УДК 534.83 + 532.552

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВИБРОЗАЩИТНОГО ЗАКРЕПЛЕНИЯ ТРУБОПРОВОДА

А. М. Ахтямов, Г. Ф. Сафина

Институт механики Уфимского научного центра РАН, 450000 Уфа
E-mails: AkhtyamovAM@mail.ru, SafinaGF@mail.ru

Показана двойственность решения задачи определения типа и параметров закрепления концов трубопровода по спектру собственных частот. Найден метод решения этой задачи. Приведены некоторые примеры.

Ключевые слова: виброзащитное закрепление, трубопровод, спектральная задача, обратная задача.

Введение. Трубопроводы являются важнейшими элементами топливных конструкций автомобилей, тракторов, судов, самолетов и т. п. Нередко их колебания приводят к дребезжанию, вызывающему неприятные ощущения у экипажа и пассажиров. Это обусловлено тем, что спектры частот колебаний трубопроводов иногда находятся в опасном для здоровья человека диапазоне. Для изменения частот колебаний трубопровода не всегда целесообразно менять его длину или прикреплять сосредоточенные массы. Поэтому для создания комфортных условий для пассажиров требуется определить типы закрепления трубопровода, обеспечивающие необходимый (безопасный) диапазон частот его колебаний. При этом речь идет не только об основном тоне колебаний, но и об обертонах. Данная проблема связана с задачами шумоподавления [1–3], акустической диагностики [4–9] и теории обратных задач математической физики [10, 11].

Целью настоящей работы является определение параметров закрепления трубопровода, заполненного жидкостью, по собственным частотам его изгибных колебаний. В работах [12–19] изучались задачи диагностирования закреплений струн, мембран и пластин. Однако для трубопроводов поставленная задача рассматривается, по-видимому, впервые. К тому же в отличие от работ [12–19] в данной работе отыскиваются не два краевых условия, а все четыре, что существенно усложняет задачу и требует использования иных методов ее решения.

Задачи вычисления собственных частот изгибных колебаний трубопровода исследовались в работах [20, 21]. Однако обратная задача — определение краевых условий по собственным частотам — в этих работах не изучалась. К тому же в [20, 21] рассматривались лишь приближенные методы (например, методы Галеркина и Рэлея — Ритца), неприменимые для решения поставленной задачи.

1. Прямая задача. Уравнение малых свободных колебаний трубопровода, заполненного жидкостью (с учетом ее несжимаемости), имеет следующий вид [20] (см. также [21. С. 193–196]):

$$EI\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (m + \bar m)\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \bar m\,\frac{p_0}{\rho_0}\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 06-01-00354-а) и АН Республики Башкортостан.

Здесь $I = (\pi/4)(r^4 - r_1^4)$ — момент инерции сечения трубы; EI — жесткость сечения трубы; p_0 — критическое внутреннее давление; $m = \pi(r^2 - r_1^2)\rho$, $\bar{m} = \pi r_1^2 \rho_0$ — масса трубы и жидкости на единицу длины l трубы соответственно; r, r_1 — внешний и внутренний радиусы поперечного сечения соответственно; ρ — плотность материала трубы; ρ_0 — плотность жидкости.

После введения безразмерных переменных $\tilde{x} = x/l$, $\tilde{w} = w/r$, $\tilde{t} = t/\tau$ и представления прогиба в виде $\tilde{w}(\tilde{x}, \tilde{t}) = X(\tilde{x})\,\mathrm{e}^{i\omega\tilde{t}}$ исходное уравнение сводится к обыкновенному линейному дифференциальному уравнению 4-го порядка с постоянными коэффициентами

$$X^{(4)} + aX'' - \omega^2 X = 0, \tag{1}$$

где $a = \bar{m}l^2 p_0/(EI\rho_0)$.

Линейно независимыми решениями уравнения (1) являются функции $X_j = X_j(\tilde{x}, \omega) = \mathrm{e}^{\lambda_j \tilde{x}}$ $(j = 1, 2, 3, 4)$, где $\lambda_j = \lambda_j(\omega)$ — различные корни соответствующего характеристического уравнения.

Для постановки спектральной задачи о свободных колебаниях трубопровода необходимо также задать краевые условия. Поскольку рассматриваются изгибные колебания трубопровода, краевые условия задачи аналогичны краевым условиям задачи о свободных изгибных колебаниях стержня. В общем случае, в котором учитываются заделка, свободное опирание, свободный конец, плавающая заделка, различные виды упругого закрепления, краевые условия имеют следующий вид [14, 22]:

$$U_1(X) = a_1 X(0) + a_4 X'''(0) = 0, \qquad U_2(X) = a_2 X'(0) + a_3 X''(0) = 0; \tag{2}$$

$$U_3(X) = b_1 X(1) + b_4 X'''(1) = 0, \qquad U_4(X) = b_2 X'(1) + b_3 X''(1) = 0. \tag{3}$$

Уравнение для частот получается из условия равенства нулю характеристического определителя [22]:

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} U_1(X_1) & U_1(X_2) & U_1(X_3) & U_1(X_4) \\ U_2(X_1) & U_2(X_2) & U_2(X_3) & U_2(X_4) \\ U_3(X_1) & U_3(X_2) & U_3(X_3) & U_3(X_4) \\ U_4(X_1) & U_4(X_2) & U_4(X_3) & U_4(X_4) \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Некоторые приближенные методы вычисления корней характеристического определителя изложены в [23].

2. Обратная задача. Матрицу, составленную из коэффициентов a_j форм $U_1(X_k)$ и $U_2(X_k)$, обозначим через A, а матрицу, составленную из коэффициентов b_j форм $U_3(X_k)$ и $U_4(X_k)$, — через B:

$$A = \begin{Vmatrix} a_1 & 0 & 0 & a_4 \\ 0 & a_2 & a_3 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad B = \begin{Vmatrix} b_1 & 0 & 0 & b_4 \\ 0 & b_2 & b_3 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Миноры второго порядка, образованные из i-го и j-го столбцов матриц A и B, будем обозначать через A_{ij} и B_{ij}.

Заметим, что определение краевых условий не означает восстановление всех коэффициентов a_j и b_j, поскольку, например, краевые условия $X(0) = 0$, $X'(0) = 0$ и $X(0) - X'(0) = 0$, $X(0) + X'(0) = 0$ эквивалентны, а их коэффициенты a_j различны.

Целью данной работы является не точное распознавание всех коэффициентов a_j и b_j, а определение краевых условий, что равносильно нахождению линейных оболочек $\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \rangle$ и $\langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2 \rangle$, построенных на векторах

$$\boldsymbol{a}_1 = (a_1, 0, 0, a_4)^{\mathrm{т}}, \quad \boldsymbol{a}_2 = (0, a_2, a_3, 0)^{\mathrm{т}}, \quad \boldsymbol{b}_1 = (b_1, 0, 0, b_4)^{\mathrm{т}}, \quad \boldsymbol{b}_2 = (0, b_2, b_3, 0)^{\mathrm{т}}.$$

В терминах задачи (1)–(3) обратная задача восстановления краевых условий (2), (3) может быть сформулирована следующим образом: коэффициенты a_j и b_j форм $U_i(X_m)$ $(i, j, m = 1, 2, 3, 4)$ задачи (1)–(3) неизвестны. Ранги матриц A и B, составленных из этих коэффициентов, равны двум. Известны собственные значения ω_k задачи (1)–(3). Требуется восстановить линейные оболочки $\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \rangle$ и $\langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2 \rangle$.

3. Двойственность решения обратной задачи. Для упрощения вычислений необходимо ввести новые обозначения. Обозначим через C матрицу размерностью 4×8:

$$C = \begin{Vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{Vmatrix}. \tag{5}$$

Элементы матрицы C обозначим через c_{ij}, а миноры матрицы C, образованные из столбцов с номерами k_1, k_2, k_3, k_4, — через $M_{k_1k_2k_3k_4}$:

$$M_{k_1k_2k_3k_4} = \begin{vmatrix} c_{1k_1} & c_{1k_2} & c_{1k_3} & c_{1k_4} \\ c_{2k_1} & c_{2k_2} & c_{2k_3} & c_{2k_4} \\ c_{3k_1} & c_{3k_2} & c_{3k_3} & c_{3k_4} \\ c_{4k_1} & c_{4k_2} & c_{4k_3} & c_{4k_4} \end{vmatrix}.$$

В новых обозначениях краевые условия (2), (3) можно записать в виде

$$U_i(X_m) = \sum_{j=1}^{4} \left[c_{ij} X_m^{(j-1)}(0) + c_{i,4+j} X_m^{(j-1)}(1) \right], \qquad i = 1, 2, 3, 4. \tag{6}$$

В введенных обозначениях обратная задача формулируется следующим образом: коэффициенты c_{ij} задачи (1), (6) неизвестны; ранг матрицы C, составленной из этих коэффициентов, равен четырем; миноры A_{14}, A_{23}, B_{14}, B_{23} матриц A и B, из которых составлена матрица C, равны нулю; известны собственные значения ω_k задачи (1), (6). Требуется восстановить линейную оболочку $\langle \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3, \boldsymbol{c}_4 \rangle$, построенную на векторах $\boldsymbol{c}_i = (c_{i1}, c_{i2}, c_{i3}, c_{i4}, c_{i5}, c_{i6}, c_{i7}, c_{i8})^{\mathrm{T}}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$.

Отметим, что нахождение линейной оболочки $\langle \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3, \boldsymbol{c}_4 \rangle$ эквивалентно нахождению матрицы C с точностью до линейной эквивалентности [24].

Покажем, что поставленная обратная задача имеет либо одно, либо два решения. Наряду с формами (6) рассмотрим следующие линейные однородные формы:

$$\tilde{U}_i(X_m) = \sum_{j=1}^{4} \left[\tilde{c}_{ij} X_m^{(j-1)}(0) + \tilde{c}_{i,4+j} X_m^{(j-1)}(1) \right], \qquad i = 1, 2, 3, 4. \tag{7}$$

Матрицу, составленную из коэффициентов $\tilde{c}_{ij}$, обозначим через $\tilde{C}$, ее миноры — через $\tilde{M}_{k_1k_2k_3k_4}$, а соответствующие миноры второго порядка — через $\tilde{A}_{k_1k_2}$ и $\tilde{B}_{k_3-4,k_4-4}$. Введем также следующие векторы:

$$\boldsymbol{c}_i^{+} = (\tilde{c}_{i1}, \tilde{c}_{i2}, \tilde{c}_{i3}, \tilde{c}_{i4}, \tilde{c}_{i5}, \tilde{c}_{i6}, \tilde{c}_{i7}, \tilde{c}_{i8})^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{c}_i^{-} = (\tilde{c}_{i5}, \tilde{c}_{i6}, -\tilde{c}_{i7}, -\tilde{c}_{i8}, \tilde{c}_{i1}, \tilde{c}_{i2}, -\tilde{c}_{i3}, -\tilde{c}_{i4})^{\mathrm{T}}, \qquad i = 1, 2, 3, 4.$$

Теорема (о двойственности решения обратной задачи)**.** *Пусть* $\operatorname{rank} C = \operatorname{rank} \tilde{C} = 4$. *Если собственные значения* $\{\omega_k\}$ *задачи* (1), (6) *и* $\{\tilde{\omega}_k\}$ *задачи* (1), (7) *с учетом их кратностей совпадают, то* $\langle \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3, \boldsymbol{c}_4 \rangle = \langle \boldsymbol{c}_1^{+}, \boldsymbol{c}_2^{+}, \boldsymbol{c}_3^{+}, \boldsymbol{c}_4^{+} \rangle$ *или* $\langle \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3, \boldsymbol{c}_4 \rangle = \langle \boldsymbol{c}_1^{-}, \boldsymbol{c}_2^{-}, \boldsymbol{c}_3^{-}, \boldsymbol{c}_4^{-} \rangle$.

Доказательство. Заметим, что определитель (4) можно представить в виде

$$\Delta(\omega_k) = \det(CD),$$

где

$$D = \left\| \begin{matrix} X_1(0) & X_2(0) & X_3(0) & X_4(0) \\ X_1'(0) & X_2'(0) & X_3'(0) & X_4'(0) \\ X_1''(0) & X_2''(0) & X_3''(0) & X_4''(0) \\ X_1'''(0) & X_2'''(0) & X_3'''(0) & X_4'''(0) \\ X_1(1) & X_2(1) & X_3(1) & X_4(1) \\ X_1'(1) & X_2'(1) & X_3'(1) & X_4'(1) \\ X_1''(1) & X_2''(1) & X_3''(1) & X_4''(1) \\ X_1'''(1) & X_2'''(1) & X_3'''(1) & X_4'''(1) \end{matrix} \right\|.$$

Используя формулу Бине — Коши [25. С. 39], получаем

$$\Delta(\omega_k) = \sum_{1 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_8 \leqslant 8} M_{k_1k_2k_3k_4} f_{k_1k_2k_3k_4}, \tag{8}$$

где $f_{k_1k_2k_3k_4}$ — миноры четвертого порядка матрицы D, составленные из строк с номерами k_1, k_2, k_3, k_4.

Так как $M_{k_1k_2k_3k_4} = 0$ при $k_3, k_4 \leqslant 4$, $k_1, k_2 \geqslant 5$, то, применяя теорему Лапласа для вычисления определителя и учитывая, что $\Delta(\omega_k) = 0$, получаем

$$\sum_{\substack{1 \leqslant k_1 < k_2 \leqslant 4 \\ 5 \leqslant k_3 < k_4 \leqslant 8}} M_{k_1k_2k_3k_4} f_{k_1k_2k_3k_4}(\omega_k) = 0, \tag{9}$$

где

$$M_{k_1k_2k_3k_4} = A_{k_1,k_2}\, B_{k_3-4,k_4-4} \qquad (A_{14} = A_{23} = B_{14} = B_{23} = 0). \tag{10}$$

Из общей теории линейных дифференциальных операторов следует, что функция $\Delta(\omega)$ является целой функцией порядка 1/2 (см. [26]). Отсюда следует, что характеристические определители $\Delta(\omega)$ и $\tilde\Delta(\omega)$ задач (1), (6) и (1), (7) соответственно связаны соотношением

$$\Delta(\omega) \equiv K\tilde\Delta(\omega), \tag{11}$$

где K — некоторая отличная от нуля константа.

Из (8) и (11) получаем

$$\begin{aligned} &[M_{1256} - K\tilde M_{1256}]f_{1256} + [M_{1257} - K\tilde M_{1257}]f_{1257} + \\ &\qquad + [M_{1268} - K\tilde M_{1268}]f_{1268} + [M_{1278} - K\tilde M_{1278}]f_{1278} + \\ &\qquad + [M_{1356} - K\tilde M_{1356}]f_{1356} + [M_{1357} - K\tilde M_{1357}]f_{1357} + \\ &\qquad + [M_{1368} - K\tilde M_{1368}]f_{1368} + [M_{1378} - K\tilde M_{1378}]f_{1378} + \\ &\qquad + [M_{2456} - K\tilde M_{2456}]f_{2456} + [M_{2457} - K\tilde M_{2457}]f_{2457} + \\ &\qquad + [M_{2468} - K\tilde M_{2468}]f_{2468} + [M_{2478} - K\tilde M_{2478}]f_{2478} + \\ &\qquad + [M_{3456} - K\tilde M_{3456}]f_{3456} + [M_{3457} - K\tilde M_{3457}]f_{3457} + \\ &\qquad\qquad + [M_{3468} - K\tilde M_{3468}]f_{3468} + [M_{3478} - K\tilde M_{3457}]f_{3478} \equiv 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Нетрудно показать следующее: 1) $f_{1356} = -f_{1257}$, $f_{1257} = -f_{1356}$, $f_{1268} = -f_{2456}$, $f_{1278} = f_{3456}$, $f_{1368} = f_{2457}$, $f_{1378} = -f_{3457}$, $f_{2478} = -f_{3468}$; 2) функции $f_{1256}(\omega_m)$, $f_{1257}(\omega_m)$, $f_{1268}(\omega)$, $f_{1278}(\omega)$, $f_{1357}(\omega)$, $f_{1368}(\omega)$, $f_{1378}(\omega)$, $f_{2468}(\omega)$, $f_{2478}(\omega)$, $f_{3478}(\omega)$ образуют линейно независимую систему функций. Отсюда следует двойственность решения обратной задачи. Действительно, из линейной независимости соответствующих функций вытекают равенства

$$M_{1256} = K\tilde{M}_{1256}; \tag{13}$$

$$M_{1357} = K\tilde{M}_{1357}; \tag{14}$$

$$M_{2468} = K\tilde{M}_{2468}; \tag{15}$$

$$M_{3478} = K\tilde{M}_{3478}; \tag{16}$$

$$M_{1257} - M_{1356} = K(\tilde{M}_{1356} - \tilde{M}_{1257}); \tag{17}$$

$$M_{1268} - M_{2456} = K(\tilde{M}_{1268} - \tilde{M}_{2456}); \tag{18}$$

$$M_{1378} - M_{3457} = K(\tilde{M}_{1378} - \tilde{M}_{3457}); \tag{19}$$

$$M_{2478} - M_{3468} = K(\tilde{M}_{2478} - \tilde{M}_{3468}); \tag{20}$$

$$M_{1278} + M_{3456} = K(\tilde{M}_{1278} + \tilde{M}_{3456}); \tag{21}$$

$$M_{1368} + M_{2457} = K(\tilde{M}_{1368} + \tilde{M}_{2457}). \tag{22}$$

Для доказательства рассмотрим пять случаев: 1) $M_{1256} \neq 0$; 2) $M_{1357} \neq 0$; 3) $M_{2468} \neq 0$; 4) $M_{3478} \neq 0$; 5) $M_{1256} = M_{1357} = M_{2468} = M_{3478} = 0$. Без ограничения общности будем считать, что $M_{1256} = K\tilde{M}_{1256} \neq 0$ (реализуется первый случай).

Из равенств $M_{1256} = A_{12}B_{12} = a_1a_2b_1b_2$, $\tilde{M}_{1256} = \tilde{A}_{12}\tilde{B}_{12} = \tilde{a}_1\tilde{a}_2\tilde{b}_1\tilde{b}_2$ следует, что элементы a_1, a_2, b_1, b_2, $\tilde{a}_1$, $\tilde{a}_2$, $\tilde{b}_1$, $\tilde{b}_2$ матрицы C отличны от нуля.

Разделим 1, 2, 3, 4-ю строки матрицы C на a_1, a_2, b_1, b_2 соответственно, а 1, 2, 3, 4-ю строки матрицы $\tilde{C}$ на $\tilde{a}_1$, $\tilde{a}_2$, $\tilde{b}_1$, $\tilde{b}_2$ соответственно. В результате этих преобразований матрицы C и $\tilde{C}$ с точностью до линейной эквивалентности принимают вид

$$C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b_3 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad \tilde{C} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \tilde{a}_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \tilde{a}_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \tilde{b}_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \tilde{b}_3 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Из этого представления матриц C и $\tilde{C}$ и равенства (13) следует, что $K = 1$.

Из (14), (17) вытекает, что $a_3b_3 = \tilde{a}_3\tilde{b}_3$, $b_3 - a_3 = \tilde{b}_3 - \tilde{a}_3$, откуда согласно теореме Виета получаем следующую альтернативу:

$$a_3 = \tilde{a}_3, \quad b_3 = \tilde{b}_3 \quad \text{или} \quad a_3 = -\tilde{b}_3, \quad b_3 = -\tilde{a}_3.$$

Аналогично из (15), (18) следует, что

$$a_4 = \tilde{a}_4, \quad b_4 = \tilde{b}_4 \quad \text{или} \quad a_4 = -\tilde{b}_4, \quad b_4 = -\tilde{a}_4.$$

Таким образом, первый случай $M_{1256} = K\tilde{M}_{1256} \neq 0$ распадается на четыре случая:

1) $a_3 = \tilde{a}_3$, $b_3 = \tilde{b}_3$, $a_4 = \tilde{a}_4$, $b_4 = \tilde{b}_4$;
2) $a_3 = -\tilde{b}_3$, $b_3 = -\tilde{a}_3$, $a_4 = -\tilde{b}_4$, $b_4 = -\tilde{a}_4$;
3) $a_3 = -\tilde{b}_3$, $b_3 = -\tilde{a}_3$, $a_4 = \tilde{a}_4$, $b_4 = \tilde{b}_4$;
4) $a_3 = \tilde{a}_3$, $b_3 = \tilde{b}_3$, $a_4 = -\tilde{b}_4$, $b_4 = -\tilde{a}_4$.

Однако в действительности реализуется не четыре, а два случая (случаи 3 и 4 являются частными случаями 1 и 2). Действительно, пусть реализуется случай 3. Тогда из (21) или (22) вытекает равенство

$$(a_3 + b_3)(a_4 + b_4) = 0. \tag{23}$$

Отсюда получаем $a_3+b_3=0$ или $a_4+b_4=0$. При $a_3+b_3=0$ случай 3 сводится к случаю 1, так как $-\tilde{b}_3=a_3=-b_3=\tilde{a}_3$ и, следовательно, $\tilde{b}_3=b_3$, $\tilde{a}_3=a_3$. При $a_4+b_4=0$ случай 3 сводится к случаю 2, так как $\tilde{a}_4=a_4=-b_4=-\tilde{b}_4$ и, следовательно, $\tilde{b}_4=-a_4$, $\tilde{a}_4=-b_4$. В отличие от (21) или (22) остальные равенства (13)–(20) не дают новых ограничений. Таким образом, в случае 3 имеет место случай 1 или случай 2. В случае 4, как и в случае 3, из (21) или (22) вытекает равенство (23). При $a_3+b_3=0$ случай 4 сводится к случаю 2, а при $a_4+b_4=0$ случай 4 сводится к случаю 1. В результате получаем $\langle \boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2,\boldsymbol{c}_3,\boldsymbol{c}_4\rangle = \langle \boldsymbol{c}_1^+,\boldsymbol{c}_2^+,\boldsymbol{c}_3^+,\boldsymbol{c}_4^+\rangle$ или $\langle \boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2,\boldsymbol{c}_3,\boldsymbol{c}_4\rangle = \langle \boldsymbol{c}_1^-,\boldsymbol{c}_2^-,\boldsymbol{c}_3^-,\boldsymbol{c}_4^-\rangle$.

Таким образом, решение обратной задачи двойственно. Теорема доказана.

Отметим, что при $\langle \boldsymbol{c}_1^+,\boldsymbol{c}_2^+,\boldsymbol{c}_3^+,\boldsymbol{c}_4^+\rangle = \langle \boldsymbol{c}_1^-,\boldsymbol{c}_2^-,\boldsymbol{c}_3^-,\boldsymbol{c}_4^-\rangle$ два решения (кратные решения) совпадают. Этот случай реализуется, например, при закреплении заделка — заделка.

Таким образом, задача отыскания неизвестных краевых условий по собственным частотам изгибных колебаний трубопровода имеет два решения. Для построения этих решений можно использовать два метода, основанные на представлении характеристического определителя в виде бесконечного произведения [14]:

$$\Delta(\omega) \equiv K \prod_{k=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{\omega}{\omega_k}\Big).$$

Однако при реализации эти методы оказываются неэффективными из-за значительного накопления ошибок при вычислении соответствующего бесконечного произведения. Поэтому в настоящей работе применен другой метод, основанный на решении системы линейных алгебраических уравнений.

4. Метод отыскания краевых условий. Пусть ω_k — девять собственных частот из всего спектра задачи (1), (6). Тогда равенства $\Delta(\omega_k)=0$ образуют систему девяти линейных алгебраических уравнений относительно десяти неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{aligned}\Delta(\omega_k) = x_1 f_{1257}(\omega_k) + x_2 f_{1268}(\omega_k) + x_3 f_{1368}(\omega_k) + x_4 f_{1278}(\omega_k) + x_5 f_{1378}(\omega_k) +{}\\ + x_6 f_{2478}(\omega_k) + x_7 f_{1357}(\omega_k) + x_8 f_{2468}(\omega_k) + x_9 f_{1256}(\omega_k) + x_{10} f_{3478}(\omega_k) = 0.\end{aligned} \tag{24}$$

Здесь

$$\begin{gathered} x_1 = M_{1257} - M_{1356}, \quad x_2 = M_{1268} - M_{2456}, \quad x_3 = M_{1368} + M_{2457},\\ x_4 = M_{1278} + M_{3456}, \quad x_5 = M_{1378} - M_{3457}, \quad x_6 = M_{2478} - M_{3468},\\ x_7 = M_{1357}, \quad x_8 = M_{2468}, \quad x_9 = M_{1256}, \quad x_{10} = M_{3478}. \end{gathered} \tag{25}$$

Если $\operatorname{rank} \| f_{k_1k_2k_3k_4}(\omega_k) \| = 9$ (данная матрица имеет размерность 10×9), то система линейных алгебраических уравнений (24) имеет единственное (с точностью до постоянного множителя) решение $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$. По значениям $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ находятся (с точностью до эквивалентных) две искомые матрицы C. Приведем некоторые примеры.

Пример 1. Свободная опора — заделка. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$X^{(4)} + 2X'' - \omega^2 X = 0. \tag{26}$$

Пусть известны девять собственных частот ω_k задачи (26), (2), (3): $\omega_1 = 14{,}65$, $\omega_2 = 49{,}10$, $\omega_3 = 103{,}34$, $\omega_4 = 177{,}34$, $\omega_5 = 271{,}09$, $\omega_6 = 384{,}58$, $\omega_7 = 670{,}79$, $\omega_8 = 843{,}504$, $\omega_9 = 1035{,}96$. Найдем соответствующие им краевые условия. С помощью вычислений на компьютере получаем решение системы (24): $x_1 = K$, $x_i = 0$, $i = 2, 3, \ldots, 10$. Здесь и далее $K = \mathrm{const} \neq 0$ (данные приводятся с точностью до двух знаков после запятой; реальные вычисления проводились на компьютере с числом значащих цифр, равным 40).

Из равенства $x_1 = M_{1257} - M_{1356} = K$ следует, что $M_{1257} \neq 0$ или $M_{1356} \neq 0$ (иначе ранги матриц A и B были бы равны нулю, что противоречит тому, что их ранги равны двум). Найдем матрицы C, соответствующие этим случаям.

1. Пусть $M_{1257} \neq 0$. Тогда $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, $b_1 \neq 0$, $b_3 \neq 0$. Отсюда получаем, что матрица C (с точностью до линейной эквивалентности) имеет вид

$$C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Из равенств $M_{1357} = 0$, $M_{1256} = 0$ получаем $a_3 = 0$, $b_2 = 0$, а из равенств $x_3 = M_{1368} + M_{2457} = 0$, $x_4 = M_{1278} + M_{3456} = 0$ имеем $a_4 = 0$, $b_4 = 0$.

Следовательно, матрица C имеет вид

$$C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

2. Пусть $M_{1356} \neq 0$. Тогда тем же способом, что и в случае $M_{1257} \neq 0$, находим

$$C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Таким образом, в соответствии с теоремой получаем два решения:

1) заделка — свободное опирание:

$$X(0) = 0, \quad X'(0) = 0, \quad X(1) = 0, \quad X''(1) = 0;$$

2) свободное опирание — заделка:

$$X(0) = 0, \quad X''(0) = 0, \quad X(1) = 0, \quad X'(1) = 0.$$

Пример 2. Упругое закрепление. Так же как и в примере 1, рассмотрим дифференциальное уравнение (26). Пусть известны девять собственных частот ω_k задачи (26), (2), (3): $\omega_1 = 21{,}67$, $\omega_2 = 60{,}87$, $\omega_3 = 120{,}06$, $\omega_4 = 198{,}98$, $\omega_5 = 297{,}66$, $\omega_6 = 416{,}08$, $\omega_7 = 712{,}15$, $\omega_8 = 889{,}79$, $\omega_9 = 1087{,}18$. В этом случае ранг системы (24) равен девяти, а отличными от нуля компонентами решения являются следующие:

$$x_5 = -3K, \qquad x_7 = K, \qquad x_{10} = -2K. \tag{27}$$

Из равенства $x_7 = M_{1357} \neq 0$ получаем $a_1 \neq 0$, $a_3 \neq 0$, $b_1 \neq 0$, $b_3 \neq 0$, откуда следует, что матрица C (с точностью до линейной эквивалентности) имеет вид

$$C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \qquad (K = 1).$$

Отсюда, а также из (25) и (27) получаем $a_2 = 0$, $b_2 = 0$, $a_4 - b_4 = -3$, $a_4 b_4 = -2$. Следовательно, $a_2 = 0$, $b_2 = 0$, $a_4 = -1$, $b_4 = 2$ или $a_2 = 0$, $b_2 = 0$, $a_4 = -2$, $b_4 = 1$.

Таким образом, матрица C (с точностью до линейной эквивалентности) имеет вид

$$C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

или

$$C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

В результате получаем следующие краевые условия:

$$X(0) - X'''(0) = 0, \quad X''(0) = 0, \quad X(1) + 2\,X'''(1) = 0, \quad X''(1) = 0$$

или

$$X(0) - 2\,X'''(0) = 0, \quad X''(0) = 0, \quad X(1) + X'''(1) = 0, \quad X''(1) = 0.$$

5. Выводы. В работе показана двойственность решения задачи определения типа закрепления концов трубопровода по спектру собственных частот. Найден метод решения этой задачи по девяти собственным частотам. Приведены некоторые примеры.

Двойственность решения задачи можно объяснить следующим образом. Если жидкость не течет по трубопроводу, то его концы равноправны, поэтому тип закрепления концов трубопровода определяется с точностью до перестановки. Например, если левый конец трубопровода закреплен пружиной с относительной жесткостью на изгиб, равной единице, а правый — пружиной с относительной жесткостью на изгиб, равной двум, то такой же спектр частот будут иметь колебания только такого трубопровода, у которого левый конец закреплен пружиной с относительной жесткостью на изгиб, равной двум, а правый — пружиной с относительной жесткостью на изгиб, равной единице.

Полученные результаты могут быть использованы для выбора типа закрепления, при котором колебания трубопровода имеют необходимый (безопасный) спектр частот. Кроме того, эти результаты применимы для акустической диагностики закрепления трубопровода (но в этом случае требуется очень высокая точность приборов, измеряющих собственные частоты).

Авторы выражают благодарность М. А. Ильгамову и С. Ф. Урманчееву за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Зинченко В. И.** Снижение шума на судах / В. И. Зинченко, В. К. Захаров. Л.: Судостроение, 1968.
2. **Лапин А. Д.** Резонансный поглотитель изгибных волн в стержнях и пластинах // Акуст. журн. 2002. Т. 48, № 2. С. 277–280.
3. **Oh S., Kim H., Park Y.** Active control of road booming noise in automotive interiors // J. Acoust. Soc. Amer. 2002. V. 111, N 1. P. 180–188.
4. **Артоболевский И. И.** Введение в акустическую динамику машин / И. И. Артоболевский, Ю. И. Бобровницкий, М. Д. Генкин. М.: Наука, 1979.
5. **Павлов Б. В.** Акустическая диагностика механизмов. М.: Машиностроение, 1971.
6. **Айнола Л. Я.** Обратная задача о собственных колебаниях упругих оболочек // Прикл. математика и механика. 1971. № 2. С. 358–364.
7. **Глаголевский Б. А.** Низкочастотные акустические методы контроля в машиностроении / Б. А. Глаголевский, И. Б. Москаленко. Л.: Машиностроение. Ленингр. отд-ние, 1977.
8. **Тукмаков А. Л., Аксенов И. Б.** О распознавании объектов на основе анализа акустического отклика при помощи функции числа состояний динамической системы // Изв. вузов. Авиац. техника. 2003. № 1. С. 62–67.

9. **Ваньков Ю. В., Казаков Р. Б., Яковлева Э. Р.** Собственные частоты изделия как информативный признак наличия дефектов // Техн. акустика [Электрон. журн.]. 2003. № 5. С. 1–7.
10. **Романов В. Г.** Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984.
11. **Юрко В. А.** Обратные спектральные задачи и их приложения. Саратов: Изд-во Сарат. пед. ин-та, 2001.
12. **Ахтямов А. М.** Об определении краевого условия по конечному набору собственных значений // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35, № 8. С. 1127–1128.
13. **Ахтямов А. М.** Распознавание закрепления кольцевой мембраны по собственным частотам ее колебаний // Изв. РАЕН. Математика. Мат. моделирование. Информатика. Управление. 2001. Т. 5, № 3. С. 103–110.
14. **Ахатов И. Ш., Ахтямов А. М.** Определение вида закрепления стержня по собственным частотам его изгибных колебаний // Прикл. математика и механика. 2001. Т. 65, вып. 2. С. 290–298.
15. **Ахтямов А. М.** Можно ли определить вид закрепления колеблющейся пластины по ее звучанию? // Акуст. журн. 2003. Т. 49, № 3. С. 325–331.
16. **Ахтямов А. М.** Диагностирование закрепления кольцевой пластины по собственным частотам ее колебаний // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2003. № 6. С. 137–147.
17. **Ахтямов А. М.** К единственности решения одной обратной спектральной задачи // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, № 8. С. 1011–1015.
18. **Akhtyamov A. M., Mouftakhov A. V.** Identification of boundary conditions using natural frequencies // Inverse Probl. Sci. Engng. 2004. V. 12, N 4. P. 393–408.
19. **Ахтямов А. М., Сафина Г. Ф.** Диагностирование относительной жесткости упругих краевых ребер цилиндрической оболочки // Техн. акустика [Электрон. журн.]. 2004. № 19. С. 1–8.
20. **Ильгамов М. А.** Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. М.: Наука, 1969.
21. **Томпсон Дж. М. Т.** Неустойчивости и катастрофы в науке и технике: Пер. с англ. М.: Мир, 1985.
22. **Вибрации** в технике: Справ.: В 6 т. М.: Машиностроение, 1978. Т. 1: Колебания линейных систем / Под ред. В. В. Болотина.
23. **Коллатц Л.** Задачи на собственные значения (с техническими приложениями). М.: Наука, 1968.
24. **Постников М. М.** Лекции по геометрии. Семестр 2. Линейная алгебра и дифференциальная геометрия. М.: Наука, 1979.
25. **Ланкастер П.** Теория матриц: Пер. с англ. М.: Наука, 1982.
26. **Левин Б. Я.** Распределение корней целых функций. М.: Гостехтеоретиздат, 1956.

Поступила в редакцию 6/IX 2005 г.,
в окончательном варианте — 11/I 2007 г.