УДК 539.376

ДЛИТЕЛЬНАЯ ПРОЧНОСТЬ МЕТАЛЛОВ ПРИ РАВНООСНОМ ПЛОСКОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

А. М. Локощенко, В. В. Назаров

Институт механики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, 119992 Москва
E-mails: loko@imec.msu.ru, inmec130@mail.ru

Приведены результаты испытаний, свидетельствующие о существенной зависимости длительной прочности металлов от вида напряженного состояния и способа кратковременного нагружения. Для описания полученных экспериментальных данных предложен вариант кинетической теории длительной прочности, содержащий векторный параметр поврежденности и учитывающий прочностную анизотропию и поврежденность, возникающую при кратковременном нагружении. Показано, что экспериментальные и теоретические значения времени до разрушения хорошо согласуются.

Ключевые слова: анизотропия, длительная прочность, металлы, поврежденность, равноосное плоское растяжение.

1. Сравнение результатов испытаний при одноосном и двухосном растяжениях. Рассмотрим одноосное ($\sigma_1 = \sigma_0 > 0$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$) и равноосное плоское ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_0 > 0$, $\sigma_3 = 0$) напряженные состояния при одном и том же уровне напряжения σ_0. Результаты экспериментов [1–3] показывают, что время до разрушения t_1^* при одноосном растяжении значительно больше времени до разрушения t_2^* при двухосном растяжении ($c = t_1^*/t_2^* > 1$).

В работе [1] приведены результаты экспериментов на тонкостенных трубчатых образцах из нержавеющей стали марки Х18Н10Т при температуре 850 °С. В случае $\sigma_0 = 50$ МПа среднее для 11 испытаний ($t_1^* = 12 \div 30$ ч) значение $t_1^* = 21{,}8$ ч, при этом $t_2^* = 8{,}3$ ч, следовательно, отношение $c = 2{,}6$. В случае $\sigma_0 = 60$ МПа среднее для шести испытаний ($t_1^* = 6{,}7 \div 20{,}5$ ч) значение $t_1^* = 15{,}4$ ч, при этом $t_2^* = 5{,}1$ ч, $c = 3$. Результаты аналогичных испытаний другой серии образцов из стали марки Х18Н10Т при температуре 850 °С приведены в [2]. При $\sigma_0 = 60$ МПа средние значения $t_1^* = 10$ ч, $t_2^* = 4$ ч, поэтому $c = 2{,}5$.

В работе [3] приведены экспериментальные данные о длительной прочности прямоугольных пластин из алюминиевого сплава Al–Mg–Si при температуре 210 °С. При различных значениях напряжения σ_0 отношение $c = 1{,}8 \div 3{,}2$.

Таким образом, имеющиеся экспериментальные данные свидетельствуют о том, что при добавлении к осевому растягивающему напряжению поперечного растягивающего напряжения той же величины время до разрушения уменьшается в несколько раз.

2. Векторное представление величины поврежденности. В расчетах на длительную прочность элементов конструкций, находящихся в условиях сложного напряженного состояния, как правило, используется критериальный подход. При данном подходе учитывается единственная характеристика напряженного состояния — так называемое

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08-08-00142).

эквивалентное напряжение σ_e, в качестве которого рассматриваются различные комбинации компонент тензора напряжений, имеющие механический смысл либо максимального растягивающего напряжения, либо интенсивности касательных напряжений, либо разности максимального и минимального главных напряжений и т. д. Поскольку при одноосном и двухосном ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_0$, $\sigma_3 = 0$) растяжениях рассматриваемые эквивалентные напряжения совпадают ($\sigma_e = \sigma_0$), получить с использованием критериального соотношения $t^* = t^*(\sigma_e)$ различные значения t_1^*, t_2^* невозможно.

В работе [4] для описания процесса накопления поврежденности в металле, находящемся в условиях ползучести при сложном напряженном состоянии, введена векторная характеристика поврежденности $\boldsymbol{\omega}$. В декартовых координатах 1, 2, 3 скорости проекций ω_k вектора $\boldsymbol{\omega}$ на направления главных напряжений σ_k определяются зависимостями

$$\frac{d\omega_k}{dt} = \dot{\omega}_k = \begin{cases} f(\sigma_k, \omega_k), & \sigma_k > 0, \\ 0, & \sigma_k \leqslant 0, \end{cases} \qquad k = 1, 2, 3. \tag{1}$$

При этом выражение для поврежденности $\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}$ должно удовлетворять условиям $\omega(0) = 0$, $\omega(t^*) = 1$.

3. Учет мгновенной поврежденности для изотропного материала. При описании зависимости времени разрушения t^* от вида напряженного состояния [1–3] используем обобщение векторного подхода [4] с учетом поврежденности, накопленной в процессе нагружения. В качестве одной из возможных моделей, позволяющих получить различные значения времен t_1^*, t_2^* при растягивающих напряжениях, рассмотрим систему соотношений

$$d\omega_k = \frac{d\varphi(\sigma_k)}{d\sigma_k}\, d\sigma_k + f(\sigma_k)\, dt, \qquad k = 1, 2, \tag{2}$$

где функция $\varphi(\sigma_k)$ характеризует величину проекции ω_k вектора поврежденности, накопленной в процессе нагружения; $f(\sigma_k)$ — постоянная скорость проекции ω_k во времени t. В случае одноосного растяжения из системы (2) следует

$$\omega_1(t) = \varphi(\sigma_0) + f(\sigma_0)t, \qquad \omega_2 = 0, \qquad t_1^* = [1 - \varphi(\sigma_0)]/f(\sigma_0), \tag{3}$$

в случае равноосного плоского ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_0$, $\sigma_3 = 0$) растяжения из (2) находим

$$\omega_1(t) = \omega_2(t) = \varphi(\sigma_0) + f(\sigma_0)t, \qquad t_2^* = [\sqrt{2}/2 - \varphi(\sigma_0)]/f(\sigma_0). \tag{4}$$

Из соотношений (3), (4) следует, что мгновенное значение поврежденности $0 < \varphi(\sigma_0) < \sqrt{2}/2$, а отношение $c = t_1^*/t_2^* = (1 - \varphi(\sigma_0))/(\sqrt{2}/2 - \varphi(\sigma_0)) > \sqrt{2}$ при любых значениях σ_0 в указанном диапазоне. Используя результаты испытаний [3], при $\sigma_0 = 56{,}2$ МПа получаем $t_1^* = 900$ ч, $t_2^* = 280$ ч. При $\varphi(\sigma_0) = 0{,}57$, $f(\sigma_0) = 4{,}78 \cdot 10^{-4}$ ч$^{-1}$ значения t_1^*, t_2^*, вычисленные по соотношениям (3), (4), совпадают с соответствующими экспериментально полученными значениями.

В кинетических соотношениях (2) отношение c зависит только от уровня поврежденности $\varphi(\sigma_0)$, накопленной при квазистатическом нагружении. Учет мгновенной поврежденности в форме (2) позволяет описать экспериментальные данные для $c \geqslant \sqrt{2}$. При этом полученный результат не зависит от характера накопления поврежденности при ползучести.

4. Учет анизотропии материала и взаимозависимости компонент вектора поврежденности. В процессе изготовления тонкостенных трубок материал может приобретать анизотропию прочностных характеристик. Например, в результате низкотемпературной термической обработки высокопрочностных стальных труб [5] отношение предела кратковременной прочности в осевом направлении к пределу прочности в окружном направлении может принимать значения $1{,}25 \div 2{,}50$ в зависимости от режима обработки.

Совместное действие в тонкостенных трубках внутреннего давления q и дополнительной осевой силы P приводит к двухосному растяжению $\sigma_z > 0$, $\sigma_\theta > 0$, $\sigma_r = 0$, поэтому согласно (1) $\omega_r = 0$. Уравнение (1) представим в виде

$$\frac{d\omega_k}{dt} = \begin{cases} G\omega_k^{-1}\omega^{2\gamma}(\hat\sigma_k)^n, & \hat\sigma_k > 0, \\ 0, & \hat\sigma_k \leqslant 0, \end{cases} \qquad k = z, \theta, \tag{5}$$

где $\hat\sigma_k$ — значения приведенных главных напряжений ($\hat\sigma_z = \sigma_z/\alpha$, $\hat\sigma_\theta = \sigma_\theta$; α — коэффициент прочностной анизотропии, представляющий собой отношение σ_z/σ_θ напряжений, приводящих к разрушению за одно и то же время t^* [6]); G, n, γ — постоянные. В случае одноосного растяжения из кинетического уравнения (5) следует

$$\begin{gathered} \frac{d\omega_z}{dt} = G\omega_z^{2\gamma-1}\Big(\frac{\sigma_z}{\alpha}\Big)^n, \qquad \omega_z = \omega, \qquad \frac{d}{dt}\Big(\frac{\omega^{2(1-\gamma)}}{2(1-\gamma)}\Big) = G\Big(\frac{\sigma_0}{\alpha}\Big)^n, \\ \frac{\omega^{2(1-\gamma)}}{2(1-\gamma)} = G\Big(\frac{\sigma_0}{\alpha}\Big)^n t_1, \qquad t_1^* = \frac{1}{2G(1-\gamma)(\sigma_0/\alpha)^n}. \end{gathered} \tag{6}$$

При двухосном ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_0 > 0$, $\sigma_3 = 0$) растяжении в результате преобразований и интегрирования уравнений (5) находим

$$\begin{gathered} \frac{d\omega^2}{dt} = 2G\omega^{2\gamma}\Big(\Big(\frac{\sigma_0}{\alpha}\Big)^n + \sigma_0^n\Big), \qquad \frac{\omega^{2(1-\gamma)}}{1-\gamma} = 2G\Big(\Big(\frac{\sigma_0}{\alpha}\Big)^n + \sigma_0^n\Big)t_2, \\ t_2^* = \frac{1}{2G(1-\gamma)((\sigma_0/\alpha)^n + \sigma_0^n)}. \end{gathered} \tag{7}$$

Из соотношений (6), (7) получаем

$$c = \frac{t_1^*}{t_2^*} = \frac{(\sigma_0/\alpha)^n + \sigma_0^n}{(\sigma_0/\alpha)^n} = 1 + \alpha^n. \tag{8}$$

В случае изотропного материала ($\alpha = 1$) из формулы (8) следует единственное значение $c = 2$, в случае анизотропного материала ($\alpha > 1$) $c > 2$. Заметим, что отношение c зависит только от значений α, n и не зависит от других постоянных и от уровня напряженного состояния σ_0.

5. Влияние пути кратковременного нагружения на длительную прочность с учетом анизотропии материала. Для исследования влияния способа кратковременного нагружения на время до разрушения при постоянных компонентах тензора напряжений в лаборатории ползучести и длительной прочности металлов Института механики МГУ им. М. В. Ломоносова проведена следующая серия испытаний [2]. Тонкостенные образцы из нержавеющей стали марки Х18Н10Т при температуре 850 °C испытывались на длительную прочность при комбинированном действии растяжения и внутреннего давления. После нагружения значения главных напряжений σ_z, σ_θ становились равными: $\sigma_z = \sigma_\theta = \sigma_0 = 60$ МПа. В различных образцах заданное напряженное состояние достигалось тремя способами (программами) кратковременного нагружения. В двух образцах сначала создавалось давление, при котором $\sigma_z = 30$ МПа, $\sigma_\theta = 60$ МПа, затем в результате дополнительного нагружения растягивающей силой осевое напряжение σ_z достигало значения, равного 60 МПа, при этом времена до разрушения равны 6,0 и 6,1 ч соответственно. Два других образца нагружались по следующей программе: сначала создавалось осевое растяжение, затем дополнительное внутреннее давление, при этом времена до разрушения равны 2 и 3 ч соответственно. Согласно третьей программе нагружения попеременно добавлялись малые приращения растягивающей силы P и внутреннего давления q, в этом случае образцы разрушились за времена 3,4 и 3,8 ч. Во всех шести испытаниях время нагружения составляло приблизительно 3 мин, что в среднем на два порядка меньше времени последующих испытаний при постоянных напряжениях. Несмотря на немногочисленность, проведенные экспериментальные исследования свидетельствуют о существенной зависимости длительной прочности от программы кратковременного нагружения. При описании этой зависимости будем полагать, что поврежденность материала ω накапливается с момента начала приложения растягивающих напряжений, т. е. к моменту завершения программы нагружения ($\sigma_z = \sigma_\theta = \sigma_0 = 60$ МПа) поврежденность материала принимает начальное значение $\omega_0 = \omega(+0)$. Далее поврежденность ω развивается в условиях ползучести до значения $\omega(t^*) = 1$, соответствующего моменту разрушения.

Рост компонент ω_k вектора $\boldsymbol{\omega}$ в рассматриваемых трубчатых образцах описывается кинетическими уравнениями

$$d\omega_k = \varphi(s_k, \omega_k, \omega)\, d\sigma_k + f(s_k, \omega_k, \omega)\, dt, \qquad k = z, \theta \tag{9}$$

(s_k — компоненты девиатора напряжений σ_k в главных осях).

Для различных программ кратковременного нагружения найдем значения ω_0. При описании процесса кратковременного нагружения с помощью системы уравнений (9) введем прочностную анизотропию компонент ω_z, ω_θ вектора $\boldsymbol{\omega}$, т. е. будем считать, что равенство $\omega_z = \omega_\theta$ выполняется в том случае, если компоненты девиатора напряжений удовлетворяют соотношению $s_\theta = s_z/\alpha$ ($\alpha \geqslant 1$). Введем поле приведенных компонент девиатора напряжений: $\hat{s}_z = s_z/\alpha$, $\hat{s}_\theta = s_\theta$. Тогда зависимость компонент ω_k от приведенных компонент $\hat{s}_k$ девиатора напряжений становится изотропной. Кинетические уравнения (9) представим в виде

$$\begin{gathered} d\omega_k = \begin{cases} (Q/(\sigma_{00})^{m+1})\omega_k^{-1}\omega^{2\beta}(\hat{s}_k)^m\, d\hat{\sigma}_k, & \hat{s}_k > 0, \\ 0, & \hat{s}_k \leqslant 0, \end{cases} \qquad k = z, \theta, \\ \omega = \sqrt{\omega_z^2 + \omega_\theta^2}, \qquad \omega(-0) = 0, \quad \omega(+0) = \omega_0, \quad \omega(t^*) = 1, \end{gathered} \tag{10}$$

где σ_{00} — произвольная постоянная величина, имеющая размерность напряжения; $\hat{s}_z$, $\hat{s}_\theta$ — компоненты девиатора приведенных напряжений; Q, m, β — постоянные безразмерные величины. Поскольку радиальное напряжение $\hat{\sigma}_r \equiv 0$, среднее напряжение $\hat{\sigma} = (\hat{\sigma}_z + \hat{\sigma}_\theta + \hat{\sigma}_r)/3 = (\hat{\sigma}_z + \hat{\sigma}_\theta)/3 = (\sigma_z/\alpha + \sigma_\theta)/3$. При этом выражения для девиаторов приведенных напряжений принимают вид

$$\hat{s}_z = \hat{\sigma}_z - \hat{\sigma} = (2\sigma_z - \alpha\sigma_\theta)/(3\alpha), \qquad \hat{s}_\theta = \hat{\sigma}_\theta - \hat{\sigma} = (2\alpha\sigma_\theta - \sigma_z)/(3\alpha). \tag{11}$$

Согласно (10) накопление компонент ω_k происходит только при положительных значениях компонент девиатора напряжений $\hat{s}_z$, $\hat{s}_\theta$. Подставляя формулы (11) в (10), при $\hat{s}_z > 0$, $\hat{s}_\theta > 0$ получаем

$$\begin{aligned} 2\omega_z\omega^{-2\beta}\, d\omega_z &= (\omega_z^2 + \omega_\theta^2)^{-\beta}\, d\omega_z^2 = \frac{2Q}{(\sigma_{00})^{m+1}}\, (\hat{s}_z)^m\, d\hat{\sigma}_z = \\ &= \frac{2Q}{(\sigma_{00})^{m+1}} \Big(\frac{2\sigma_z - \alpha\sigma_\theta}{3\alpha}\Big)^m \Big(\frac{1}{\alpha}\Big)\, d\sigma_z, \\ 2\omega_\theta\omega^{-2\beta}\, d\omega_\theta &= (\omega_z^2 + \omega_\theta^2)^{-\beta}\, d\omega_\theta^2 = \frac{2Q}{(\sigma_{00})^{m+1}}\, (\hat{s}_\theta)^m\, d\hat{\sigma}_\theta = \\ &= \frac{2Q}{(\sigma_{00})^{m+1}} \Big(\frac{2\alpha\sigma_\theta - \sigma_z}{3\alpha}\Big)^m\, d\sigma_\theta. \end{aligned} \tag{12}$$

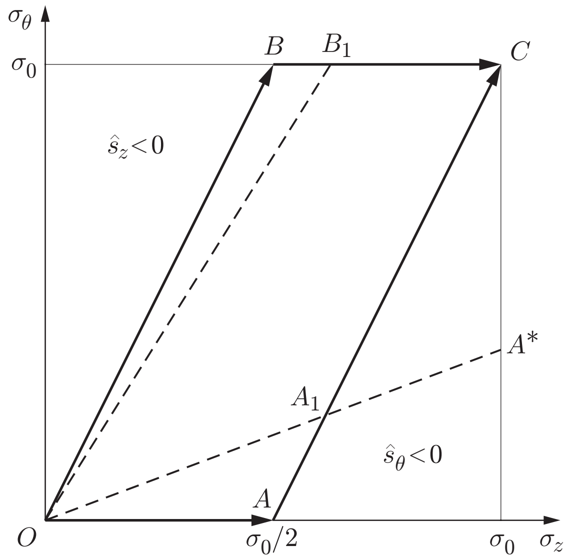

Рис. 1. Схема нагружения трубчатых образцов до достижения напряжения $\sigma_z = \sigma_\theta = \sigma_0$ по двухзвенному пути (штриховые линии — границы областей $\hat{s}_z < 0$, $\hat{s}_\theta < 0$)

Введем новые компоненты вектора поврежденности и безразмерные напряжения: $\Omega_k = (2Q)^{0,5(\beta-1)}\omega_k$, $\bar{\sigma}_k = \sigma_k/\sigma_{00}$. Далее черта над безразмерными напряжениями опускается, и уравнения (12) принимают вид

$$(\Omega_z^2 + \Omega_\theta^2)^{-\beta}\, d\Omega_z^2 = \frac{1}{\alpha}\Big(\frac{2\sigma_z - \alpha\sigma_\theta}{3\alpha}\Big)^m d\sigma_z,$$
$$(\Omega_z^2 + \Omega_\theta^2)^{-\beta}\, d\Omega_\theta^2 = \Big(\frac{2\alpha\sigma_\theta - \sigma_z}{3\alpha}\Big)^m d\sigma_\theta. \qquad (13)$$

Следует отметить, что система уравнений (13) характеризует изменение величины Ω только при положительных значениях компонент девиатора приведенных напряжений. Следовательно, справедливы неравенства

$$\hat{s}_z > 0, \quad 2\sigma_z - \alpha\sigma_\theta > 0, \qquad \hat{s}_\theta > 0, \quad 2\alpha\sigma_\theta - \sigma_z > 0. \qquad (14)$$

Исследуем систему уравнений (13) при нагружении трубчатых образцов по путям OAC и OBC (рис. 1) в диапазоне от ненагруженного состояния ($\sigma_z = \sigma_\theta = 0$) до двухосного растяжения в точке C ($\sigma_z = \sigma_\theta = \sigma_0$). В точках A и B напряжения σ_z, σ_θ равны $(\sigma_z)_A = (\sigma_z)_B = \sigma_0/2$, $(\sigma_\theta)_A = 0$, $(\sigma_\theta)_B = \sigma_0$.

Рассмотрим путь нагружения OAC, представляющий собой двухзвенную ломаную (см. рис. 1). Вдоль этой ломаной ($\hat{s}_z \geqslant 0$) компонента Ω_z увеличивается, вдоль отрезка OA напряжение $\hat{s}_\theta < 0$, поэтому $d\sigma_\theta = 0$. Таким образом, при нагружении от точки O до точки A компонента $\Omega_\theta = 0$. На отрезке AC выделим точку A_1, которая разделяет области $\hat{s}_\theta < 0$ (на отрезке AA_1) и $\hat{s}_\theta > 0$ (на отрезке A_1C), при этом $(\hat{s}_\theta)_{A_1} = 0$. В точке A_1 напряжения σ_z, σ_θ равны $(\sigma_z)_{A_1} = 2\alpha\sigma_0/(4\alpha - 1)$, $(\sigma_\theta)_{A_1} = \sigma_0/(4\alpha - 1)$. Таким образом, компонента Ω_θ увеличивается от нулевого значения только на отрезке A_1C. Вычислим в точке C напряжение Ω_{OAC}, накопленное при нагружении вдоль ломаной OAC. Интегрируя первое уравнение системы (13), получаем

$$\int\limits_0^{(\Omega_z)_{A_1}} \Omega_z^{-2\beta}\, d\Omega_z^2 = \frac{2^m}{\alpha(3\alpha)^m} \int\limits_0^{\sigma_0/2} \sigma_z^m\, d\sigma_z + \frac{1}{\alpha(3\alpha)^m} \int\limits_{\sigma_0/2}^{2\alpha\sigma_0/(4\alpha-1)} (2(1-\alpha)\sigma_z + \alpha\sigma_0)^m\, d\sigma_z. \qquad (15)$$

Из равенства (15) находим

$$(\Omega_z^2)_{A_1} = \Big[\frac{(1-\beta)\sigma_0^{m+1}}{2(m+1)\alpha(1-\alpha)(3\alpha)^m}\Big(\Big(\frac{3\alpha}{4\alpha-1}\Big)^{m+1} - \alpha\Big)\Big]^{1/(1-\beta)}.$$

В точке C при $\sigma_z = \sigma_0$ проекции $(\Omega_z)_C$, $(\Omega_\theta)_C$ напряжения Ω_{OAC} находятся из решения системы (13) с начальными условиями $\Omega_z = (\Omega_z)_{A_1}$, $\Omega_\theta = 0$, в результате получаем $\Omega^2_{OAC} = (\Omega_z^2)_C + (\Omega_\theta^2)_C$.

Рассмотрим путь нагружения OBC, также представляющий собой двухзвенную ломаную (см. рис. 1). Так как на отрезке OB $\hat{s}_z < 0$, то $\Omega_z = 0$. На отрезке BC выделим точку B_1, удовлетворяющую условию $(\hat{s}_z)_{B_1} = 0$. Тогда $(\sigma_z)_{B_1} = 0{,}5\alpha\sigma_0$, $(\sigma_\theta)_{B_1} = \sigma_0$. На отрезке BB_1 $\hat{s}_z < 0$, поэтому $(\Omega_z)_{B_1} = 0$. Таким образом, при нагружении вдоль ломаной OBC приращение $d\Omega_z \neq 0$ имеет место только на отрезке B_1C ($\hat{s}_z > 0$), компонента Ω_θ увеличивается от нулевого значения только на отрезке OB.

Вычислим в точке C значение Ω_{OBC}, накопленное при нагружении вдоль ломаной OBC. Интегрируя второе уравнение системы (13) и учитывая, что на отрезке OB $\sigma_\theta = 2\sigma_z$, находим

$$(\Omega_\theta^2)_B = \Big[\Big(\frac{1-\beta}{m+1}\Big)\Big(\frac{4\alpha-1}{6\alpha}\Big)^m\Big(\frac{\sigma_0}{2}\Big)^{m+1}\Big]^{1/(1-\beta)}. \tag{16}$$

Интегрируя первое уравнение системы (13) при движении вдоль отрезка B_1C, получаем

$$(\Omega_z^2)_C = \Big(\frac{(1-\beta)((2-\alpha)\sigma_0)^{m+1}}{2(m+1)\alpha(3\alpha)^m} + (\Omega_\theta^{2(1-\beta)})_B\Big)^{1/(1-\beta)} - (\Omega_\theta^2)_B. \tag{17}$$

С учетом (16), (17) имеем $(\Omega^2)_{OBC} = (\Omega_z^2)_C + (\Omega_\theta^2)_B$.

Исследуем процесс накопления поврежденности для шести этапов последовательного приращения осевой силы и внутреннего давления с одинаковыми значениями приращения $d\sigma_z = \sigma_0/6$ на каждом этапе пути $ODEGNMC$, представляющего собой многозвенную ломаную (рис. 2). Предварительно на плоскости $(\sigma_z, \sigma_\theta)$ определим области, в которых соответствующие девиаторы (14) неотрицательны. Неравенство $2\sigma_z - \alpha\sigma_\theta \geqslant 0$ соответствует области справа от прямой OB_1 (точка B_1 имеет координаты $(\sigma_z)_{B_1} = 0{,}5\alpha\sigma_0$,

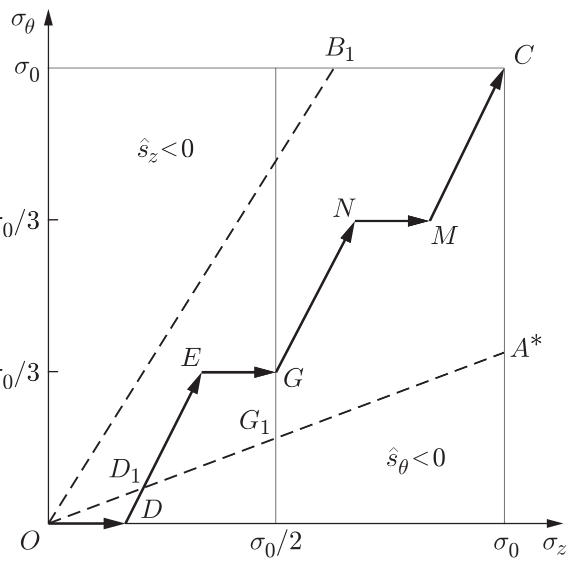

Рис. 2. Схема нагружения трубчатых образцов до достижения напряжения $\sigma_z = \sigma_\theta = \sigma_0$ по многозвенному пути (штриховые линии — границы областей $\hat{s}_z < 0$, $\hat{s}_\theta < 0$)

$(\sigma_\theta)_{B_1} = \sigma_0$), которая не ограничивает накопление поврежденности при рассматриваемом пути нагружения. Неравенство $2\alpha\sigma_\theta - \sigma_z \geqslant 0$ соответствует области, находящейся выше прямой OA^* (точка A^* имеет координаты $(\sigma_z)_{A^*} = \sigma_0$, $(\sigma_\theta)_{A^*} = 0{,}5\sigma_0/\alpha$), которая пересекает отрезок прямой DE в точке D_1. Найдем координаты точки D_1: на отрезке прямой DE $\sigma_\theta = 2\sigma_z - \sigma_0/3$, в точке D_1 $\hat{s}_\theta = [2\alpha(2\sigma_z - \sigma_0/3) - \sigma_z]/(3\alpha) = 0$, следовательно, $(\sigma_z)_{D_1} = 2\alpha\sigma_0/(3(4\alpha - 1))$, $(\sigma_\theta)_{D_1} = \sigma_0/(3(4\alpha - 1))$.

Докажем, что D_1 — единственная точка пересечения прямой OA^* и ломаной $ODEGNMC$. Для этого определим координаты точки G_1 пересечения прямых OA^* и $\sigma_z = \sigma_0/2$. Уравнение прямой OA^* имеет вид $\sigma_z = 2\alpha\sigma_\theta$. Ординаты точек G_1, G равны $(\sigma_\theta)_{G_1} = \sigma_0/4\alpha$, $(\sigma_\theta)_G = \sigma_0/3$. Единственность точки D_1 следует из неравенства $(\sigma_\theta)_G > (\sigma_\theta)_{G_1}$ при $\alpha > 3/4$. Поскольку коэффициент анизотропии $\alpha \geqslant 1$, единственность точки D_1 доказана. Вдоль ломаной ODD_1 значение $\Omega_\theta = 0$. Интегрируя первое уравнение системы (13), получаем

$$(\Omega_z^2)_{D_1} = \Big[\frac{(1-\beta)\sigma_0^{m+1}}{2(m+1)3^m\alpha^{m+1}}\Big(1 + \frac{1}{1-\alpha}\Big(\Big(\frac{\alpha}{3(4\alpha-1)}\Big)^{m+1} - \Big(\frac{1}{3}\Big)^{m+1}\Big)\Big)\Big]^{1/(1-\beta)}.$$

На отрезке D_1E приращения $d\Omega_z$, $d\Omega_\theta$ не равны нулю. В точке E при $\sigma_z = \sigma_0/3$ проекции $(\Omega_z)_E$, $(\Omega_\theta)_E$ определяются из решения (13) с начальными условиями $\Omega_z = (\Omega_z)_{D_1}$, $(\Omega_\theta)_{D_1} = 0$. На отрезке EG $d\Omega_z > 0$, $d\Omega_\theta = 0$, $(\Omega_\theta)_G = (\Omega_\theta)_E$. В результате интегрирования первого уравнения системы дифференциальных уравнений (13) имеем

$$(\Omega_z^2)_G = \Big(\frac{(1-\beta)\sigma_0^{m+1}}{2\alpha(m+1)(3\alpha)^m 3^{m+1}}\left((3-\alpha)^{m+1} - (2-\alpha)^{m+1}\right) + \\ + \left((\Omega_z^2)_E + (\Omega_\theta^2)_E\right)^{1-\beta}\Big)^{1/(1-\beta)} - (\Omega_\theta^2)_E.$$

В точке N при $\sigma_z = 2\sigma_0/3$ из решения (13) с начальными условиями $\Omega_z = (\Omega_z)_G$, $\Omega_\theta = (\Omega_\theta)_E$ находим значения величин $(\Omega_z)_N$, $(\Omega_\theta)_N$, учитывая, что на отрезке GN $\sigma_\theta = 2\sigma_z - 2\sigma_0/3$. На отрезке NM $d\Omega_z > 0$, $d\Omega_\theta = 0$, $(\Omega_\theta)_M = (\Omega_\theta)_N$. Интегрируя первое уравнение в (13), получаем

$$(\Omega_z^2)_M = \Big(\frac{(1-\beta)\sigma_0^{m+1}}{2\alpha(m+1)(3\alpha)^m 3^{m+1}}\left((5-2\alpha)^{m+1} - (4-2\alpha)^{m+1}\right) + \\ + \left((\Omega_z^2)_N + (\Omega_\theta^2)_N\right)^{1-\beta}\Big)^{1/(1-\beta)} - (\Omega_\theta^2)_N.$$

На отрезке MC выполняется равенство $\sigma_\theta = 2\sigma_z - \sigma_0$. Из решения (13) с начальным условием $\Omega_z = (\Omega_z)_M$ находим напряжения $(\Omega_z)_C$ и $(\Omega_\theta)_C$, накопленные вдоль ломаной $ODEGNMC$. По завершении нагружения по пути $ODEGNMC$ напряжение принимает значение $\Omega = \sqrt{(\Omega_z^2)_C + (\Omega_\theta^2)_C}$.

При $\alpha = 1{,}21$, $m = 3$, $\beta = 0{,}3$, $Q = 4686$ значения модуля вектора поврежденности ω, накопленные в результате нагружения от точки O до точки C по различным путям, равны

$$\omega_{OAC} = 10^{-1}, \qquad \omega_{ODEGNMC} = 8{,}9 \cdot 10^{-2}, \qquad \omega_{OBC} = 7{,}5 \cdot 10^{-3}. \tag{18}$$

Определим увеличение компонент ω_z, ω_θ вектора $\boldsymbol{\omega}$ в процессе ползучести материала при напряжениях $\sigma_z = \sigma_\theta = \sigma_0$ до момента разрушения ($t = t^*$). Для этого значения параметра ω (18) примем в качестве начальных значений $\omega_0 = \omega\big|_{t=0}$. Второе слагаемое в уравнении (9) представим в виде

$$d\omega_k = \begin{cases} G\omega_k^{-1}\omega^{2\gamma}(\hat{s}_k)^n\,dt, & \hat{s}_k > 0, \\ 0, & \hat{s}_k \leqslant 0, \end{cases} \qquad k = z, \theta, \tag{19}$$

где G, n, γ — константы. В условиях двухосного растяжения ($\sigma_z = \sigma_\theta = \sigma_0$) выражения для компонент девиатора приведенных напряжений принимают вид $\hat{s}_z = (2-\alpha)\sigma_0/(3\alpha)$, $\hat{s}_\theta = (2\alpha-1)\sigma_0/(3\alpha)$. Складывая правые и левые части уравнений (19), находим

$$\omega^{-2\gamma}\, d\omega^2 = 2G(\hat{s}_z^n + \hat{s}_\theta^n)\, dt, \qquad \omega\big|_{t=0} = \omega_0, \qquad \omega(t^*) = 1. \tag{20}$$

Проинтегрировав равенство (20), получаем зависимость времени до разрушения t^* от поврежденности ω_0:

$$t^* = \frac{(3\alpha)^n[1-\omega_0^{2(1-\gamma)}]}{2G(1-\gamma)\sigma_0^n[(2-\alpha)^n + (2\alpha-1)^n]}. \tag{21}$$

При $\sigma_0 = 60$ МПа, $\alpha = 1{,}21$, $G = 9{,}65 \cdot 10^{-4}$ (ч $\cdot$ МПа^n)$^{-1}$, $\gamma = 0{,}99$, $n = 2{,}04$ из уравнения (21) с учетом (18) получаем следующие значения времен до разрушения: $t^*_{OAC} = 2{,}9$ ч, $t^*_{ODEGNMC} = 3{,}1$ ч, $t^*_{OBC} = 6{,}1$ ч. Эти значения удовлетворительно согласуются со средними временами до разрушения, полученными в экспериментах [2]: $t^*_{OAC} = 2{,}5$ ч, $t^*_{ODEGNMC} = 3{,}6$ ч, $t^*_{OBC} = 6{,}1$ ч.

Заключение. Использование предложенных кинетических уравнений, содержащих векторный параметр поврежденности, позволяет получить хорошо согласующиеся экспериментальные и теоретические значения времен до разрушения при двухосном ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_0 > 0$, $\sigma_3 = 0$) растяжении. При этом в уравнениях накопления поврежденности впервые учитываются прочностная анизотропия материала и поврежденность, возникающая при кратковременном нагружении.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Локощенко А. М., Мякотин Е. А., Шестериков С. А.** Ползучесть и длительная прочность стали Х18Н10Т в условиях сложного напряженного состояния // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1979. № 4. С. 87–94.
2. **Локощенко А. М.** Исследование длительной прочности при сложном напряженном состоянии с помощью кинетического подхода // Вопросы долговременной прочности энергетического оборудования. Л., 1986. С. 107–109. (Тр. Центр. науч.-исслед. и проектно-конструкт. котлотурбинного ин-та (ЦКТИ) им. И. И. Ползунова; Вып. 230).
3. **Hayhurst D. R.** Creep rupture under multi-axial states of stress // J. Mech. Phys. Solids. 1972. V. 20, N 6. P. 381–390.
4. **Наместникова И. В., Шестериков С. А.** Векторное представление параметра поврежденности // Деформирование и разрушение твердых тел. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985. С. 43–52.
5. **Черняк Н. И., Радченко Р. П., Гаврилов Д. А. и др.** Влияние вида и степени пластической деформации на механические свойства высокопрочностных труб при низкотемпературной термомеханической обработке // Пробл. прочности. 1976. № 4. С. 51–54.
6. **Локощенко А. М.** Определение анизотропии при исследовании длительной прочности в условиях плоского напряженного состояния // Пробл. прочности. 1983. № 9. С. 71–73.

Поступила в редакцию 11/VI 2008 г.