

исходит полное фазовое превращение. С увеличением δ время полного фазового превращения растет и обращается в бесконечность при $\delta \rightarrow \delta_*$. При дальнейшем увеличении δ развивается гидродинамический тепловой взрыв, при этом период индукции ГТВ уменьшается. Аналогично зависят времена нестационарных процессов и от начальной температуры.

В настоящей работе лишь вскользь упоминается о режиме заданной скорости вращения, в котором всегда устанавливается единственное стационарное состояние с промежуточным положением фазовой границы (ср. [2]), и поэтому с точки зрения нестационарных особенностей течения он не представляет большого интереса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Маклаков С. В., Столин А. М., Худяев С. И. Напорное течение жидкости, застывающей с поверхности трубы, с учетом диссипативного тепловыделения. Препринт ОИХФ АН СССР. Черноголовка, 1984.
2. Маклаков С. В., Столин А. М., Худяев С. И. Фазовый переход в условиях неизотермического куэттовского течения жидкости. — ПМТФ, 1984, № 4.
3. Бостанджиян С. А., Мержанов А. Г., Худяев С. И. О гидродинамическом тепловом «взрыве». — ДАН СССР, 1965, т. 163, № 1.
4. Франк-Каменецкий Д. А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М.: Наука, 1967.
5. Абрамов В. Г., Гонтковская В. Т., Мержанов А. Г. К теории теплового воспламенения. — Изв. АН СССР. Сер. химическая, 1966, № 3.

Поступила 16/XI 1984 г.

УДК 532.529.6

ДВИЖЕНИЕ ТОРОИДАЛЬНОЙ ГАЗОВОЙ ПОЛОСТИ В БЕЗГРАНИЧНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

А. А. Дорфман, Г. И. Яговдик

(Ленинград)

Исследование движения тороидальной газовой полости представляет интерес главным образом в связи с тем, что при определенных условиях первоначально сферическая газовая полость в результате образования центральной кумулятивной струи приобретает тороидальную форму.

В [1] изучено расширение тороидальной газовой полости в рамках модели сжимаемой жидкости. Результаты этой работы дают возможность определить максимальный радиус полости, однако в [1] предполагается, что кольцевая ось полости неподвижна. Между тем в ряде случаев расширение тороидальной полости сопровождается движением ее в вертикальном и горизонтальном направлениях.

Рассмотрим динамику тороидальной полости с учетом перемещений ее кольцевой оси. Пусть в начальный момент времени в безграничной несжимаемой жидкости плотностью ρ в горизонтальной плоскости расположена тороидальная газовая полость, радиус кольцевой оси которой a , радиус поперечного сечения R_0 . Давление газа внутри полости p_0 , давление в жидкости на глубине расположения полости p_∞ , полость обладает вертикальной скоростью V . Динамика полости включает две основные составляющие: пульсационное движение вблизи кольцевой оси, вызванное перепадом давления $p_0 - p_\infty$, и движение в вертикальном направлении, обусловленное наличием вертикальной скорости и поддерживаемое силой плавучести.

Для составления уравнений движения полости определим потенциал скорости, обусловленной пульсирующим и всплывающим тором, т. е. найдем гармоническую функцию во внешности тора, большой и малый радиусы которого соответственно a и R .

Будем исходить из мультипольного разложения потенциала

$$(1) \quad \Phi = D_0 \Phi_0 + \sum_{i=1}^2 D_i \frac{\partial \Phi_0}{\partial z_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 D_{ij} \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial z_i \partial z_j} + \dots,$$

где $\Phi_0 = \frac{2}{\pi} \frac{K(k)}{\sqrt{(z_1 + a)^2 + z_2^2}}$ — потенциал единичного кольцевого источника; K — полный эллиптический интеграл первого рода; $k = \sqrt{\frac{4az_1}{(z_1 + a)^2 + z_2^2}}$ — модуль эллиптического интеграла; z_1, z_2 — система цилиндрических координат, начало которой расположено в плоскости кольцевой оси тора (z_1 — радиальная координата, z_2 — осевая); D_0, D_i, D_{ij} — мультипольные моменты.

Введем полярные координаты $z_1 = a + r \cos \theta, z_2 = r \sin \theta$. При вычислении потенциала (1) заменим значения эллиптических интегралов их асимптотиками, справедливыми при $r/a \ll 1$ и выражающимися через гармонические функции [2]. Представим потенциал в виде $\Phi = \Phi^{(+)} + \Phi^{(-)}$, где $\Phi^{(+)}$ — четная по θ составляющая — представляет собой потенциал пульсационного движения полости; $\Phi^{(-)}$ — нечетная по θ составляющая — описывает потенциал поступательного движения тора. При определении значения потенциала $\Phi^{(+)}$ будем считать $D_i = \frac{R^2}{a^2} d_i, D_{ij} = \frac{R^4}{a^4} d_{ij}$; при вычислении $\Phi^{(-)}$ положим $D_{ij} = \frac{R^2}{a^2} d_{ij}, D_{ijk} = \frac{R^4}{a^4} d_{ijk}$.

Значения величин $D_0, d_i, d_{ij}, d_{ijk}$ найдем, исходя из кинематического условия на границе тора:

$$\left. \frac{\partial \Phi^{(+)}}{\partial r} \right|_{r=R} = \dot{R}, \quad \left. \frac{\partial \Phi^{(-)}}{\partial r} \right|_{r=R} = \dot{Z} \sin \theta,$$

где Z — вертикальная координата полости, отсчитываемая от ее начального состояния; точки над переменными величинами здесь и ниже — символ дифференцирования по времени.

Ограничиваясь слагаемыми порядка R^2/a^2 , получим

$$(2) \quad \Phi^{(+)} = -R\dot{R} \left\{ \left[\Lambda + (2\Lambda - 3) \frac{r^2}{16a^2} + \frac{R^2}{8a^2} (\Lambda_R - 2)(2\Lambda - 1) \right] - \right. \\ \left. - \left[(2\Lambda - 1) \frac{r}{2a} + \frac{R^2}{2a^2} (\Lambda_R - 2) \frac{a}{r} \right] \cos \theta + \left[(3\Lambda - 4) \frac{r^2}{16a^2} + \frac{R^2}{8a^2} (\Lambda_R - 2) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{R^2}{32a^2} (6\Lambda_R - 11) \frac{R^2}{r^2} \right] \cos 2\theta \right\};$$

$$(3) \quad \Phi^{(-)} = -R\dot{Z} \left\{ \left[\frac{R}{r} + \frac{R^2}{32a^2} (4\Lambda_R - 7) \frac{R}{r} + \frac{R^2}{32a^2} (4\Lambda - 3) \frac{r}{R} \right] \sin \theta - \right. \\ \left. - \frac{R}{4a} \sin 2\theta + \frac{R^2}{32a^2} \left(3 \frac{r}{R} + \frac{R^3}{r^3} \right) \sin 2\theta \right\},$$

где $\Lambda = \ln \frac{8a}{r}$; $\Lambda_R = \Lambda|_{r=R} = \ln \frac{8a}{R}$.

На основании (2), (3) выражение для кинетической энергии жидкости может быть записано следующим образом:

$$(4) \quad T = -\pi a R \rho \int_0^{2\pi} \left(\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} d\theta = \\ = 2\pi^2 a R^2 \dot{R}^2 \rho \left[\Lambda_R + \frac{R^2}{16a^2} (4\Lambda_R^2 - 8\Lambda_R + 1) \right] + \\ + \pi^2 a R^2 \dot{Z}^2 \rho \left[1 + \frac{R^2}{16a^2} (4\Lambda_R - 5) \right].$$

Выражение для потенциальной энергии системы жидкость — полость имеет вид

$$\Pi = \frac{2\pi^2 a R^2}{\kappa - 1} p_0 \left(\frac{R_0}{R} \right)^{2\kappa} + 2\pi^2 a R^2 (p_\infty - \rho g Z),$$

где κ — показатель адиабаты газа внутри полости. Дифференцируя уравнение баланса энергии $T + \Pi = \text{const}$ по времени и присоединяя к результату уравнение изменения вертикального импульса (при вычислении присоединенной массы жидкости принимаем во внимание второе слагаемое в (4)), получим систему уравнений, описывающих движение тороидальной полости:

$$(5) \quad 2\dot{R} \left[\dot{R}^2 \Lambda_R + \frac{1}{2} \dot{Z}^2 + \frac{p_\infty}{\rho} - gZ - \frac{p_0}{\rho} \left(\frac{R_0}{R} \right)^{2\kappa} \right] + R \left(2\dot{R} \ddot{R} \Lambda_R + \right. \\ \left. + \ddot{Z} \dot{Z} - g \dot{Z} - \frac{\dot{R}^3}{R} \right) + \frac{R^2}{16a^2} [4(2\Lambda_R - 3) \dot{R} \dot{Z}^2 + (4\Lambda_R - 5) R \dot{Z} \ddot{Z} + 2(4\Lambda_R^2 - 8\Lambda_R + \\ + 1) R \dot{R} \ddot{R} + 4(4\Lambda_R^2 - 10\Lambda_R + 3) \dot{R}^3] = 0;$$

$$(6) \quad (2\dot{R} \dot{Z} + R \ddot{Z}) \left[1 + \frac{R^2}{16a^2} (4\Lambda_R - 5) \right] + \frac{R^2}{8a^2} (4\Lambda_R - 7) \dot{R} \dot{Z} = gR.$$

Введем безразмерные переменные $R' = R/R_0$, $Z' = Z/R_0$, $t' = \frac{t}{R_0} \sqrt{\frac{p_\infty}{\rho}}$, тогда после преобразований система (5), (6) может быть записана в виде, удобном для численного интегрирования:

$$(7) \quad \dot{u} = \frac{1}{R \Lambda_R} \left\{ \left(\delta R^{-2\kappa} + \frac{u^2 + v^2}{2} + \beta Z - \frac{p_0}{p_\infty} \Lambda_R - 1 \right) \left[1 - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{R^2}{16a^2} \frac{(4\Lambda_R^2 - 8\Lambda_R + 1)}{\Lambda_R} \right] + \frac{R^2}{8a^2} [(2\Lambda_R - 3)v^2 - (4\Lambda_R^2 - 10\Lambda_R + 3)u^2] \right\}, \\ \dot{v} = \beta - \frac{2uv}{R} - \frac{R}{16a^2} [(4\Lambda_R - 5)\beta R + 2(4\Lambda_R - 7)uv], \quad \dot{R} = u, \quad \dot{Z} = v; \\ R = 1, \quad Z = 0, \quad u = \varepsilon, \quad v = \alpha \quad \text{при } t = 0.$$

При записи (7) приняты обозначения: $\bar{p} = \frac{\rho g R_0}{p_\infty}$, $\delta = \frac{p_0}{p_\infty}$, $\alpha = \frac{v}{\sqrt{p_\infty/\rho}}$, $\varepsilon = \frac{u}{\sqrt{p_\infty/\rho}}$, где U — начальное значение величины $\dot{R}$. Штрихи у безразмерных величин здесь и ниже опускаются. Результаты решения задачи о расширении тороидальной полости при $a_0 = 5 \cdot 10^2, 5 \cdot 10^3, 5 \cdot 10^4$ (линии 1—3) представлены на рис. 1, где $\alpha = \mu = 0$, $\bar{p} = 10^{-3}$, $\delta = 10^4$, $\varepsilon = 1$, $\kappa = 4/3$.

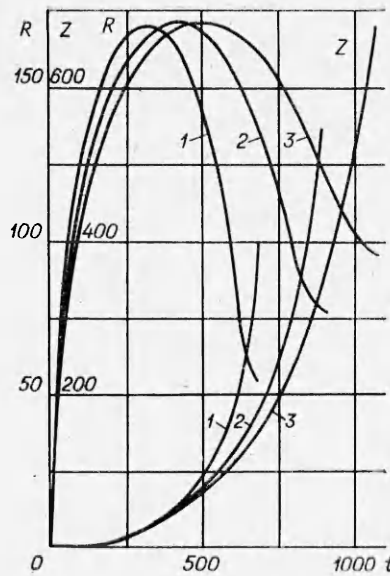
Рассмотрим схлопывание пустой полости $\delta = 0$ при условии $\beta \ll 1$ в приближении тонкого тора: в уравнениях (5), (6) отбросим слагаемые порядка R^2/a^2 . Тогда основные уравнения могут быть приведены к виду уравнений баланса энергии и импульса

$$(8) \quad R^2 \left(\dot{R}^2 \Lambda_R + \frac{1}{2} \dot{Z}^2 + 1 \right) = \frac{1}{2} \alpha^2 + 1, \quad R^2 \dot{Z} = \alpha.$$

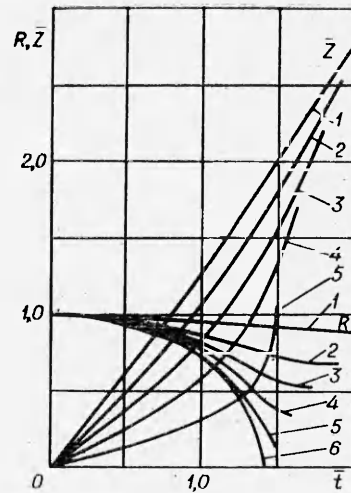
Из (8) следует

$$(9) \quad \dot{R} = - \frac{1}{\sqrt{\Lambda_R}} \frac{\sqrt{(1 - R^2)(R^2 - R_*^2)}}{R^2},$$

где $R_* = \alpha/\sqrt{2}$ — минимальное значение радиуса полости, соответствующее состоянию $\dot{R} = 0$. Знак минус перед корнем выбран из условия рас-



Р и с. 1



Р и с. 2

смотрения стадии схлопывания. Отметим, что при $R = R_*$ достигается максимальное значение вертикальной скорости полости, которое определяется по формуле $\max |\dot{Z}| = \sqrt{2}/R_*$. Уравнение (9) приводит к квадратуре

$$t = \int_R^1 \sqrt{\Lambda_R} \frac{R^2 dR}{\sqrt{(1-R^2)(R^2-R_*^2)}}.$$

Для приближенного вычисления интеграла заменим переменную интегрирования под знаком логарифма единицей. Тогда получим соотношения

$$(10) \quad t = \sqrt{\ln 8a} E(\varphi, k_+), \quad Z = \alpha \sqrt{\ln 8a} F(\varphi, k_+),$$

где F , E — неполные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно; $k_+ = \sqrt{1-R_*^2}$; $\varphi = \arcsin \sqrt{\frac{1-R^2}{1-R_*^2}}$.

Результаты расчета по формулам (10) показаны на рис. 2, где дана зависимость R и приведенного вертикального перемещения полости $\bar{Z} = Z \sqrt{2/\ln 8a}$ от приведенного времени $\bar{t} = t \sqrt{2/\ln 8a}$ при $\alpha = 1,25; 1,0; 0,75; 0,5; 0,25; 0$ (линии 1–6), $\beta = \delta = \varepsilon = \mu = 0$.

Из (10) следуют формулы для времени схлопывания полости и для соответствующей высоты подъема

$$(11) \quad t_* = \sqrt{\ln 8a} E(k_+), \quad Z_* = \alpha \sqrt{\ln 8a} K(k_+),$$

где E — полный эллиптический интеграл второго рода.

Результаты расчета по формулам (10), (11) сопоставлялись с результатами численного решения системы (7) в приближении тонкого тора, вследствие чего установлено, что погрешность приближенных аналитических зависимостей не превышает 5%.

В случае $\alpha = 0$ уравнение, описывающее схлопывание пустой неподвижной полости в приближении тонкого тора, согласуется с соответствующим уравнением [1]

$$R \ddot{R} \Lambda_R + (\Lambda_R - 1/2) \dot{R}^2 + 1 = 0.$$

Приближенное решение этого уравнения ($\Lambda_R \rightarrow \sqrt{\ln 8a}$) имеет вид

$$R = \sqrt{1 - t^2/\ln 8a}.$$

Формирование кумулятивной струи может привести к образованию циркуляционного движения вокруг кольцевой оси тора и появлению горизонтальной скорости $\dot{a} = w$.

Наличие циркуляции Γ обуславливает появление действующей на полость силы Жуковского, имеющей вертикальную и горизонтальную компоненты. В этом случае помимо пульсационного и вертикального движения полости может быть перемещение ее кольцевой оси в горизонтальной плоскости. Задача о движении тороидальной полости при наличии циркуляции примыкает к задаче о подъеме вихревого кольца, которая рассматривалась в [3], но без учета пульсационного движения.

Ограничимся приближением тонкого тора и примем во внимание выражения для кинетической энергии, импульса и скорости вихревого кольца, приведенные в [4]. Корректность применимости этих зависимостей в рассматриваемом приближении показана в [5]. Тогда уравнение баланса энергии может быть записано следующим образом:

$$(12) \quad aR^2 \left(\dot{R}^2 \Lambda_R + \frac{v^2 + w^2}{2} \right) + \frac{1}{4} \gamma^2 a (\Lambda_R - 7/4) + \\ + \frac{\delta}{\kappa - 1} a R^{2(1-\kappa)} \left(\frac{u_0}{a} \right)^\kappa + a R^2 (1 - \beta Z) = \text{const},$$

где $\gamma = \Gamma/(\pi R_0 \sqrt{p_\infty/\rho})$.

Уравнения изменения вертикальной и горизонтальной составляющих импульса полости имеют вид

$$(aR^2 v)^\cdot = \beta a R^2 - \gamma a w, \quad (aR^2 w)^\cdot = \gamma a v.$$

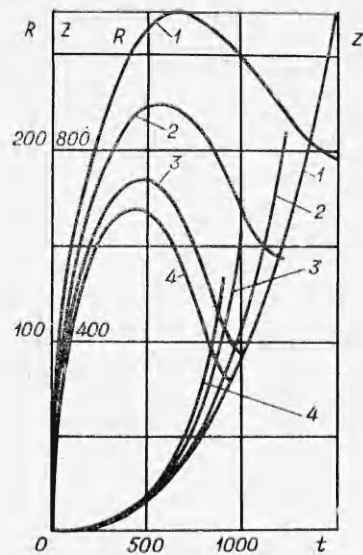
В правых частях этих уравнений записаны выражения для силы плавучести и силы Жуковского, действующих на полость. Первое уравнение при $\beta = 0$ имеет интеграл $aR^2 v = \frac{1}{2} \gamma (a_0^2 - a^2) + \alpha a_0$.

Дифференцируя уравнение (12) по времени, в результате преобразований приведем основную систему уравнений, описывающих динамику тороидальной полости при наличии циркуляции, к виду

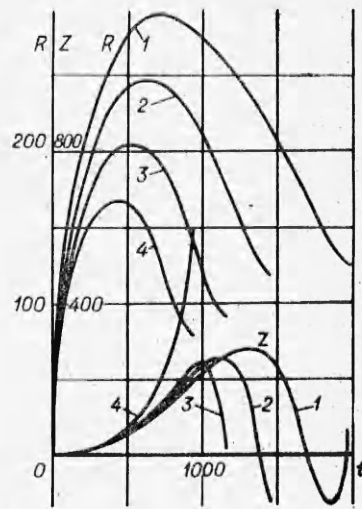
$$(13) \quad \dot{u} = \frac{1}{2u\Lambda_R} \left\{ \left(\frac{2u}{R} + \frac{w}{a} \right) \left[\delta \left(\frac{a_0}{a} \right)^\kappa R^{-2\kappa} + \frac{v^2 + w^2}{2} + \beta Z - u^2 \Lambda_R - 1 \right] + \right. \\ \left. + \beta \gamma \frac{1}{4\pi a} (\Lambda_R - 1/4) + \frac{\gamma^2}{4aR^2} \left[\frac{au}{R} - w (\Lambda_R - 3/4) \right] + u^2 \left(\frac{u}{R} - \frac{w}{a} \right) \right\}, \\ \dot{v} = \beta - \frac{2uv}{R} - \frac{vw}{a} - \frac{\gamma w}{R^2}, \quad \dot{w} = \frac{\gamma v}{R^2} - \frac{2uv}{R} - \frac{w^2}{a}, \quad \dot{R} = u, \\ \dot{Z} = v + \frac{\gamma}{4\pi a} (\Lambda_R - 1/4), \quad \dot{a} = w.$$

При $t = 0$ $R = 1$, $a = a_0$, $Z = 0$, $\dot{R} = \epsilon$, $\dot{Z} = \alpha$, $\dot{a} = \mu$, где $\mu = W/\sqrt{p_\infty/\rho}$, W — начальное значение $\dot{a}$.

Результаты численного решения задачи о движении полости под действием содержащихся в ней газообразных продуктов при различных значениях μ и γ даны на рис. 3—5 ($a_0 = 10^4$, $\beta = 10^{-3}$, $\delta = 10^4$, $\epsilon = 1$, $\kappa = 4/3$): на рис. 3 ($\alpha = \gamma = 0$) линии 1—4 соответствуют $\mu = 300$; 200; 100; 0; на рис. 4 ($\alpha = \mu = 0$) линии 1—4 отвечают $\gamma = 200$; 150; 100; 0; на рис. 5 $\Delta a = a - a_0$, $\alpha = \mu = 0$, $\gamma = 150$. Расчеты показывают, что при $\gamma \neq 0$ перемещения кольцевой оси полости могут иметь осциллирующий характер.



Р и с. 3

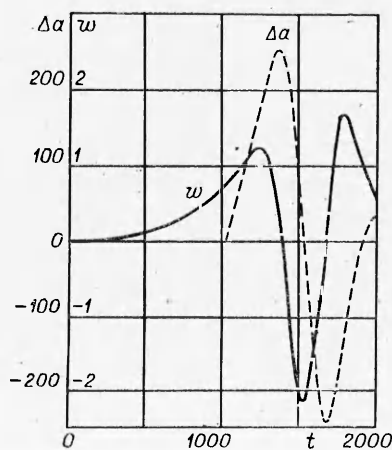


Р и с. 4

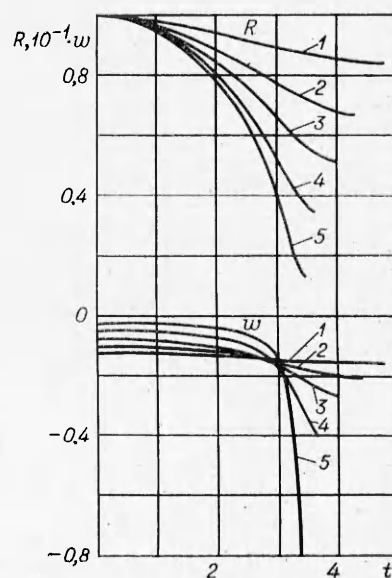
При $\beta = \gamma = 0$ система (13) может быть записана в виде законов сохранения энергии и импульса

$$(14) \quad \begin{aligned} & \sqrt{\Lambda_R} a R^2 \dot{R} = \\ & = \pm \sqrt{(a_0 - a R^2)(a R^2 - a_0 R_\Delta^2) + \frac{a_0^0}{\kappa - 1} [a R^2 - a_0^{\kappa-1} (a R^2)^{2-\kappa}]}, \\ & a R^2 \dot{a} = \mu a_0, \quad a R^2 \dot{Z} = \alpha a_0, \end{aligned}$$

где $\bar{R}_\Delta = \sqrt{(\alpha^2 + \mu^2)/2}$. Знаки $+$ и $-$ перед радикалом соответствуют расширению и схлопыванию полости. Последние два уравнения (14) приводят к явному соотношению $Z = \alpha(a - a_0)/\mu$, которое позволяет исключить уравнение для Z из дальнейшего анализа. Приравняв выражение под радикалом нулю, получим связь между параметрами задачи, имеющую место при достижении радиусом полости экстремальных значений.



Р и с. 5



Р и с. 6

В случае схлопывания полости ($\delta = 0$, $R < 1$) первые два уравнения системы (14) описывают движение полости между состояниями a_0 и $a_0 R_\Delta^2$. Если $\mu > 0$, $R_\Delta > 1$, то $a_0 \leq a R^2 \leq a_0 R_\Delta^2$; если $\mu < 0$, $R_\Delta < 1$, то $a_0 R_\Delta^2 \leq a R^2 \leq a_0$. При достижении минимального радиуса R_Δ размеры и скорость полости определяются по формулам

$$\dot{a} \Big|_{R=R_\Delta} = \frac{\mu}{R_\Delta^2}, \quad \dot{Z} \Big|_{R=R_\Delta} = \frac{\alpha}{R_\Delta^2}.$$

Результаты численного решения системы (13) для случая схлопывания пустой полости представлены на рис. 6, где $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \epsilon = 0$, $a_0 = 10^4$, а линии 1—5 соответствуют $\mu = -1,25$; -1 ; $-0,75$; $-0,5$; $-0,25$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кедринский В. К. Об одномерной пульсации торондальной газовой полости в сжимаемой жидкости. — ПМТФ, 1977, № 3.
2. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1964.
3. Онуфриев А. Т. Теория движения кольца под действием силы тяжести. — Подъем облака атомного взрыва. — ПМТФ, 1967, № 2.
4. Ламб Г. Гидродинамика. М.—Л.: ОГИЗ, 1947.
5. Fraenkel L. E. Examples of steady vortex rings of small cross-section in an ideal fluid. — J. Fluid Mech., 1972, v. 51, N 1.

Поступила 20/XI 1984г.

УДК 536.24:532.54

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕПЛООБМЕНА В ОТРЫВНЫХ ОБЛАСТЯХ, ОБТЕКАЕМЫХ СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ В СОПЛЕ ЛАВАЛЯ

Е. Г. Зауличный, В. М. Трофимов

(Новосибирск)

1. В работе описаны эксперименты и приближенный метод расчета теплообмена сверхзвукового потока газа со стенкой в отрывной области, возникающей на уступе-каверне профиля расширяющейся части сопла Лавалья. Опыты проводились на горизонтальной струйной установке, в которой устанавливалось плоское сопло с кавернами (рис. 1, а). Измерены локальные коэффициенты теплообмена и давление на стенках сопла, включая отрывную область. Для измерения коэффициентов теплообмена в сложных условиях течения применялась специальная методика тонких подогреваемых пленок [1]. Параметры течения: температура торможения $T_0 = 250-270$ К, полное давление $p_0 = (9,0-12,5) \cdot 10^5$ Па, число Рейнольдса, построенное по размеру критического сечения сопла, $Re = 6 \cdot 10^6$. Измерения проводились на трех моделях сопел с числами Маха в точке отрыва на кромке каверны соответственно: 1,90; 2,28; 2,61. Схематическое расположение каверны приведено на рис. 1, а. Длина горизонтальной стенки каверны варьировалась в пределах $L = 0$; 14; 27; 47; 60 мм. Высота ее вертикальной стенки $h = 12$ мм во всех опытах оставалась постоянной и была существенно больше толщины пограничного слоя перед точкой отрыва ($\delta_1/h = 0,13-0,17$).

Определим основные типы каверны на профиле сопла в зависимости от длины ее горизонтальной стенки. Каверна, полученная удалением части профиля сопла Лавалья, называется каверной без смещения профиля сопла. Если увеличить длину горизонтальной стенки каверны выдвижением части сопла в поток, то получается каверна с положительным смещением профиля сопла; если же уменьшить ту же стенку перемещением части профиля сопла в обратную сторону, то получится каверна с отрицательным смещением профиля сопла. В данных опытах режиму без сме-