бесконечное напряжение.

При конечных деформациях, когда перемещение u_0 не является малым, деформированное состояние сыпучей среды описывается логарифмическим тензором Генки [3] с отличными от нуля компонентами $h_r = \ln R'$ и $h_\varphi = h_\psi = \ln(R/r)$, где $R = r+u$ — эйлерова координата частицы. Дилатансионное уравнение, получаемое из (1.1) путем замены тензора малых деформаций логарифмическим тензором, приводится к виду

$$R' = (r/R)^\alpha. \tag{1.4}$$

Здесь, в отличие от случая малых деформаций, параметр α, вычисляемый по приведенной выше формуле, зависит от плотности

$$\rho = \rho_0 \exp(-\vartheta(h)), \qquad \vartheta(h) = h_r + 2h_\varphi = \ln(R^2R'/r^2).$$

Для среды, дилатансионное расширение которой не очень велико, такая зависимость приближенно описывается выражением

$$\varkappa(\rho) = \begin{cases} \varkappa_0\Big(\dfrac{1-\rho_*/\rho}{1-\rho_*/\rho_0}\Big)^n, & \rho \geqslant \rho_*, \\ 0, & \rho < \rho_*, \end{cases}$$

где ρ_0, ρ_* — плотности в начальном состоянии и в состоянии предельной дилатансии. Таким образом, уравнение (1.4) является дифференциальным уравнением, не разрешенным относительно производной. Однако непосредственные вычисления показывают, что

$$\frac{d\alpha}{d\varkappa} < 0, \qquad \frac{d\varkappa}{d\rho} \geqslant 0, \qquad \frac{d\rho}{dR'} < 0,$$

поэтому при $R \geqslant r$ выполняется условие

$$1 - \frac{d}{dR'}\Big(\frac{r}{R}\Big)^\alpha = 1 + \Big(\frac{r}{R}\Big)^\alpha \ln\Big(\frac{r}{R}\Big)\frac{d\alpha}{d\varkappa}\frac{d\varkappa}{d\rho}\frac{d\rho}{dR'} \geqslant 1,$$

которое на основании теоремы о неявной функции обеспечивает разрешимость задачи.

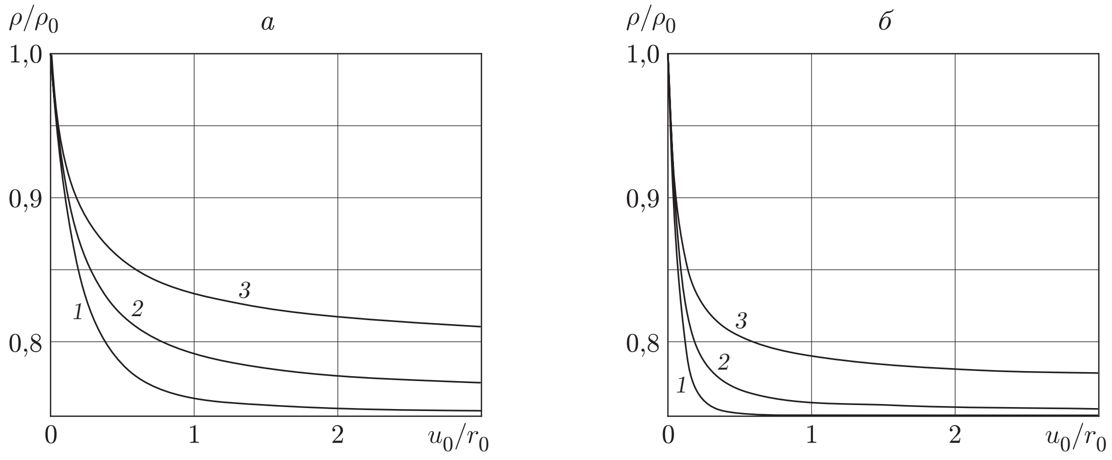

Рис. 1. Зависимость плотности среды вблизи внутренней поверхности от радиального перемещения ($\rho_* = 0{,}75\rho_0$):
а — $\varkappa_0 = 0{,}5$; *б* — $\varkappa_0 = 2{,}5$; *1* — $n = 0{,}5$; *2* — $n = 1$; *3* — $n = 2$

В силу уравнения (1.4)

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{r^2}{R^2 R'} = \Big(\frac{r}{R}\Big)^{2-\alpha}.$$

Отсюда, полагая $r = r_0$, можно выразить радиальное перемещение внутренней поверхности слоя в зависимости от плотности среды вблизи этой поверхности:

$$\frac{u_0}{r_0} = \Big(\frac{\rho_0}{\rho}\Big)^{1/(2-\alpha)} - 1.$$

Обратная зависимость позволяет определить плотность по заданному перемещению. Характерные графики обратной зависимости, полученные с помощью численных расчетов, представлены на рис. 1. На рис. 1,*а* коэффициент внутреннего трения в состоянии плотной упаковки $\varkappa_0$ считается равным 0,5, а на рис. 1,*б* $\varkappa_0 = 2{,}5$. При $\varkappa_0 = \sqrt{3}$ ($0{,}5 < \varkappa_0 < 2{,}5$) параметр $\alpha(\rho_0)$ меняет знак. Как установлено в случае малых деформаций, это приводит к качественному изменению поля перемещений.

На рис. 2 приведены результаты численного решения уравнения (1.4) методом Эйлера с пересчетом второго порядка точности после разрешения его относительно производной методом Ньютона — Рафсона. Корректировка Рафсона оказалась необходимой при $n \leqslant 1$, когда обычный метод Ньютона не сходится из-за разрыва производной $d\varkappa/d\rho$. Анализ результатов показал, что дилатансия среды происходит преимущественно вблизи внутренней поверхности слоя и предельная плотность материала ρ_* достигается только при $u_0 \to \infty$.

Напряжения в слое можно определить через деформации по формулам (1.2) после замены тензора ε тензором h:

$$\sigma_r = Ap, \qquad \sigma_\varphi = \sigma_\psi = Bp,$$

$$A = \frac{4\varkappa^2}{3}\, f - 1, \qquad B = -\frac{2\varkappa^2}{3}\, f - 1, \qquad f = \frac{h_r - h_\varphi}{h_r + 2h_\varphi} = \frac{\ln{(rR'/R)}}{\ln{(R^2R'/r^2)}}.$$

В этих формулах гидростатическое давление представляет собой решение дифференциального уравнения равновесия (1.3) в эйлеровых переменных

$$\frac{d\,(Ap)}{dR} + \frac{2(A-B)p}{R} = 0,$$

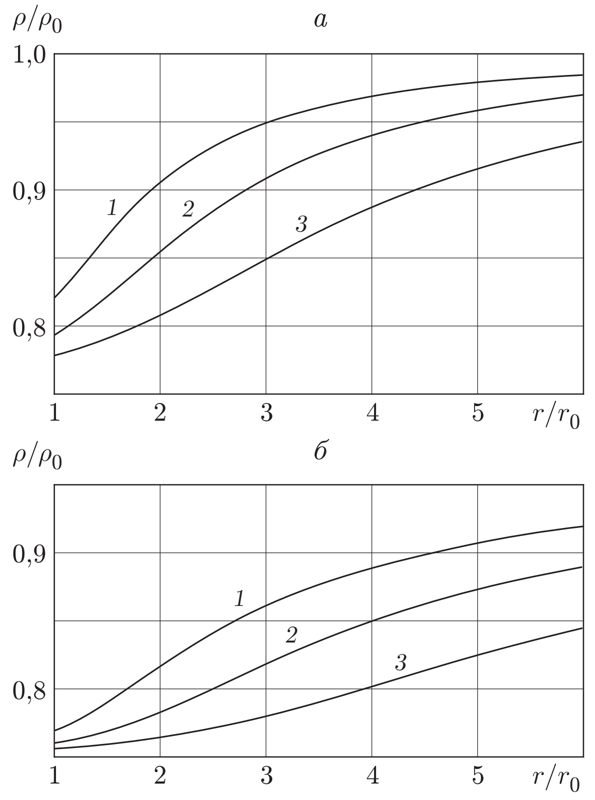

Рис. 2

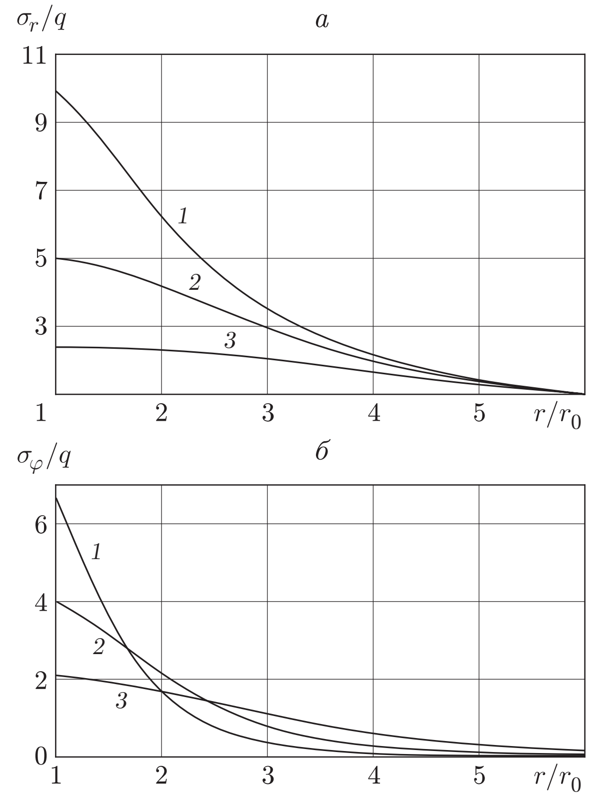

Рис. 3

Рис. 2. Распределение плотности в сферическом слое ($n = 1$, $\rho_* = 0{,}75\rho_0$):
а — $\varkappa_0 = 0{,}5$; *б* — $\varkappa_0 = 2{,}5$; *1* — $u_0/r_0 = 0{,}5$; *2* — $u_0/r_0 = 1$; *3* — $u_0/r_0 = 2$

Рис. 3. Распределение напряжений σ_r (*а*) и σ_φ (*б*) в сферическом слое ($\varkappa_0 = 2{,}5$):
1 — $u_0/r_0 = 0{,}5$; *2* — $u_0/r_0 = 1$; *3* — $u_0/r_0 = 2$

для численного решения которого с учетом граничного условия на внешней поверхности слоя применялась разностная схема Кранка — Николсона [4]:

$$\frac{A_j p_j - A_{j-1} p_{j-1}}{R_j - R_{j-1}} + 2\,\frac{(A_j - B_j)p_j + (A_{j-1} - B_{j-1})p_{j-1}}{R_j + R_{j-1}} = 0.$$

Схема позволяет по явным формулам вычислить значения гидростатического давления в узлах с последующим пересчетом напряжений. Полученные таким образом распределения σ_r и σ_φ внутри слоя для $\varkappa_0 = 2{,}5$ представлены на рис. 3. При $\varkappa_0 = 0{,}5$ соответствующие кривые являются более плавными: на кривой *1* значения напряжений σ_r и σ_φ на внутренней поверхности слоя приблизительно в три раза больше по модулю, чем на внешней поверхности.

Тестирование описанных вычислительных алгоритмов проводилось путем сравнения результатов расчетов с точными решениями для малых деформаций среды.

2. Расширение цилиндрического слоя. В цилиндрическом слое главные значения тензора малых деформаций равны $\varepsilon_r = u'$, $\varepsilon_\varphi = u/r$, $\varepsilon_z = 0$, поэтому уравнение (1.1) сводится к нелинейному дифференциальному уравнению

$$\frac{2\varkappa}{\sqrt{3}}\sqrt{(u')^2 - \frac{u'u}{r} + \frac{u^2}{r^2}} = u' + \frac{u}{r}, \qquad (2.1)$$

общее решение которого $u = C/r^\alpha$ с константой $C > 0$ и

$$\alpha = \frac{1 + 2\varkappa^2/3 - 2\varkappa\sqrt{1 - \varkappa^2/3}}{1 - 4\varkappa^2/3}$$

имеет смысл, только если $\varkappa \leqslant \sqrt{3}$. При $\varkappa > \sqrt{3}$ плоская деформация сыпучей среды, в отличие от осевого расширения, невозможна, так как происходит заклинивание частиц [2]. Значение α удовлетворяет условию $\alpha \leqslant 1$, что гарантирует неотрицательность правой части уравнения (2.1). Константа $C = u_0\, r_0^\alpha$ определяется в силу граничного условия на внутренней поверхности.

В соответствии с формулами (1.2) напряжения в слое равны

$$\frac{\sigma_r}{p} = -\frac{2\varkappa^2}{3}\,\frac{1 + 2\alpha}{1 - \alpha} - 1, \qquad \frac{\sigma_\varphi}{p} = \frac{2\varkappa^2}{3}\,\frac{2 + \alpha}{1 - \alpha} - 1, \qquad \frac{\sigma_z}{p} = -\frac{2\varkappa^2}{3} - 1.$$

Интегрируя уравнение равновесия

$$\sigma_r' + (\sigma_r - \sigma_\varphi)/r = 0,$$

с учетом граничного условия при $r = r_1$ находим

$$p = \frac{\beta q}{2\varkappa\sqrt{1 - \varkappa^2/3}}\Big(\frac{r_1}{r}\Big)^\beta, \qquad \beta = 2\varkappa\,\frac{\sqrt{1 - \varkappa^2/3} - \varkappa}{1 - 4\varkappa^2/3}. \tag{2.2}$$

Показатель степени β монотонно возрастает от нуля до двух при изменении параметра внутреннего трения $\varkappa$ от нуля до $\sqrt{3}$. Поэтому напряжения в слое всегда уменьшаются по модулю вдоль радиуса.

При конечных деформациях среды полученное точное решение задачи не имеет смысла. В этом случае перемещения и напряжения могут быть найдены с помощью численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. С учетом цилиндрической симметрии главные значения логарифмического тензора Генки равны $h_r = \ln R'$, $h_\varphi = \ln(R/r)$, $h_z = 0$. Дилатансионное уравнение (1.1) принимает вид

$$\varkappa\sqrt{\Big(\ln\frac{rR'}{R}\Big)^2 + (\ln R')^2 + \Big(\ln\frac{R}{r}\Big)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}\,\ln\frac{RR'}{r}.$$

Здесь параметр $\varkappa$ зависит от плотности среды $\rho = \rho_0 r/(RR')$. Для того чтобы разрешить это уравнение относительно производной, можно применить, например, метод Ньютона — Рафсона с последующим интегрированием методом Эйлера.

Дифференциальное уравнение равновесия относительно гидростатического давления записывается в виде

$$\frac{d\,(Ap)}{dR} + \frac{(A - B)p}{R} = 0,$$

где

$$A = \frac{2\varkappa^2}{3}\,\frac{\ln(r(R')^2/R)}{\ln(RR'/r)} - 1, \qquad B = -\frac{2\varkappa^2}{3}\,\frac{\ln(r^2R'/R^2)}{\ln(RR'/r)} - 1 \text{ —}$$

функции, используемые для определения напряжений: $\sigma_r = Ap$ и $\sigma_\varphi = Bp$. Так же как и в случае сферического слоя, это уравнение можно решить численно, используя схему Кранка — Николсона. Для тестирования вычислительного алгоритма использовалось точное решение (2.2) в рамках теории малых деформаций.

Характерное распределение плотности в цилиндрическом слое, полученное в расчетах при $\varkappa_0 = 0{,}5$, $n = 1$, приведено на рис. 4. На рис. 5 представлено распределение напряжений σ_r и σ_φ внутри слоя при тех же значениях параметров задачи, что и на рис. 4.

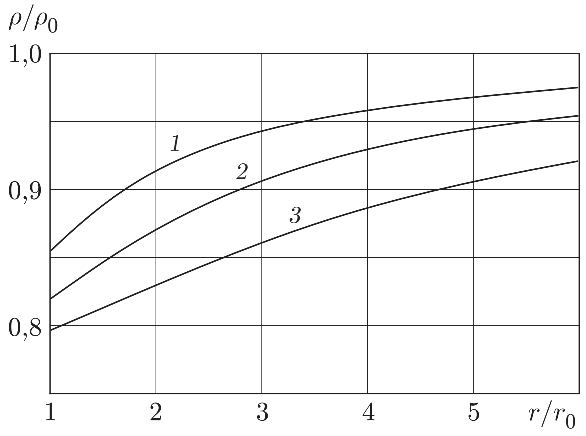

Рис. 4

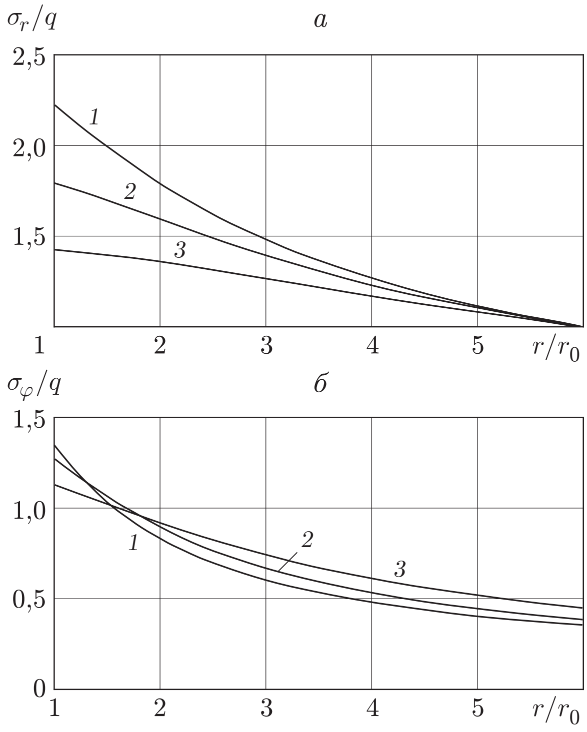

Рис. 5

Рис. 4. Распределение плотности в цилиндрическом слое ($\varkappa_0 = 0{,}5$, $n = 1$):
1 — $u_0/r_0 = 0{,}5$; *2* — $u_0/r_0 = 1$; *3* — $u_0/r_0 = 2$

Рис. 5. Распределение напряжений σ_r (*а*) и σ_φ (*б*) в цилиндрическом слое ($\varkappa_0 = 0{,}5$, $n = 1$):
1 — $u_0/r_0 = 0{,}5$; *2* — $u_0/r_0 = 1$; *3* — $u_0/r_0 = 2$

Из анализа приведенных результатов следует, что при изменении радиуса полости на одну и ту же величину в цилиндрическом слое процесс дилатансии среды, сопровождающийся релаксацией касательных напряжений (переходом напряженного состояния среды в гидростатическое), происходит медленнее, чем в сферическом слое. Это обусловлено ограничением степени свободы движения частиц в направлении оси z, вследствие чего интенсивность сдвига в случае цилиндрической симметрии всегда меньше, чем в случае сферически-симметричного движения.

В заключение следует отметить, что полученные точные и приближенные решения могут быть использованы для тестирования алгоритмов численной реализации математических моделей механики сыпучей среды.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бэтчелор Дж.** Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973.
2. **Садовская О. В.** Математическое моделирование в задачах механики сыпучих сред / О. В. Садовская, В. М. Садовский. М.: Физматлит, 2008.
3. **Садовская О. В., Садовский В. М.** К теории конечных деформаций сыпучей среды // Прикл. математика и механика. 2007. Т. 71, вып. 1. С. 102–121.
4. **Марчук Г. И.** Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989.

Поступила в редакцию 13/II 2008 г.