УДК 517.946

О ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЛОКАЛИЗАЦИИ ПЕРЕХОДНЫХ СЛОЕВ В ЗАДАЧАХ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

К. Б. Павлов

(Москва)

Показано, что на основе решений типа температурных волн могут быть построены решения, описывающие локализованные в пространстве температурные переходные слои.

Процессы теплопередачи в средах с постоянной теплопроводностью и объемным выделением или поглощением тепла могут быть описаны решениями типа тепловых волн, для которых характерно наличие поверхности слабого разрыва, разделяющей области с равным нулю и отличным от нуля градиентом температуры. На это в частном случае поглощающих сред указывалось в [1, 2].

В данной работе исследуется принципиальная возможность существования локализованных в пространстве температурных переходных слоев с grad $T \neq 0$, ограниченных двумя поверхностями слабого разрыва, вне которых $T = \text{const}$. Рассматриваются решения типа тепловых волн в среде, в которой могут действовать тепловые источники или тепловые стоки.

Определим стационарное распределение температуры $T(z)$ в полупространстве $z > 0$, заполненном указанной средой. Если на плоскости $z = 0$ поддерживается постоянное значение температуры $T(0) = T_w = \text{const}$, а $T(\infty) = T_0 = \text{const}$, то функции

$$T(z) = \begin{cases} T_0 - \dfrac{\gamma}{2a}(z-\zeta_0)^2 & \text{при} \quad 0 \leqslant z \leqslant \zeta_0 \\ T_0 & \text{при} \quad \zeta_0 \leqslant z < \infty \end{cases}$$

$$\zeta_0 = \left[\frac{2a}{\gamma}(T_0 - T_w)\right]^{1/2} \tag{1}$$

являются решением задачи

$$a\frac{d^2T}{dz^2} + \gamma\theta(|T - T_0|) = 0, \qquad \theta(\alpha = 0) = 0, \qquad \theta(\alpha > 0) = 1$$

$$T(0) = T_w, \qquad T(\infty) = T_0, \qquad \frac{dT}{dz}(\infty) = 0$$

$$T(\zeta_0 - 0) = T(\zeta_0 + 0), \qquad \frac{dT}{dz}(\zeta_0 - 0) = \frac{dT}{dz}(\zeta_0 + 0)$$

и описывают искомое распределение температуры. Здесь ζ_0 — положение неподвижного фронта тепловой волны, причем $T(\zeta_0) = T_0$, $dT/dz\,(\zeta_0) = 0$; a — коэффициент температуропроводности; постоянный коэффициент γ положителен в случае тепловых источников и отрицателен в случае тепловых стоков, мощность которых определяется величиной $|\gamma|$. При $\gamma > 0$ $T_w \leqslant T(z) \leqslant T_0$, при $\gamma < 0$ $T_0 \leqslant T(z) \leqslant T_w$.

Если температура поверхности $z = 0$ не остается постоянной, то распределение температуры должно быть определено при решении следующей нестационарной задачи:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \gamma\theta(|T - T_0|)$$

$$T(z, 0) = T_0, \quad T(0, t) = T_w(t), \quad T(\infty, t) = T_0, \quad \frac{\partial T}{\partial z}(\infty, t) = 0$$

$$T[\zeta(t) - 0, t] = T(\zeta(t) + 0, t], \quad \frac{\partial T}{\partial z}[\zeta(t) - 0, t] = \frac{\partial T}{\partial z}[\zeta(t) + 0, t]$$

где $z = \zeta(t)$ — положение движущегося фронта тепловой волны.

В частности, если

$$T_w(t) = T_0 + \frac{a\gamma}{v^2}\left(1 + \frac{v^2}{a}t - \exp\frac{v^2}{a}t\right), \quad v = \text{const} > 0 \tag{2}$$

то распределение температуры в среде при $z \geqslant 0$ имеет вид

$$T(z, t) = \begin{cases} T_0 + \dfrac{a\gamma}{v^2}\left[1 - \exp -\dfrac{v}{a}(z - vt)\right] - \dfrac{\gamma}{v}(z - vt) & \text{при } 0 \leqslant z \leqslant \zeta(t) \\ T_0 & \text{при } \zeta(t) \leqslant z < \infty \end{cases}$$

$$\zeta(t) = vt \tag{3}$$

В этом случае в среде с постоянной скоростью v движется фронт тепловой волны $z = \zeta(t)$, за которым при $\zeta(t) \leqslant z < \infty$ находится невозмущенная среда с постоянной температурой $T(z) \equiv T_0$. Отметим, что, так как при $\gamma > 0$ в момент времени $t = t_*$ $T_w(t_*) = 0$, то при $\gamma > 0$ выражения (2), (3) имеют смысл лишь при $0 \leqslant t \leqslant t_*$.

Анализ решений типа тепловых волн (1) или (3) позволяет заключить, что, когда в среде одновременно существуют зоны с тепловыми стоками и источниками, то изменение температуры может быть полностью локализовано в переходном слое конечной толщины, вне которого температура постоянна.

Например, в среде, заполняющей бесконечное пространство $-\infty < z < \infty$ с предельными условиями $T(-\infty) = T_{01} = \text{const}$, $T(+\infty) = T_{02} = \text{const}$, причем $T_{02} > T_{01}$, может быть указано следующее стационарное распределение температуры:

$$T(z) = \begin{cases} T_{01} & \text{при } -\infty < z \leqslant \zeta_1 \\ T_{01} - \dfrac{\gamma_1}{2a}(z-\zeta_1)^2 & \text{при } \zeta_1 \leqslant z \leqslant 0 \\ T_{02} - \dfrac{\gamma_2}{2a}(z-\zeta_2)^2 & \text{при } 0 \leqslant z \leqslant \zeta_2 \\ T_{02} & \text{при } \zeta_2 \leqslant z < \infty \end{cases}$$

$$\zeta_1 = -\sqrt{-\frac{2\gamma_2 a}{\gamma_1}\,\frac{T_{02}-T_{01}}{\gamma_2-\gamma_1}}, \qquad \zeta_2 = \sqrt{-\frac{2\gamma_1 a}{\gamma_2}\,\frac{T_{02}-T_{01}}{\gamma_2-\gamma_1}} \tag{4}$$

Выражения (4) получены в предположении, что на отрезке $(\zeta_1, 0)$ действуют тепловые стоки $\gamma_1 = \text{const} < 0$, а на отрезке $(0, \zeta_2)$ — тепловые источники $\gamma_2 = \text{const} > 0$; на прямой $-\infty < z < \infty$ функция $T(z)$ непрерывна всюду вместе со своей первой производной dT/dz, являясь ограниченным решением задачи

$$a\frac{d^2T}{dz^2} + F(z, T) = 0$$

$$T(-\infty) = T_{01}, \quad T(+\infty) = T_{02}, \quad \frac{dT}{dz}(\pm\infty) = 0$$

$$T(-0) = T(+0), \quad \frac{dT}{dz}(-0) = \frac{dT}{dz}(+0)$$

$$T(\zeta_{1,2} - 0) = T(\zeta_{1,2} + 0), \quad \frac{dT}{dz}(\zeta_{1,2} - 0) = \frac{dT}{dz}(\zeta_{1,2} + 0)$$

$$F(z, T) = \begin{cases} \gamma_1\theta(T - T_{01}) & \text{при } z < 0 \\ \gamma_2\theta(T_{02} - T) & \text{при } z > 0 \end{cases} \tag{5}$$

а на поверхностях $z = 0$ и $z = \zeta_1, \zeta_2$ могут испытывать разрыв производные $d^m T/dz^m$, $m \geqslant 2$.

Если дополнительно предположить, что среда движется с постоянной скоростью $w = \text{const}$, перпендикулярно плоскости $z = 0$, то стационарное распределение температуры в этом случае должно быть найдено при решении задачи

$$a\frac{d^2T}{dz^2} - w\frac{dT}{dz} + F(z, T) = 0$$

$$T(-\infty) = T_{01}, \quad T(+\infty) = T_{02}, \quad \frac{dT}{dz}(\pm\infty) = 0$$

$$T(-0) = T(+0), \quad \frac{dT}{dz}(-0) = \frac{dT}{dz}(+0) \tag{6}$$

$$T(\zeta_{1,2} - 0) = T(\zeta_{1,2} + 0), \quad \frac{dT}{dz}(\zeta_{1,2} - 0) = \frac{dT}{dz}(\zeta_{1,2} + 0)$$

где $F(z, T)$ определено в соответствии с выражениями (5). Решение задачи (5), (6 записывается в виде

$$T(z) = \begin{cases} T_{01} & \text{при } -\infty < z \leqslant \zeta_1 \\ T_{01} + \dfrac{\gamma_1 a}{w^2}\left[1 - \exp\dfrac{w}{a}(z-\zeta_1)\right] + \dfrac{\gamma_1}{w}(z-\zeta_1) & \text{при } \zeta_1 \leqslant z \leqslant 0 \\ T_{02} + \dfrac{\gamma_2 a}{w^2}\left[1 - \exp\dfrac{w}{a}(z-\zeta_2)\right] + \dfrac{\gamma_2}{w}(z-\zeta_2) & \text{при } 0 \leqslant z \leqslant \zeta_2 \\ T_{02} & \text{при } \zeta_2 \leqslant z < \infty \end{cases} \tag{7}$$

причем значения ζ_1 и ζ_2 должны быть найдены из алгебраической системы

$$T_{01}+\frac{\gamma_1 a}{w^2}\left[1-\exp\left(-\frac{w}{a}\zeta_1\right)\right]-\frac{\gamma_1}{w}\zeta_1=T_{02}+\frac{\gamma_2 a}{w^2}\left[1-\exp\left(-\frac{w}{a}\zeta_2\right)\right]-\frac{\gamma_2}{w}\zeta_2$$

$$\frac{\gamma_1}{w}\left[1-\exp\left(-\frac{w}{a}\zeta_1\right)\right]=\frac{\gamma_2}{w}\left[1-\left(\exp\left(-\frac{w}{a}\zeta_2\right)\right]\right. \tag{8}$$

которая при произвольных значениях w, γ_1 и γ_2 должна быть решена численно. В аналитической форме решения системы (8) могут быть получены при $w=0$; в этом случае выражения (7) соответственно записываются в форме выражений (4). Кроме того, система (8) имеет аналитическое выражение для решений при $-\gamma_1=\gamma_2\equiv\gamma$

$$\zeta_2=-\zeta_1+w\gamma^{-1}(T_{02}-T_{01})$$

$$\zeta_1=-\frac{a}{w}\ln\left\{1+\sqrt{1-\exp\left[-\frac{w^2}{a\gamma}(T_{02}-T_{01})\right]}\right\}\quad \text{при} \quad w>0$$

$$\zeta_1=-\frac{a}{w}\ln\left\{1-\sqrt{1-\exp\left[-\frac{w^2}{a\gamma}(T_{02}-T_{01})\right]}\right\}\quad \text{при} \quad w<0$$

Таким образом, присутствие в среде тепловых источников и стоков, нелинейно зависящих от температуры, может обеспечить существование локализованных в пространстве переходных тепловых слоев. В рассмотренных случаях их толщина стремится к нулю, если $T_{02}-T_{01}\to 0$ или $-\gamma_1,\ \gamma_2\to\infty$. Если разность $T_{02}-T_{01}$ остается конечной величиной, а $-\gamma_1,\ \gamma_2\to\infty$, то на кривой распределения температуры образуется скачок — температурный «уступ».

Отметим, что переходные температурные слои могут быть также обнаружены при рассмотрении сред с тепловыми источниками и стоками более общего вида, чем рассмотренный в данный работе, и при ином их относительном расположении, например, если они удалены друг от друга. Исследование структуры переходных температурных слоев и их перемещений в пространстве представляет интерес при изучении высокотемпературных гидродинамических явлений, сопровождающихся излучением и поглощением световых квантов [3]. Однако проведение соответствующих аналитических исследований в этом случае существенно затруднено сложным характером действия тепловых источников и стоков, а также их сложной взаимосвязью.

Поступила 20 II 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мартинсон Л. К., Павлов К. Б.* К вопросу о пространственной локализации тепловых возмущений в теории нелинейной теплопроводности. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1972, т. 12, № 4, стр. 1048—1053.
2. *Павлов К. Б.* Нестационарные МГД-течения вязкопластических сред в плоских каналах. Магнитная гидродинамика, 1972, № 4, стр. 35—40.
3. *Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., «Наука», 1966.