Таким образом, независимо от того, имеет место эффект ламинаризации или нет, коэффициент трения при достаточно больших $|dp/dx|$ становится больше, чем в начале развитого участка течения.

Авторы благодарят С. С. Кутателадзе и А. И. Леонтьева за ряд замечаний при обсуждении работы.

Поступила 15 II 1966

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гандельсман А. Ф., Гухман А. А., Илюхин Н. В., Наурии Л. Н. Исследование коэффициента сопротивления при течении с околозвуковой скоростью. Ж. техн. физ., 1954, № 12.
2. Gukhman A. A. Application of the entropy method to investigation of transonic adiabatic flows. Internat. J. Heat Mass Transfer, 1962, vol. 5.
3. Дейч М. Е., Кох А. А., Робожев А. В., Степанчук В. Ф. Исследование структуры потока в ступени эжектора с изобарическим начальным смещением. Теплоэнергетика, 1954, № 12.
4. Дейч М. Е., Лазарев Л. Я. Исследование перехода турбулентного пограничного слоя в ламинарный. Инж.-физ. ж., 1964, т. № 4.
5. Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой. Физматгиз. 1962.
6. Кутателадзе С. С., Леонтьев А. И. Тубулентный пограничный слой сжимаемого газа. Изд. СО АН СССР, 1962.
7. Назарчук М. М. Течения газа в каналах при наличии теплообмена. Изд. АН УССР, 1963.

# ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ ТЕЧЕНИЕ В ТОНКОМ СЛОЕ ЖИДКОСТИ НА ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

*Н. С. Хапилова*
*(Новосибирск)*

Рассматривается задача, поставленная в [1], в которой была получена система уравнений, описывающая течение тонкого слоя жидкости на поверхности вращающегося тела вращения в подвижной системе координат, связанной с телом. Сохраняя обозначения [1], в этой заметке будем рассматривать только осесимметричное течение.

Анализ уравнений (2.3), (2.9), (2.10) работы [1], записанных в характеристической форме, показывает, что при расчете неустановившегося осесимметричного течения в трубе конечной длины нужно задавать два граничных условия слева и одно справа, если течение «докритическое», т. е. $v_1 < \sqrt{fh}$, или три граничных условия слева, если течение «сверхкритическое», т. е. $v_1 > \sqrt{fh}$.

При конкретном выборе граничных условий в случае установившегося осесимметричного течения представляет интерес исследование возможных форм свободной поверхности.

В системе (2.3), (2.9), (2.10) положим $j = 0$ и $q = 0$. Введем новую переменную $Q = v_1 h$. Тогда, интегрируя уравнение неразрывности, получим $Q = c/R\,(x)$, где $c = \text{const}$. При этом (2.9) преобразуется к виду

$$\frac{dh}{dx} = \left(\frac{R'}{\sqrt{1-R'^2}}f - \frac{QQ'}{h^2} - \frac{\lambda}{8h^2}\,vQ\right)\left(f - \frac{Q^2}{h^3}\right)^{-1} \qquad (1)$$

Введем понятие критической глубины, определяемой из условия $fh_k^3 = Q^2 = c^2/R^2$ при заданном $Q$. Если $h > h_k$, то режим течения является докритическим, при $h < h_k$ — сверхкритическим.

Введем величину

$$f_1 = \frac{f}{\sqrt{1-R'^2}} = R\left(\omega + \frac{v_2}{R}\right)^2 > 0$$

Глубину $h_n$, удовлетворяющую уравнению

$$\left(f_1 + \frac{c^2}{R^3 h_n^2}\right)R' - \frac{\lambda}{8h_n^2}\,\frac{c}{R}\left(v_2^2 + \frac{c^3}{R^2 h_n^2}\right)^{1/2} = 0 \qquad (2)$$

условно назовем «нормальной глубиной».

При $\lambda = 24/\,\mathrm{Re}$, соответствующим ламинарному режиму течения в слое, уравнение (2) записывается в виде

$$f_1 h_n^3 + \frac{c^2}{R^3}h_n - \frac{3\nu c}{R'R} = 0 \qquad (3)$$

Это уравнение имеет один действительный и два мнимых корня.

Заметим, что понятие нормальной глубины имеет смысл только при $R' > 0$, так как при $R' < 0$ уравнение (3) имеет один действительный корень, причем он будет всегда отрицательным. Рассмотрим функцию

$$\Phi(h) = f_1 h^3 + \frac{c^2}{R^3} h - \frac{3\nu c}{R'R}$$

Так как $\Phi'(h) > 0$, то $\Phi(h)$ — монотонно возрастающая функция $h$. Кроме того, так как $\Phi(h_n) = 0$, то $\Phi(h) > 0$ при $h > h_n$, а при $h < h_n$ имеем $\Phi(h) < 0$. Функция $\Phi_1(h) = fh^3 - Q^2$, обращающаяся в нуль при критической глубине $h_k$, также является монотонно возрастающей функцией $h$, и, следовательно $\Phi_1(h) > 0$ при $h > h_k$, и $\Phi_1(h) < 0$ при $h < h_k$.

При турбулентном режиме течения коэффициент $\lambda$ можно, например, определять по формуле

$$\psi(h) = F(h, \lambda), \quad \psi(\lambda) = \left(\frac{8}{\lambda}\right)^{1/2}, \quad F(h, \lambda) = -\frac{20}{\sqrt{g}} \lg\left(\frac{\varepsilon}{h} - \frac{0.385}{\sqrt{1/8\lambda}\mathrm{Re}}\right) \qquad (4)$$

которая получается после элементарных преобразований из зависимости А. Д. Альтшуля [2]. Подставим $\lambda$ из (4) в (2). Так как $\lambda$ — всегда положительная функция, то из вида уравнения (2) заключаем, что оно не имеет действительных положительных корней при $R' < 0$. Рассматривая производную функции

$$\Phi_2(h) = f_1 h^2 + \frac{c^2}{R^3} - \frac{\lambda c}{8RR'}\left(\frac{c^2}{R^2h^2} + v_2^2\right)^{1/2}$$

заключаем, что $\Phi_2(h)$ является также монотонной функцией $h$. Уравнение (1) течения может быть записано в виде

$$\frac{dh}{dx} = \frac{\Phi}{\Phi_1} \quad \text{ламинарный режим,} \qquad \frac{dh}{dx} = \frac{\Phi_2}{\Phi_1} \quad \text{турбулентный режим}$$

Пусть $R' > 0$ и $h_n > h_k$. Тогда течение может происходить с глубинами $h$, удволетворяющими требованиям

$$\text{(a) } h > h_n > h_k, \quad \text{(b) } h_n > h > h_k, \quad \text{(c) } h_k > h$$

В случае (a) из (1) видно, что $dh/dx > 0$, т. е. при течении глубина увеличивается. Из (1) получаем

$$\frac{dh}{dx} \to \frac{R'}{\sqrt{1 - R'^2}} \quad \text{при } h \to \infty$$

В случае (b) глубина непрерывно уменьшается, причем $dh/dx \to -\infty$ при $h \to h_k$.

В случае (c) производная $dh/dx$ снова положительна; кроме того,

$$dh/dx \to \infty \quad \text{при } h \to h_k$$

При ламинарном течении

$$dh/dx \to 3\nu R/c \quad \text{при } h \to 0$$

Аналогично получаются три возможные формы свободной поверхности, когда $R' > 0$ и $h_n < h_k$.

При $R' = 0$ уравнение (1) можно представить в виде

$$\frac{dh}{dx} = -\frac{\lambda v v_1}{8h}\left(f - \frac{Q^2}{h^3}\right)$$

Если глубина больше критической, то течение происходит так, что глубина непрерывно уменьшается, причем

$$dh/dx \to -\infty \quad \text{при } h \to h_k$$

При глубинах, меньших критической, течение будет происходить так, что глубина потока будет увеличиваться.

При $R' < 0$ возможны две формы свободной поверхности, аналогичные разобранным при $R' = 0$. В самом деле, уравнение (1) может быть представлено в виде

$$\frac{dh}{dx} = -\frac{d_1}{f - Q^2/h^2}$$

где через $d_1$ обозначена всегда положительная функция

$$d_1 = \left(f_1 + \frac{c^2}{R^3h^2}\right)R_1' + \frac{\lambda}{8h} v v_1, \qquad R_1' = -R'$$

Поступила 6 VIII 1965

## ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев О. Ф., Хапилова Н. С. Уравнения движения тонкого слоя жидкости на поверхности вращающегося тела вращения. ПМТФ, 1965, № 3.
2. Альтшуль А. Д. Гидравлические потери на трение в трубопроводах. Госэнергоиздат, 1963.