при $x = x_1$ положим $T_2(x_1) = T_1(x_1)$, где $T_1(x)$ — неизвестная температура первого стержня. Имеем (в обозначениях системы (3))

$$-a_{23}y_3 - a_{24}y_4 = T_1(x_1), \qquad a_{44}y_3 + a_{44}y_4 = b_4$$

Отсюда

$$y_3 = \frac{T_1(x_1)\,a_{44} + b_4 a_{24}}{a_{43}a_{24} - a_{23}a_{44}}, \quad y_4 = \frac{-a_{23}b_4 - a_{43}T_1(x_1)}{a_{43}a_{24} - a_{23}a_{44}}, \quad T_2(x) = y_3 u_1^2(x) + y_4 u_2^2(x)$$

Условие в точке x_1 для остающегося стержня найдется из равенства тепловых потоков

$$T_1'(x_1) = \gamma^* [T_1(x_1) + T^*], \qquad \gamma^* = \frac{a_{43}a_{34} - a_{33}a_{44}}{a_{43}a_{24} - a_{23}a_{44}}, \qquad T^* = \frac{a_{23}b_4a_{34} - a_{33}b_4a_{24}}{a_{43}a_{24} - a_{33}a_{44}}$$

Постоянные y_1, y_2 ищутся при условиях

$$T_1'(x_0) = \gamma_1 (T^{(1)} - T_1(x_0)), \qquad T_1(x_1) = \gamma^* (T_1(x_1) + T^*)$$

из системы

$$a_{11}y_1 + a_{12}y_2 = b_1, \qquad [a_{31} - \gamma^* a_{21}]\, y_1 + [a_{32} - \gamma^* a_{22}]\, y_2 = \gamma^* T^* \tag{6}$$

Решив систему (6) и подставив выражения для γ^* и T^*, получим для y_1 и y_2 значения, тождественно совпадающие с выражениями (5), которыми разумеется определится решение системы (3).

Результат легко обобщается на произвольное число тел, в которых распространение тепла описывается одномерным уравнением. Действительно, систему n тел рассмотрим как два тела: первое $x_0 \leqslant x \leqslant x_{n-1}$, второе $x_{n-1} \leqslant x \leqslant x_n$. По доказанному, отбрасывая второе, найдем в точке контакта условие теплообмена в виде (2). Оставшуюся систему опять рассматриваем как два тела и т. д. Наконец, подобным образом можно из всей системы выделить какое-то k-е тело путем удаления остальных справа и слева.

Поступила 7 I 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Даниловская В. И. К вопросу определения температурных полей в роторах многоступенчатых турбин. Инженерный сб., 1954, т. 18.

О КОНВЕКТИВНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

А. А. Рухадзе (*Москва*)

В приближении метода геометрической оптики решается задача о конвективной неустойчивости сжимаемой идеально проводящей жидкости, находящейся в поле тяжести. Полученное дисперсионное уравнение проанализировано в области высоких и низких частот колебаний жидкости. Показано, что проводящая жидкость в поле тяжести может быть неустойчивой лишь по отношению к низкочастотным колебаниям, и получено условие неустойчивости, обобщающее известные критерии конвективной неустойчивости, полученные ранее.

1. Устойчивость сжимаемой проводящей жидкости, находящейся во внешних магнитном и гравитационном полях, в условиях, когда для описания малых колебаний жидкости применимы уравнения магнитной гидродинамики, диссипативными членами в которых можно пренебречь, исследовалась в работах [1, 2]. При получении спектра колебаний жидкости в этих работах использовались методы, по существу совпадающие с применяющимися для описания колебаний однородной среды, в то время как жидкость в ноле тяжести является существенно неоднородной. Такая непоследовательность приводит к зависимости спектра собственных значений от точки пространства. Кроме того, в работах [1, 2] в качестве уравнения состояния жидкости используется уравнение адиабаты Пуассона, что ограничивает общность рассмотрения.

В настоящей работе, с целью устранения указанных недостатков, к задаче конвективной неустойчивости жидкости в поле тяжести применяется метод геометрической оптики, причем уравнение состояния жидкости не конкретизируется. Метод геометрической оптики успешно применялся в работах [3-5] к задаче устойчивости слабонеоднородной плазмы, удерживаемой магнитным полем. Этот метод связан с теорией асимптотических решений уравнений вида

$$y'' + q(\omega, x)\, y = 0 \tag{1}$$

где $q(\omega, x)$ — медленно меняющаяся функция в области изменения x, а именно

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt{q(\omega, x)}} \ll 1 \tag{2}$$

Спектр собственных значений уравнения (1) в случае действительных $q(\omega, x)$ (ниже мы такой случай и рассматриваем) определяется соотношением

$$\int dx \sqrt{q(\omega, x)} = \pi n \tag{3}$$

где n — целые числа, значительно превосходящие единицу. Интегрирование в этом соотношении следует проводить по областям прозрачности ($q(\omega, x) \geqslant 0$), расположенным между точками перехода, в которых $q(\omega, x) = 0$. Если в области изменения x точки перехода отсутствуют и $q(\omega, x) > 0$, то интегрирование проводится по всей области изменения x. Последнее справедливо при любых недиссипативных граничных условиях для функции $y(x)$.

2. Система уравнений магнитной гидродинамики для идеально проводящей жидкости, при условии пренебрежения диссипативными процессами, имеет вид [5]:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \operatorname{rot}[\mathbf{v} \times \mathbf{H}], \qquad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0 \tag{4}$$

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{v}\right) = -\nabla\left(P + \frac{H^2}{\pi}\right) + \frac{1}{4\pi}(\mathbf{H}\cdot\nabla)\,\mathbf{H} + \mathbf{g}\rho$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\mathbf{v} = 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\,S = 0, \qquad \rho = \rho(P, S)$$

Последнее из этих уравнений представляет уравнение состояния жидкости, связывающее между собой давление P, плотность ρ и энтропию S (или температуру T). Здесь мы ограничимся рассмотрением случая плоской геометрии, когда внешнее магнитное поле $\mathbf{H}_0$, силовые линии которого не искривлены, направлено вдоль оси z, т. е. $\mathbf{H}_0 = H_0 e_z$, поле тяжести $\mathbf{g}$ направлено вдоль оси x, т. е. $\mathbf{g} = g e_x$, и все равновесные величины, характеризующие жидкость, зависят лишь от одной координаты x. Равновесное состояние жидкости, в котором $\mathbf{v}_0 = 0$, определяется уравнением равновесия

$$\nabla\left(P_0 + \frac{H_0^2}{8\pi}\right) = \rho_0 \mathbf{g} \tag{5}$$

Исследуем устойчивость равновесного состояния жидкости в поле тяжести наложением малых возмущений

$$P \to P_0 + P_2, \qquad \rho \to \rho_0 + \rho_1, \qquad S \to S_0 + S_1, \qquad \mathbf{H} \to \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_1, \qquad \mathbf{v}$$

Для величин, характеризующих возмущение равновесного состояния жидкости, зависимость от времени и координат можно принять в виде $f(x)\exp(-i\omega t + ik_y y + ik_z z)$. Систему уравнений (4) для возмущенных величин при этом можно свести к одному дифференциальному уравнению второго порядка для функции $u = \rho_0 v_x$:

$$u'' + u'\left(\ln\frac{a_1}{\rho_0}\right)' + u\left\{\frac{a_0'}{a_1} - g\frac{a_0}{a_1}\frac{k_y^2 + k_z^2}{\omega^2} + \frac{\omega^2}{a_1}\left[1 - K^2\left(1 + \frac{g}{\omega^2}\frac{\rho_0'}{\rho_0}\right)\right]\right\} = 0 \tag{6}$$

где

$$a_1 = \frac{\omega^2(1 - K^2)\,[v_a^2 + u_0^2(1 - K^2)]}{\omega^2 - (k_y^2 + k_z^2)\,[v_a^2 + u_0^2(1 - K^2)]}, \qquad u_0^2 = \left(\frac{\partial P_0}{\partial \rho_0}\right)_S, \qquad K^2 = \frac{k_z^2 v_a^2}{\omega^2}$$

$$a_0 = \frac{g\omega^2(1 - K^2)}{\omega^2 - (k_y^2 + k_z^2)\,[v_a^2 + u_0^2(1 - K^2)]} - \frac{\rho_0'}{\rho_0}a_1, \qquad v_a^2 = \frac{H_0^2}{4\pi\rho_0} \tag{7}$$

Здесь v_a — альфвеновская скорость, u_0 — скорость звука в жидкости [1], а штрих означает дифференцирование по x.

---

[1] Для жидкости, в которой справедливо уравнение состояния Пуассона

$$P_0\rho_0^{-\gamma} = \mathrm{const}, \text{ имеем } u_0 = \sqrt{\gamma P_0 / \rho_0}.$$

Заметим также, что уравнения одножидкостной гидродинамики (4) применимы и в случае неизотермической плазмы, в которой $T_e \gg T_i$ (см. [6]). При этом скорость звука равна

$$u_0 = \sqrt{T_e / M}$$

При помощи замены

$$u = y \exp\left(-\frac{1}{2}\int^{x} A(x)\,dx\right)$$

где $A(x)$ — коэффициент при u', уравнение (6) сводится к уравнению вида (1). Если при этом учесть условие применимости приближения геометрической оптики (2), то для определения спектра колебаний слабонеоднородной жидкости в поле тяжести получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$\int dx \left\{ \frac{1}{v_a^2 + u_0^2(1-K^2)}\left[\omega^2 - (k_y^2 + k_z^2)\left(v_a^2 + u_0^2(1-K^2) + \frac{g^2}{\omega^2}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + g\frac{\rho_0'}{\rho_0}\,\frac{(k_y^2+k_z^2)(v_a^2+u_0^2(1-K^2)) - k_z^2 v_a^2}{\omega^2(1-K^2)}\right]\right\}^{1/2} = \pi n \qquad (8)$$

3. Проанализировать дисперсионное уравнение (8) в общем случае затруднительно. В этом нет и необходимости. Для исследования устойчивости жидкости в поле тяжести достаточно ограничиться анализом уравнения (8) в предельных случаях высоких и низких частот колебаний неоднородной жидкости.

В области высоких частот колебаний, когда $\omega^2 \gtrsim (k_y^2 + k_z^2)(v_a^2 + u_0^2)$, слагаемыми, содержащими гравитационное поле g, в дисперсионном уравнении (8) в рамках приближения геометрической оптики можно пренебречь. В результате получаем дисперсионное уравнение для определения спектра магнитогидродинамических колебаний неоднородной жидкости [1]

$$\int dx \left\{\frac{\omega^2}{v_a^2 + u_0^2(1-K^2)} - k_y^2 - k_z^2\right\}^{1/2} = \pi n \qquad (9)$$

Легко видеть, что по отношению к таким высокочастотным колебаниям неоднородная жидкость является устойчивой, т. е. всегда $\omega^2 > 0$.

Иное положение имеет место в области низких частот колебаний неоднородной жидкости, когда выполняются условия

$$\omega^2,\ k_z^2 v_a^2 \ll (k_y^2 + k_z^2)(v_a^2 + u_0^2)$$

Дисперсионное уравнение (8) в этом случае принимает вид:

$$\int dx \left\{-1 - \frac{g^2}{\omega^2(v_a^2+u_0^2) - k_z^2 v_a^2 u_0^2} + g\frac{\rho_0'}{\rho_0}\,\frac{1}{\omega^2 - k_z^2 v_a^2}\right\}^{1/2} = \frac{\pi n}{\sqrt{k_y^2 + k_z^2}} \qquad (10)$$

Из этого уравнения следует, что неоднородная жидкость в поле тяжести может быть неустойчивой по отношению к низкочастотным колебаниям (т. е. $\omega^2 < 0$) лишь при условиях

$$A = \left(k_z^2 v_a^2 + g\frac{\rho_0'}{\rho_0}\right)u_0^2 - g^2 < 0 \qquad (11)$$

$$B = \left(k_z^2 v_a^2 + g\frac{\rho_0'}{\rho_0}\right)(v_a^2 + u_0^2) - g^2 + k_z^2 v_a^2 u_0^2 < 0$$

Выполнение хотя бы одного из этих локальных условий в области прозрачности жидкости является необходимым, но не достаточным условием неустойчивости. С другой стороны, выполнение какого-либо из этих условий во всей области прозрачности заведомо достаточно для неустойчивости жидкости. Условие (11) обобщают известные критерии конвективной неустойчивости проводящей жидкости, полученные в работах [1, 2, 7, 8], где рассматривались различные частные случаи колебаний.

---

[1] Дисперсионное уравнение (9) не содержит ту ветвь альфвеновских волн, которая описывает колебания компонент скорости и магнитного поля, перпендикулярных плоскости векторов $\mathbf{H}_0$ и $\mathbf{k}$. Уравнения для этих компонент отщепляются от остальных уравнений в системе (4), и в случае неоднородной жидкости, так же, как и в однородной, оказываются алгебраическими. Равенство нулю определителя этих уравнений приводит к следующему выражению для частоты колебаний $\omega^2 = k_z^2 v_a^2$. Зависимость частоты колебаний от координаты x в этом случае не должна вызывать недоумения, так как эти колебания не являются собственными колебаниями неоднородной жидкости. Они характеризуют лишь развитие во времени начальных возмущений компонент скорости и магнитного поля, перпендикулярных плоскости векторов $\mathbf{H}_0$ и $\mathbf{k}$.

Для несжимаемой жидкости ($U_0 \to \infty$) условия (11) принимают вид

$$k_z^2 v_a^2 + g \frac{\rho_0'}{\rho_0} < 0$$

Такое условие получено в работе [8] для «холодной» жидкости ($u_0 \to 0$). Условия неустойчивости (11) соответствуют полученным в работе [7] и выполняются всегда. Наконец, условия

$$\frac{\rho_0'}{\rho_0} > \frac{g}{u_0^2}, \qquad \frac{g}{u_0^2 + v_a^2}$$

полученные в работах [1, 2] следуют из (11) при $k_z = 0$. В работах [1, 2] (см. также [7]), как уже отмечалось выше, при исследовании конвективной неустойчивости неоднородной жидкости использовались такие же методы, которые применяются для описания колебаний однородной среды. А именно, решения уравнений для возмущенных величин искались в виде $\exp(-i\omega t + ik_y y + ik_z z + ik_x x)$. Так можно поступать, если спектр колебаний неоднородной среды оказывается не зависящим от точки пространства. Из дисперсионного уравнения (10) видно, что это имеет место в случае, когда подынтегральная функция в уравнении (10) во всей плазме является постоянной. При этом спектр колебаний жидкости определяется выражением:

$$\omega^2 = \frac{B_1 \pm \sqrt{B_1^2 - 4k_z^2 v_a^2 A_1}}{2\xi (v_a^2 + u_0^2)} \tag{12}$$

где

$$A_1 = \left(\xi k_z^2 v_a^2 + g \frac{\rho_0'}{\rho_0}\right) u_0^2 - g^2, \qquad \xi = 1 + \frac{\pi^2 n^2}{d^2 (k_y^2 + k_z^2)}$$

$$B_1 = \left(\xi k_z^2 v_a^2 + g \frac{\rho_0'}{\rho_0}\right)(v_a^2 + u_0^2) - g^2 + \xi k_z^2 v_a^2 u_0^2$$

Здесь d — линейный размер жидкости вдоль оси x, причем величина $\pi n / d$ играет роль волнового числа k_x. Из выражения (12) следует, что жидкость неустойчива при выполнении одного из условий

$$A_1 < 0, \qquad B_1 < 0 \tag{13}$$

В пределе $\xi \to 1$ (т. е. $k_x \to 0$) эти условия переходят в (11). Эти условия, однако, имеют более узкий смысл, чем условия (11), так как они получены, так же, как и выражение (12), в предположении, что A_1 и B_1 постоянны во всей жидкости.

Из проведенного анализа дисперсионного уравнения (8) следует, что проводящая неоднородная жидкость в поле тяжести может быть неустойчивой лишь по отношению к низкочастотным колебаниям. Колебания неустойчивой жидкости носят апериодический характер. В случае $B^2 \gg k_z^2 v_a^2 (u_0^2 + v_a^2) A$, инкремент нарастания колебаний

$$\gamma \sim k_z v_a \sqrt{|A| / |B|} \quad \text{при} \quad A < 0, \quad \text{или} \quad \gamma \sim \sqrt{|B| / v_a^2 + u_0^2} \quad \text{при} \quad B < 0$$

Для случая $B^2 \ll k_z^2 v_a^2 (u_0^2 + v_a) A$, инкремент нарастания колебаний

$$\gamma \sim k_z v_a \sqrt{|A| / v_a^2 + u_0^2}$$

В заключение благодарю В. П. Силина за обсуждение работы.

Поступила 25 XII 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Церковников Ю. А. К вопросу о конвективной неустойчивости плазмы. Докл. АН СССР, 1960, т. 130, № 2, стр. 295.
2. Newcomb W. A. Convective Instability Induced by Gravity in a Plasma with a Frosen — In Magnetic Field, Phys. Fluids, 1961, т. 4, № 3, стр. 391.
3. Силин В. П. Колебания слабонеоднородной плазмы. Ж. эксперим. и теор. физ., 1963, т. 44, № 4, стр. 1271.
4. Ловецкий Е. Е., Коврижных Л. М., Рухадзе А. А., Силин В. П. Гидродинамические колебания неоднородной плазмы низкого давления в магнитном поле. Докл. АН СССР, 1963, т. 149, № 5, стр. 1052.
5. Ловецкий Е. Е., Рухадзе А. А. О конвективной неустойчивости неоднородной плазмы в поле тяжести. Изв. вузов, Радиофизика, 1963, т. 6, № 6.
6. Климонтович Ю. Л., Силин В. П. О магнитной гидродинамике неизотермической плазмы без соударений. Ж. эксперим. и теор. физ., 1961, т. 40, № 6, 1213.
7. Ловецкий Е. Е., Рухадзе А. А. Гидродинамические колебания в поле тяжести. Ж. техн. физ., 1963, т. 33, № 6, стр. 652.
8. Велихов Е. П. Устойчивость границы плазма — вакуум. Ж. техн. физ., 1961, т. 31, № 2, 180.