УДК 517.95

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ТОРМОЖЕНИЕМ МГД-ТЕЧЕНИЯ

А. Ю. Чеботарев

Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041 Владивосток
E-mail: cheb@iam.dvo.ru

Рассмотрена задача импульсного управления для трехмерной модели магнитной гидродинамики. Показано, что сингулярности решения уравнений магнитной гидродинамики с течением времени не развиваются из-за подавления их магнитным полем. Доказано существование оптимального управления, построена система оптимальности, решение которой регулярно в целом по времени.

Ключевые слова: уравнения магнитной гидродинамики, импульсное управление, условия оптимальности.

Введение. Течение однородной вязкой несжимаемой и проводящей жидкости в ограниченной односвязной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ со связной границей $\Gamma = \partial\Omega$ моделируется уравнениями магнитной гидродинамики (МГД) в безразмерных переменных:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0, \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0; \tag{1}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} - \nu\Delta\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} = -\nabla p + S\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{B} + \boldsymbol{q}, \qquad x\in\Omega, \quad t\in(0,T); \tag{2}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \operatorname{rot}\boldsymbol{E} = 0, \qquad \operatorname{rot}\boldsymbol{B} = \frac{1}{\nu_m}\,(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}). \tag{3}$$

Здесь $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{E}$ — векторные поля скорости, магнитной индукции и электрической напряженности соответственно; p — давление; $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}(x)$ — плотность внешних сил; $\nu = 1/\operatorname{Re}$; $\nu_m = 1/\operatorname{Re}_m$; $S = M^2/(\operatorname{Re}\operatorname{Re}_m)$; Re — число Рейнольдса; Re_m — магнитное число Рейнольдса; M — число Гартмана.

К уравнениям (1)–(3) добавляются условия на границе Γ области течения

$$\boldsymbol{u} = 0, \quad \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n} = 0, \quad \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E} = 0, \qquad (x,t)\in\Gamma\times(0,T) \tag{4}$$

($\boldsymbol{n}$ — единичный вектор внешней нормали к границе Γ) и начальные условия

$$\boldsymbol{u}\big|_{t=0} = \boldsymbol{u}_0(x), \quad \boldsymbol{B}\big|_{t=0} = 0, \qquad x\in\Omega. \tag{5}$$

Предлагается способ торможения течения с помощью импульсного управления магнитным полем. В качестве управляющих функций выбираются скачки $\boldsymbol{b}_i$ магнитного поля в моменты времени $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m < T$. В этом случае МГД-течение описывается уравнениями (1), (3) и уравнениями

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \operatorname{rot}\boldsymbol{E} = \sum_{i=1}^{m}\delta(t-t_i)\boldsymbol{b}_i, \qquad \operatorname{rot}\boldsymbol{B} = \frac{1}{\nu_m}\,(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и ДВО РАН (код проекта 06-01-96003), Фонда содействия отечественной науке и в рамках программы “Ведущие научные школы РФ” (грант № НШ-9004.2006.1).

с начально-краевыми условиями (4), (5). Здесь $\delta(t-t_i)$ — δ-функция Дирака с носителем в точке t_i.

Задача состоит в минимизации функционала

$$J = \frac{1}{4}\int_0^T \int_\Omega ((\operatorname{rot} \boldsymbol{u})^2 + (\operatorname{rot} \boldsymbol{B})^2)^2\,dx\,dt + \frac{\lambda}{2}\sum_{i=1}^m \int_\Omega (\operatorname{rot} \boldsymbol{b}_i)^2\,dx$$

($\lambda > 0$ — параметр регуляризации).

Классические краевые задачи для эволюционной модели (1)–(3) изучены в [1, 2]. Задачи оптимального управления эволюционными системами Навье — Стокса впервые исследованы в [3–5]. Оптимальное управление нестационарными уравнениями магнитной гидродинамики рассмотрено в [6]. При исследовании задач оптимального управления трехмерными системами уравнений типа Навье — Стокса основной проблемой является регулярность оптимального состояния течения. Для данной постановки показано, что с течением времени сингулярности решения (в смысле Лере) не развиваются из-за подавления их магнитным полем. Доказана разрешимость задачи управления. Построена система оптимальности, регулярность которой обоснована в целом по времени. Метод вывода условий оптимальности близок к методу, предложенному в [7].

1. Формализация и разрешимость задачи управления. Для упрощения преобразований выполним перенормировку

$$\boldsymbol{B} = \sqrt{S}\,\boldsymbol{B}, \qquad \boldsymbol{E} = \sqrt{S}\,\boldsymbol{E}.$$

Тогда система (1)–(3) принимает вид

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0, \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0;$$

$$\boldsymbol{u}' - \nu\Delta\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} = -\nabla p + \operatorname{rot}\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{B} + \boldsymbol{q}, \qquad x\in\Omega, \quad t\in(0,T);$$

$$\boldsymbol{B}' + \operatorname{rot}\boldsymbol{E} = 0, \qquad \boldsymbol{E} = \nu_m \operatorname{rot}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B},$$

где $\boldsymbol{u}' = \partial\boldsymbol{u}/\partial t$; $\boldsymbol{B}' = \partial\boldsymbol{B}/\partial t$.

Рассмотрим вектор-функции и операторы, необходимые для анализа задачи управления пространством [2]. Пусть Ω — односвязная область в пространстве $\mathbb{R}^3$ со связной границей $\Gamma \in C^2$. Введем пространства

$$U_1 = \{\boldsymbol{v}\in C^\infty(\bar\Omega)\colon\quad \operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0,\ x\in\Omega, \quad \boldsymbol{v} = 0,\ x\in\Gamma\},$$

$$U_2 = \{\boldsymbol{v}\in C^\infty(\bar\Omega)\colon\quad \operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0,\ x\in\Omega, \quad \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v} = 0,\ x\in\Gamma\},$$

V_1 — замыкание U_1 по норме $W_2^1(\Omega)$, V_2 — замыкание U_2 по норме $W_2^1(\Omega)$, H_1 — замыкание U_1 по норме $L^2(\Omega)$, H_2 — замыкание U_2 по норме $L^2(\Omega)$.

Будем полагать, что

$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})_0 = \int_\Omega (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})\,dx \text{ —}$$

скалярное произведение в пространствах H_1 и H_2,

$$((\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})) = (\operatorname{rot}\boldsymbol{u},\operatorname{rot}\boldsymbol{v})_0 = \int_\Omega (\operatorname{rot}\boldsymbol{u}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{v})\,dx \qquad \forall\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in V_1, V_2 \text{ —}$$

скалярное произведение в пространствах V_1 и V_2, при этом определяемая им норма эквивалентна норме пространства $W_2^1(\Omega)$. Пусть X — банахово пространство. Тогда через

$L^p(0,T;X)$ ($C([0,T];X)$ обозначается пространство L^p (класс C) функций, определенных на интервале $[0,T]$ со значениями в пространстве X. Определим пространства

$$V = V_1 \times V_2, \qquad H = H_1 \times H_2, \qquad V \subset H = H' \subset V'.$$

Указанные вложения пространств являются плотными и непрерывными. Нормы в пространствах V, H и в сопряженном пространстве V' обозначим $\|\cdot\|$, $|\cdot|$ и $\|\cdot\|_*$ соответственно; $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ — отношение двойственности между V' и V и скалярное произведение в H:

$$(y,z) = (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})_0 + (\boldsymbol{B},\boldsymbol{w})_0, \quad (y,z)_V = ((\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})) + ((\boldsymbol{B},\boldsymbol{w})) \quad \forall\, y = \{\boldsymbol{u},\boldsymbol{B}\},\ z = \{\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\}.$$

Введем отображения A_1: $V_1 \to V_1'$, A_2: $V_2 \to V_2'$, A: $V \to V'$, B: $V\times V \to V'$, используя соотношения

$$(Ay,z) = \nu((\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})) + \nu_m((\boldsymbol{B},\boldsymbol{w})) = \nu(A_1\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + \nu_m(A_2\boldsymbol{B},\boldsymbol{w}),$$

$$b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = \int\limits_\Omega (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}\,dx,$$

$$(B(y_1,y_2),z) = b(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{v}) - b(\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{w}) - b(\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{w}),$$

которые выполняются для любых $y = \{\boldsymbol{u},\boldsymbol{B}\}$, $y_1 = \{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{B}_1\}$, $y_2 = \{\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{B}_2\}$, $z = \{\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\}$ из пространства V. Оператор A удовлетворяет условиям

$$(Ay,y) \geqslant \alpha\|y\|^2, \quad \alpha = \min(\nu,\nu_m), \qquad (Ay,z) = (Az,y) \quad \forall y,z\in V.$$

Заметим также, что $(B(y,z),z) = 0$ и отображение $B[y] = B(y,y)$ усиленно непрерывно. Пусть $D(A) = \{y\in V\colon Ay\in H\}$. Для оператора $B(y,z)$ справедливы оценки [2]

$$(B(y_1,y_2),y_3) \leqslant C|y_1|^{1/4}\|y_1\|^{3/4}\|y_2\||y_3|^{1/4}\|y_3\|^{3/4}, \quad y_1\in V,\ y_2\in V,\ y_3\in V; \tag{6}$$

$$(B(y_1,y_2),y_3) \leqslant C\|y_1\|\|y_2\|^{1/2}|Ay_2|^{1/2}|y_3|^{1/2}, \quad y_1\in V,\ y_2\in D(A),\ y_3\in H. \tag{7}$$

Здесь постоянная $C>0$ зависит только от Ω, Re, Re_m.

Определив функционал $Q\in V'$, $(Q,z) = (\boldsymbol{q},\boldsymbol{v})_0$, где $z = \{\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\}$, начально-краевую задачу (1)–(5) можно свести к задаче Коши для уравнения с операторными коэффициентами [2]:

$$y' + Ay + B[y] = Q, \qquad y(0) = y_0,$$

где $y_0 = \{\boldsymbol{u}_0, 0\}$.

Рассмотрим разбиение временного интервала $(0,T)$ на промежутки $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m < T = t_{m+1}$. Определим допустимые вектор импульсных управлений

$$f = (\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\ldots,\boldsymbol{b}_m) \in V_2\times V_2\times\ldots\times V_2 = U$$

и состояние системы

$$y = \{\boldsymbol{u},\boldsymbol{B}\}\in L^\infty(0,T;V),$$

$$y\big|_{[t_{i-1},t_i]} \in C([t_{i-1},t_i];H), \quad y'\big|_{[t_{i-1},t_i]} \in L^2(t_{i-1},t_i;H), \quad i = 1,2,\ldots,m+1,$$

такие что

$$y' + Ay + B[y] = Q + \sum_{i=1}^m \delta(t-t_i)\zeta_i, \qquad y(0) = y_0 \tag{8}$$

($\zeta_i = \{0,\boldsymbol{b}_i\}$; $\delta(t-t_i)$ — δ-функция Дирака с носителем в точке t_i).

Задача оптимального управления состоит в нахождении допустимой пары $\{f, y\}$, минимизирующей функционал

$$J(f,y) = \frac{1}{4}\int\limits_0^T \|y(t)\|^4\,dt + \frac{\lambda}{2}\,\|f\|_U^2. \tag{9}$$

Здесь $\|f\|_U^2 = \sum\limits_{i=1}^m \|\boldsymbol{b}_i\|_{V_2}^2$.

Замечание 1. Фактически задача (8) означает, что

$$y' + Ay + B[y] = Q, \quad t \in (t_{i-1}, t_i), \qquad y(t_i+0) - y(t_i-0) = \{0, \boldsymbol{b}_i\}, \quad i = 1,\dots,m.$$

Множество допустимых пар не пусто, если, например, решение $\boldsymbol{u}$ системы уравнений Навье — Стокса с начальным условием (5) при нулевом магнитном поле принадлежит классу $L^4(0,T;V_1)$. Тогда пара $y = \{\boldsymbol{u}, 0\}$, $f = 0$ является допустимой, что справедливо, в частности, если $\boldsymbol{u}_0 \in V_1$ — стационарное решение системы уравнений Навье — Стокса, которое может быть неустойчивым.

Получим априорные оценки решения управляемой системы (8). На интервале $(0, t_1)$ из энергетического неравенства следует оценка

$$|y(t)|^2 + \int\limits_0^{t_1} \|y(\tau)\|^2 d\tau \leqslant Ct_1\|Q\|_*^2 + \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\Omega)}^2, \tag{10}$$

на интервале (t_1, t_2) — оценка

$$|y(t)|^2 + \int\limits_{t_1}^{t_2} \|y(\tau)\|^2\,d\tau \leqslant C(t_2 - t_1)\|Q\|_*^2 + \|\boldsymbol{u}|_{t=t_1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\boldsymbol{B}\big|_{t=t_1-0} + \boldsymbol{b}_1\|_{L^2(\Omega)}^2 \tag{11}$$

и т. д. Здесь, так же как и в других априорных оценках, через $C, C_1, \dots$ обозначены положительные постоянные, зависящие только от Ω и безразмерных параметров Re, Re_m, S. Из (10), (11) следует, что на интервале $(0, T)$

$$|y(t)|^2 + \int\limits_0^T \|y(\tau)\|^2\,d\tau \leqslant C(\|Q\|_*^2 + \|\boldsymbol{u}_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + |f|^2), \tag{12}$$

где $|f|^2 = \sum\limits_{i=1}^m \|\boldsymbol{b}_i\|_{L^2(\Omega)}^2$.

В том случае, если $\boldsymbol{q} \in L^2(\Omega)$, на каждом из интервалов (t_{i-1}, t_i) выполняется неравенство [2]

$$\frac{d}{dt}\,\|y\|^2 + |Ay|^2 \leqslant C_1(\|y\|^6 + |Q|). \tag{13}$$

Из оценки (13) следует ограниченность состояния y в пространстве $L^\infty(0,T;V)$ и состояния Ay в пространстве $L^2(0,T;V)$, если имеется ограниченность состояния y в пространстве $L^4(0,T;V)$ и импульсных управлений в V_2.

Теорема 1. *Пусть векторное поле $\boldsymbol{u}_0 \in V_1$ является стационарным решением системы уравнений Навье — Стокса*

$$-\nu\Delta\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} = -\nabla p + \boldsymbol{q}, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0, \quad x \in \Omega, \qquad \boldsymbol{u}\big|_\Gamma = 0,$$

где $\boldsymbol{q} \in L^2(\Omega)$. Тогда существует решение задачи (9).

Доказательство. Как указано в замечании 1, при выполнении условий теоремы множество допустимых пар не пусто. Для последовательности допустимых пар $\{f_k, y_k\}$, минимизирующей функционал J, справедливо неравенство

$$\frac{1}{4}\int\limits_0^T \|y_k(t)\|^4\,dt + \frac{\lambda}{2}\,\|f_k\|_U^2 \leqslant C,$$

где постоянная C не зависит от k. Перейдя при необходимости к подпоследовательности, заключаем, что $f_k \to f_*$ слабо в U, $y_k \to y_*$ слабо в $L^4(0,T;V)$.

На основании оценок (12), (13) получаем следующие свойства последовательности y_k: y_k ограничена в $L^\infty(0,T;V)$, Ay_k ограничена в $L^2(0,T;H)$. Тогда из (8) следует, что y_k' ограничена в $L^2(t_{i-1},t_i;H)$. Ограниченности последовательностей y_k, Ay_k, y_k' достаточно для выполнения предельного перехода в (8) и обоснования того, что $\{f_*, y_*\}$ — допустимая пара. Оптимальность этой пары является следствием слабой полунепрерывности снизу функционала J.

2. Система оптимальности. При выводе необходимых условий экстремума первого порядка в задачах управления нелинейными системами обычно требуются дополнительные условия регулярности множества допустимых пар или оптимального состояния (см. [5]). Для систем уравнений типа Навье — Стокса регулярность решения обоснована лишь локально по времени или при условии малости исходных данных [8]. В рассматриваемой задаче необходимая регулярность оптимального течения является следствием структуры функционала J.

Пусть пара $\{f_*, y_*\}$ есть решение задачи управления (9). Тогда из оптимальности этой пары следует неравенство

$$\frac{1}{4}\int\limits_0^T \|y_*(t)\|^4\,dt + \frac{\lambda}{2}\,\|f_*\|_U^2 \leqslant \frac{1}{4}\,T\|\boldsymbol{u}_0\|_{V_1},$$

из которого в силу оценки (13) получаем

$$\|y_*(t)\| \leqslant C, \quad t \in (0,T), \qquad \int\limits_0^T \|Ay_*(t)\|^2\,dt \leqslant C. \tag{14}$$

Обозначим $F(y,z) = B(y,z) + B(z,y)$ и определим билинейное отображение $F'(y,z)$:

$$(F'(y,z), z_1) = (F(y,z_1), z) \qquad \forall\, y, z, z_1 \in V.$$

Для построения системы оптимальности зафиксируем произвольный элемент $\tilde{f} = \{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m\}$ из пространства управлений U и рассмотрим следующую задачу с малым параметром $\varepsilon > 0$.

Требуется найти функции

$$z_\varepsilon \in L^2(0,T;V), \quad z_\varepsilon' \in L^2(t_{i-1},t_i;H), \quad i = 1,2,\ldots,m+1,$$

такие что

$$z_\varepsilon' + Az_\varepsilon + F(y_*, z_\varepsilon) + \varepsilon B[z_\varepsilon] = \sum_{i=1}^m \delta(t-t_i)\{0, \boldsymbol{w}_i\}, \qquad z_\varepsilon(0) = 0. \tag{15}$$

Выведем априорные оценки решения задачи (15). На интервале $(0,t_1)$ уравнение в (15) умножим скалярно на z_ε и проинтегрируем по t с учетом начального условия. На основе неравенства (6) для нелинейного оператора B, учитывая ограниченность оптимального состояния y_*, получаем

$$|z_\varepsilon(t)|^2 + \int\limits_0^t \|z_\varepsilon(\tau)\|^2\,d\tau \leqslant C \int\limits_0^t |z_\varepsilon(\tau)|^{1/2}\|z_\varepsilon(\tau)\|^{3/2}\,d\tau.$$

Применив неравенство Юнга к интегралу в правой части, а затем используя лемму Гронуолла, находим $z_\varepsilon = 0$ на интервале $(0, t_1)$. Аналогично на интервале (t_1, t_2) с учетом условия $z_\varepsilon(t_1) = \{0, \boldsymbol{w}_1\}$ выводим неравенство

$$|z_\varepsilon(t)|^2 + \int\limits_{t_1}^{t_2} \|z_\varepsilon(\tau)\|^2\,d\tau \leqslant C\|\boldsymbol{w}_1\|^2_{H_2}.$$

Получив такие же оценки решения z_ε на остальных интервалах, на всем интервале $(0, T)$ имеем неравенство

$$|z_\varepsilon(t)|^2 + \int\limits_0^T \|z_\varepsilon(\tau)\|^2\,d\tau \leqslant C|\tilde{f}|^2_U. \qquad (16)$$

Выведем оценку z_ε в пространстве $L^\infty(0, T; V)$ и Az_ε в пространстве $L^2(0, T; H)$. На интервале (t_1, t_2) уравнение в (15) умножим скалярно на Az_ε, считая (не нарушая общности) $\nu = 1$, $\nu_m = 1$. Тогда

$$\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\,\|z_\varepsilon\|^2 + |Az_\varepsilon|^2 = -(F(y_*, z_\varepsilon), Az_\varepsilon) - \varepsilon(B[z_\varepsilon], Az_\varepsilon). \qquad (17)$$

Для получения оценки правой части (17) применим неравенство (7), вновь учитывая ограниченность y_* в пространстве $L^\infty(0, T; V)$:

$$|(F(y_*, z_\varepsilon), Az_\varepsilon)| \leqslant C(\|z_\varepsilon\|^{1/2}|Az_\varepsilon|^{3/2} + \|z_\varepsilon\||Az_\varepsilon||Ay_*|^{1/2}),$$
$$|(B[z_\varepsilon], Az_\varepsilon)| \leqslant C\|z_\varepsilon\|^{3/2}|Az_\varepsilon|^{3/2}.$$

Тогда в силу неравенства Юнга из (17) следует оценка

$$\frac{d}{dt}\,\|z_\varepsilon\|^2 + |Az_\varepsilon|^2 \leqslant C_1(1 + |Ay_*|)\|z_\varepsilon\|^2 + C_2\varepsilon\|z_\varepsilon\|^6. \qquad (18)$$

Определим функции

$$\alpha(t) = C_1(1 + |Ay_*(t)|), \qquad \beta(t) = \exp\Big(2\int\limits_{t_1}^t \alpha(\tau)\,d\tau\Big), \qquad \gamma(t) = \int\limits_{t_1}^t \beta(\tau)\,d\tau,$$

где C_1, C_2 — постоянные в (18), не зависящие от ε. Проинтегрировав дифференциальное неравенство (18), получаем оценку

$$\|z_\varepsilon(t)\|^4 \leqslant \|\boldsymbol{w}_1\|^4\beta(t)/(1 - 2C_2\varepsilon\|\boldsymbol{w}_1\|^4\gamma(t)),$$

из которой следует

$$\|z_\varepsilon(t)\|^4 \leqslant 2\|\boldsymbol{w}_1\|^4\beta(t_2),$$

если $2C_2\varepsilon\|\boldsymbol{w}_1\|^4\gamma(t_2) \leqslant 1/2$. Тогда при достаточно малом параметре ε из (18) следует ограниченность Az_ε в пространстве $L^2(t_1, t_2; H)$. Аналогичные оценки функции z_ε на остальных интервалах при малых значениях ε приводят к неравенству

$$\|z_\varepsilon(t)\|^2 + \int\limits_0^T |Az_\varepsilon(\tau)|^2\,d\tau \leqslant K, \tag{19}$$

где постоянная K зависит только от $\tilde{f}$, y_* и исходных данных Ω, $\boldsymbol{q}$, T, Re, Re_m, S.

Полученных оценок (16)–(19) достаточно для обоснования разрешимости задачи (15). Заметим также, что пара $\{f_* + \varepsilon\tilde{f}, y_* + \varepsilon z_\varepsilon\}$ является допустимой для задачи управления, поэтому

$$\varepsilon^{-1}(J(f_* + \varepsilon\tilde{f}, y_* + \varepsilon z_\varepsilon) - J(f_*, y_*)) \geqslant 0. \tag{20}$$

Неравенства (16)–(19) позволяют выполнить предельный переход в уравнении (15) и неравенстве (20), причем для предельной функции z справедливы аналогичные оценки. Таким образом, получаем следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть $\{f_*, y_*\}$ — оптимальная пара, $f_* = \{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m\}$. Тогда для каждого элемента $\tilde{f} = \{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m\} \in U$ существует функция*

$$z \in L^2(0,T;V), \quad z' \in L^2(t_{i-1}, t_i; H), \quad i = 1, 2, \ldots, m+1,$$

такая что

$$z' + Az + F(y_*, z) = \sum_{i=1}^m \delta(t - t_i)\{0, \boldsymbol{w}_i\}, \qquad z(0) = 0; \tag{21}$$

$$\int\limits_0^T \|y_*(t)\|^2 (Ay_*(t), z(t))\,dt + \lambda \sum_{i=1}^m (A_2\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{w}_i) = 0. \tag{22}$$

Сформулируем утверждение о существовании сопряженного состояния.

Лемма 2. *Пусть $y_* \in L^\infty(0,T;V)$, $Ay_* \in L^2(0,T;H)$. Тогда существует единственное решение сопряженной системы*

$$\begin{gathered} g \in L^2(0,T;V), \qquad z' \in L^2(0,T;V'), \\ -g' + Ag + F(y_*, g) = \|y_*\|^2 Ay_*, \qquad g(T) = 0. \end{gathered} \tag{23}$$

Доказательство леммы 2 основано на оценке (14) и аналогично приведенному в [7].

Теорема 2. *Для каждой оптимальной пары $\{f_*, y_*\}$ существует единственное решение сопряженной системы* (23), *при этом импульсные управления определяются равенствами*

$$\boldsymbol{b}_i = -\lambda^{-1} A_2^{-1}(Pg(t_i)), \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Здесь P — оператор проектирования; $Pg = \boldsymbol{r}$, если $g = \{\boldsymbol{h}, \boldsymbol{r}\}$.

Доказательство теоремы 2 следует из лемм 1, 2, если уравнение (23) умножить скалярно на функцию z, удовлетворяющую условию (21), и учесть (22).

Замечание 2. Стационарное течение $\boldsymbol{u}_0$, для которого сформулирована теорема 1, может оказаться неустойчивым, но даже в этом случае импульсные управления, определяемые теоремой 2, позволяют получить гладкие решения системы МГД-уравнений и системы оптимальности.

Таким образом, оптимальная пара с соответствующим сопряженным состоянием является решением системы оптимальности, представляющей собой нелокальную начально-краевую задачу:

$$y_*' + Ay_* + B[y_*] = Q + \sum_{i=1}^m \delta(t - t_i)\{0, \boldsymbol{b}_i\}, \qquad y_*(0) = \{\boldsymbol{u}_0, 0\}; \tag{24}$$

$$-g' + Ag + F(y_*, g) = \|y_*\|^2 A y_*, \qquad g(T) = 0; \tag{25}$$

$$\lambda A_2 \boldsymbol{b}_i + P g(t_i) = 0, \qquad i = 1, \ldots, m. \tag{26}$$

Дадим интерпретацию системы оптимальности (24)–(26). Рассмотрим сопряженную систему (25). Пусть $g = \{\boldsymbol{h}, \boldsymbol{r}\}$ — сопряженное состояние, соответствующее оптимальной паре $y_* = \{\boldsymbol{u}_*, \boldsymbol{B}_*\}$. Указанная система является слабой формулировкой следующей задачи:

$$-\frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial t} - \nu \Delta \boldsymbol{h} + \boldsymbol{h} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{u}_* + \operatorname{rot} \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{B}_* + \operatorname{rot} (\boldsymbol{u}_* \times \boldsymbol{h}) = -\nabla \eta - \|y_*\|^2 \Delta \boldsymbol{u}_*,$$

$$-\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} + \operatorname{rot} D + \operatorname{rot} \boldsymbol{B}_* \times \boldsymbol{h} + \boldsymbol{u}_* \times \operatorname{rot} \boldsymbol{r} = -\nabla \mu - \|y_*\|^2 \Delta \boldsymbol{B}_*,$$

$$D = \nu_m \operatorname{rot} \boldsymbol{r} + \boldsymbol{h} \times \boldsymbol{B}_*, \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{h} = 0, \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{r} = 0,$$

$$\boldsymbol{h} = 0, \quad \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n} = 0, \quad \boldsymbol{n} \times D = 0, \qquad (x, t) \in \Gamma \times (0, T).$$

Здесь η, μ — некоторые скалярные функции.

В момент времени $t = T$ выполняются условия

$$\boldsymbol{h}\big|_{t=T} = 0, \qquad \boldsymbol{r}\big|_{t=T} = 0.$$

Импульсные управления $\boldsymbol{b}_i$ являются решением системы уравнений Стокса

$$-\lambda \Delta \boldsymbol{b}_i + \nabla \delta_i = -\boldsymbol{r}\big|_{t=t_i}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{b}_i = 0 \quad \text{в } \Omega, \qquad \boldsymbol{b}_i \cdot \boldsymbol{n} = 0, \quad \delta_i = 0 \quad \text{на } \Gamma.$$

Полученная нелокальная краевая задача, решение которой регулярно в целом по времени, может служить основой для дальнейшего качественного и численного анализа рассмотренной задачи импульсного управления.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ладыженская О. А., Солонников В. А.** Решение некоторых нестационарных задач магнитной гидродинамики для вязкой несжимаемой жидкости // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1960. Т. 59. С. 174–187.
2. **Sermange M., Temam R.** Some mathematical questions related to the MHD equations // Comm. Pure Appl. Math. 1983. V. 36. P. 635–664.
3. **Фурсиков А. В.** Задачи управления и теоремы, касающиеся однозначной разрешимости смешанной краевой задачи для трехмерных уравнений Навье — Стокса и Эйлера // Мат. сб. 1981. Т. 115, № 2. С. 281–306.
4. **Фурсиков А. В.** Свойства решений некоторых экстремальных задач, связанных с системой Навье — Стокса // Мат. сб. 1982. Т. 118, № 3. С. 323–349.
5. **Фурсиков А. В.** Оптимальное управление распределенными системами: Теория и приложения. Новосибирск: Науч. кн., 1999.
6. **Чеботарев А. Ю.** Оптимальное управление в нестационарных задачах магнитной гидродинамики // Сиб. журн. индустр. математики. 2007. Т. 34, № 6. С. 189–197.
7. **Чеботарев А. Ю.** Принцип максимума в задаче граничного управления течением вязкой жидкости // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, № 6. С. 189–197.
8. **Темам Р.** Уравнения Навье — Стокса: Теория и численный анализ. М.: Мир, 1981.

Поступила в редакцию 19/VII 2007 г.,
в окончательном варианте — 7/XI 2007 г.