

УДК 532.529+532.5:544.3

ОПИСАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ДВУХФАЗНЫХ СТОЛКНОВИТЕЛЬНЫХ СРЕДАХ С ПРИВЛЕЧЕНИЕМ МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКИХ ПОДХОДОВ

Т. А. Хмель, А. В. Фёдоров

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, 630090 Новосибирск
khmel@itam.nsc.ru

Представлена модель реагирующей двухфазной среды газ — несжимаемые частицы, в которой учитывается столкновительная динамика хаотического движения частиц. Для описания привлечены молекулярно-кинетические подходы теории гранулированной среды. Проведен анализ ударных волн, получены условия на сильных разрывах в двухфазной смеси. Установлено два типа разрывов: без генерации и с генерацией хаотической энергии на скачке. Для ударных волн второго типа амплитуда концентрации частиц не зависит от скорости распространения. Модель верифицирована по данным измерения скорости звука в засыпках при их разлете из камеры высокого давления ударной трубы.

Ключевые слова: газозвесь, гранулированная среда, ударная волна, математическое моделирование.

ВВЕДЕНИЕ

Производство и использование порошков металлов и частиц органического происхождения нередко сопряжено с опасностью их воспламенения и развития неконтролируемых взрывных процессов. Проблемы прогнозирования и предотвращения катастрофических взрывов требуют всестороннего анализа процессов диспергирования/перемешивания, воспламенения, горения и распространения ударно-волновых и детонационных структур в дисперсных средах, в том числе в смесях газа и твердых частиц, в широком диапазоне объемных концентраций и с учетом возможных столкновений частиц между собой.

Теоретические исследования динамических процессов в реагирующих дисперсных средах (гавозвесьях твердых частиц) проводятся, как правило, на основе уравнений механики взаимопроникающих континуумов [1–6]. При малых объемах, занятых частицами, принимается приближение разреженной среды, т. е. контактное взаимодействие частиц не учитывается [4, 5]. Соответствующая система уравнений является гиперболической и приводится

к консервативной форме.

Для конечных объемов частиц система уравнений не дивергентна и в предположении баротропности не является гиперболической [2, 7]. Как показано в [7, 8], в общем случае уравнения нестационарных пространственных течений и стационарных течений типа бегущих волн двухфазной среды с одним давлением являются системами составного типа. Анализ ударных адиабат и структур ударных волн и комбинированных разрывов в рамках моделей с одним давлением выполнен нами в работах [3, 9, 10], численное моделирование ударно-волновых процессов — в [11, 12].

Для описания плотных сред или порошковых материалов широко применяются модели с двумя давлениями, основанные на подходе [13], в который дополнительно введено эволюционное уравнение для объемной концентрации (закон релаксации давлений). Модель [13] применялась в [14–16]. Система уравнений [13] гиперболическая (см. [15]), хотя и не представлена в консервативной форме. В отдельных случаях уравнения приводятся к консервативным путем исключения членов, связанных с расширением трубки тока фазы [14], или задания уравнения состояния специального вида в односкоростной модели [16]. В [16] представлен сравнительный анализ нескольких моделей, основанных на подходе [13]. Подобные модели с двумя давлениями анализировались ранее в [17] (где,

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 11-08-00144-а, 13-08-00110) и Министерства образования и науки Российской Федерации (соглашение 14.В37.21.0645).

© Хмель Т. А., Фёдоров А. В., 2014.

в частности, показана гиперболичность системы уравнений), в [18–20] при исследовании стационарных ударно-волновых структур, а также в [21, 22] при численном моделировании процессов распространения и отражения ударных волн в гетерогенных смесях.

В моделях с двумя давлениями [23–25] частицы считаются несжимаемыми (отсутствует уравнение релаксации давлений), но учитываются межгранулярные напряжения в порошкообразных средах, обусловленные нарушением структуры частиц. В [23, 24] уравнения состояния для межгранулярного давления получены на основе эмпирических данных о скорости звука в засыпках и анализа процессов сжатия и разгрузки материала порошка по схеме нелинейно-упругого тела (подход Гоффа). В [25] рассмотрено реологическое уравнение состояния, связывающее изменение тензора напряжений и тензора деформации с некоторым временем релаксации.

Для широкого круга задач волновой динамики газовзвесей (о подъеме пыли с поверхности, разлете газовзвесей и др.) помимо учета объема дискретной фазы следует также принимать во внимание взаимодействие частиц между собой. Подобные модели механики гетерогенных сред, в которые в той или иной форме вводится давление хаотического движения или столкновения частиц, использовались в [2, 26]. В [26] выполнен анализ структуры течения на комбинированных разрывах, при этом рассмотрен вариант течения с линейным уравнением состояния для хаотического давления.

В последние годы для описания поведения гранулированных материалов получили распространение модели, основанные на молекулярно-кинетических представлениях о хаотическом движении и взаимодействии частиц (одними из первых такой подход предложили авторы [27, 28]). Детальное описание динамики гранулированной среды при неидеальных столкновениях представлено в работах [29, 30]. Авторами получены континуальные уравнения для процессов генерации и диссипации энергии хаотического движения частиц в широком диапазоне параметров шероховатости и реституции материала частиц.

В общем случае система уравнений для изолированной гранулированной среды не приводится к консервативной форме, что затрудняет теоретический анализ ударно-волновых структур. В частности, в [29] постулируются

некие условия на скачке, а в [30] они используются при исследовании структуры зон релаксации за ударными волнами для автомодельных решений. В [31] анализировались характеристические свойства уравнений для простейшего случая идеальных столкновений, когда система имеет консервативный вид. Отметим, что в [29–31] наличие газовой фазы не принималось во внимание, т. е. взаимодействие с несущим газом, как и тепловая динамика частиц, игнорировалось.

В монографии [32] представлена модель двухфазной среды с учетом столкновений частиц, которая использовалась, в частности, авторами [33] для решения задачи подъема пыли с поверхности. Модель [32], с одной стороны, включает диффузию и перенос энергии хаотического движения частиц в гранулированной среде по типу теплопроводности, с другой — в уравнении баланса энергии хаотического движения не учитывается перераспределение между энергиями поступательного и вращательного движения частиц, обусловленное шероховатостью и неупругостью, определенное в [29, 30]. Кроме того, модель не вполне согласована по тепловой динамике: как правило, для описания процессов в гранулированных материалах на виброподложках не принимаются во внимание уравнения энергии (за исключением уравнения баланса «гранулярной» температуры) (см., например, [34]).

В работе [35] рассмотрена двухфазная модель газ — частицы с упрощенным описанием хаотического движения и столкновений идеально гладких упругих частиц в области малых объемных концентраций. Система уравнений расщепляется, характеристики определяются отдельно для каждой фазы. Показано, что даже в этом простейшем приближении учет хаотического движения частиц дает качественно отличающиеся картины горения облака при взрыве ударно-диспергируемого горючего.

В настоящей работе анализируется математическая модель механики гетерогенной среды для описания процессов с ударными и детонационными волнами в газовзвесях несжимаемых частиц высокой загрузки с привлечением молекулярно-кинетических подходов для описания хаотического движения и столкновений частиц в соответствии с [29, 30]. Для некоторого класса сред получены условия на скачках. Это позволяет провести классификацию сильных разрывов. Модель верифицирована с ис-

пользованием экспериментальных данных [36] по скорости звука (скорости распространения волн разрежения) в засыпках при разрушении камеры высокого давления в широком диапазоне изменения дисперсности частиц и параметров в камере.

1. СТОЛКНОВИТЕЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ДВУХФАЗНОЙ СРЕДЫ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ДИНАМИКИ ГАЗОВЗВЕСЕЙ НЕСЖИМАЕМЫХ ЧАСТИЦ

Основные уравнения в рамках механики взаимопроникающих континуумов газа и твердых частиц вытекают из законов сохранения массы, импульса и энергии фаз.

Уравнения сохранения массы и импульса имеют стандартный вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_1 u_1)}{\partial x} &= J, \quad \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_2 u_2)}{\partial x} = -J, \\ \frac{\partial \rho_1 u_1}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_1 u_1^2 + m_1 p_1)}{\partial x} &= -p_1 \frac{\partial m_2}{\partial x} + J u_2 - f, \\ \frac{\partial \rho_2 u_2}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_2 u_2^2 + m_2 p_2)}{\partial x} &= p_1 \frac{\partial m_2}{\partial x} - J u_2 + f. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь ρ — средняя плотность, u — скорость, p — давление, m — объемная концентрация, $\rho_i = \rho_{ii} m_i$, ρ_{ii} — собственная (истинная) плотность фаз, индекс 1 относится к газовой фазе, 2 — к частицам, J — массообмен, f — сила межфазного взаимодействия. Частицы предполагаются несжимаемыми ($\rho_{22} = \text{const}$).

Принимается алгебраический способ замыкания для связи давления дискретной фазы (p_2), давления в газе (p_1) и давления, порождаемого столкновениями частиц при их хаотическом движении (p_c):

$$m_2 p_2 = m_2 p_1 + p_c. \quad (2)$$

Связь между давлением p_c и энергией хаотического движения частиц $e_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{(u'_i)^2}{N}$ (u'_i — пульсация скорости i -й частицы, N — число частиц в единице объема) задается в виде

$$p_c = G(m_2) \rho_2 e_c, \quad (3)$$

$$G(m_2) = \frac{1}{2} \alpha_t [1 + 2(1 + \varepsilon) m_2 g(m_2)].$$

Здесь α_t — константа, определяемая коэффициентами формы k , шероховатости β и рести-туции ε [29]:

$$\alpha_t = \frac{2}{3} \left(1 + \frac{a}{b + \sqrt{a^2 + b^2}} \right),$$

$$a = (1 - \beta^2) \frac{1 - k}{1 + k} - 1 + \varepsilon^2, \quad b = 2k \left(\frac{1 + \beta}{1 + k} \right)^2.$$

Для сферических частиц $k = 0.4$. Параметр β варьируется от -1 (идеально гладкие) до 1 (предельно шероховатые), $\beta = 0$ соответствует максимальной диссипации энергии столкновений. Коэффициент рести-туции (неупругости) ε меняется от 0 (абсолютно неупругие столкновения) до 1 (упругие столкновения). В простейшем случае идеально гладких упругих сфер $\alpha_t = 4/3$, т. е. при малых объемных концентрациях отдельно взятая дискретная среда подобна моноатомному газу с $\gamma = 5/3$.

Функция $g(m_2)$ принимается в соответствии с [30]:

$$g(m_2) = [1 - (m_2/m_*)^{4m_*/3}]^{-1}, \quad (4)$$

что позволяет согласовать аппроксимации при малых значениях m_2 и близких к предельному значениям плотной упаковки m_* .

Уравнение баланса энергии хаотического движения e_c примем в виде [29, 30]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_2 e_c}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_2 u_2 e_c)}{\partial x} &= I_1 - I_0 - p_c \frac{\partial u_2}{\partial x} - J e_c, \\ I_0 &= \frac{6}{\pi d} C_0 \rho_2 m_2 g(m_2) e_c^{3/2}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$I_1 = \frac{1}{2} \alpha_t e_c \rho_2 [C_1 + 2C_2(1 + \varepsilon) m_2 g(m_2)] \frac{\partial u_2}{\partial x}.$$

Генерация энергии хаотического движения частиц происходит за счет преобразования кинетической энергии частиц в градиентном потоке в энергию хаотического движения. Диссипация при столкновениях пропорциональна $(e_c)^{3/2}$ и обратно пропорциональна диаметру частиц d .

Определяющие константы C_0 , C_1 , C_2 зависят от коэффициентов рести-туции, формы и шероховатости. Выражения для них получены в [29, 30] путем точного интегрирования функций плотности вероятности столкновений:

$$C_0 = \alpha_t^{3/2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\varsigma + \varphi \left(k + \frac{\alpha_r}{\alpha_t} \right) \right], \quad \alpha_r = \frac{4}{3} - \alpha_t,$$

$$C_1 = \frac{\lambda \chi k}{\chi}, \quad C_2 = \frac{\lambda \chi c}{\chi} + N(F),$$

$$\lambda = - \left(\frac{1}{2} \pi \alpha_t \right)^{1/2} \left[3\varsigma + \varphi \left(3k - 2 + \frac{\alpha_r}{\alpha_t} \right) \right],$$

$$N(F) = \frac{3}{2} (1 - \varepsilon) + \varphi \left(\frac{k + \alpha_r / \alpha_t}{1 + \varepsilon} \right),$$

$$\chi k = -\frac{3}{4} \alpha_r \alpha_t, \quad \chi c = -\frac{3}{4} \alpha_t \alpha_r [1 - N(F)] +$$

$$+ 4 \frac{\psi \alpha_t}{(1 + \varepsilon) k} \left[\psi + \left(\frac{\psi}{k} - 1 \right) \frac{\alpha_r}{\alpha_t} \right], \quad (6)$$

$$\chi = \left(\frac{1}{2} \pi \alpha_t \right)^{1/2} \left\{ \frac{3}{4} \varsigma \alpha_t (3\alpha_t - \alpha_r) + \right.$$

$$+ \varphi \frac{3}{4} [(3k - 3)\alpha_t \alpha_r + \alpha_r^2 - k\alpha_t^2] +$$

$$\left. + 4 \frac{\psi}{k} \left[3\psi \alpha_t + \left(1 - \frac{\psi}{k} \right) (2\alpha_t - \alpha_r) \right] \right\},$$

$$\varphi = \frac{1 - \beta^2}{1 + k}, \quad \psi = \left(\frac{1 + \beta}{1 + k} \right) \frac{k}{2}, \quad \varsigma = 1 - \varepsilon^2.$$

В ряде работ (в том числе в [32–34]) тензор напряжений для дискретной фазы включает, кроме шаровой, также девиаторную часть, определяемую «сдвиговой вязкостью», и вводится так называемая «диффузия» хаотической энергии, связанная с характеристикой «проводимости» столкновительной среды. На данном этапе анализа для простоты исключаем из рассмотрения соответствующие члены в уравнениях.

Область применимости уравнений состояния в форме соотношений (3), (5), (6) для изолированной гранулированной среды определена в [29] из условия монотонной зависимости $\alpha_t(\beta)$. В плоскости параметров релаксации ε и шероховатости β это условие имеет вид

$$\beta \geq \frac{2k}{1-k} - \varepsilon^2 \frac{1+k}{1-k}. \quad (7)$$

На рис. 1 показаны зависимости определяющих коэффициентов C_0 (рис. 1,а) и $\eta = 1 - 0.5(C_1 + C_2)$ (рис. 1,б) от параметров ε

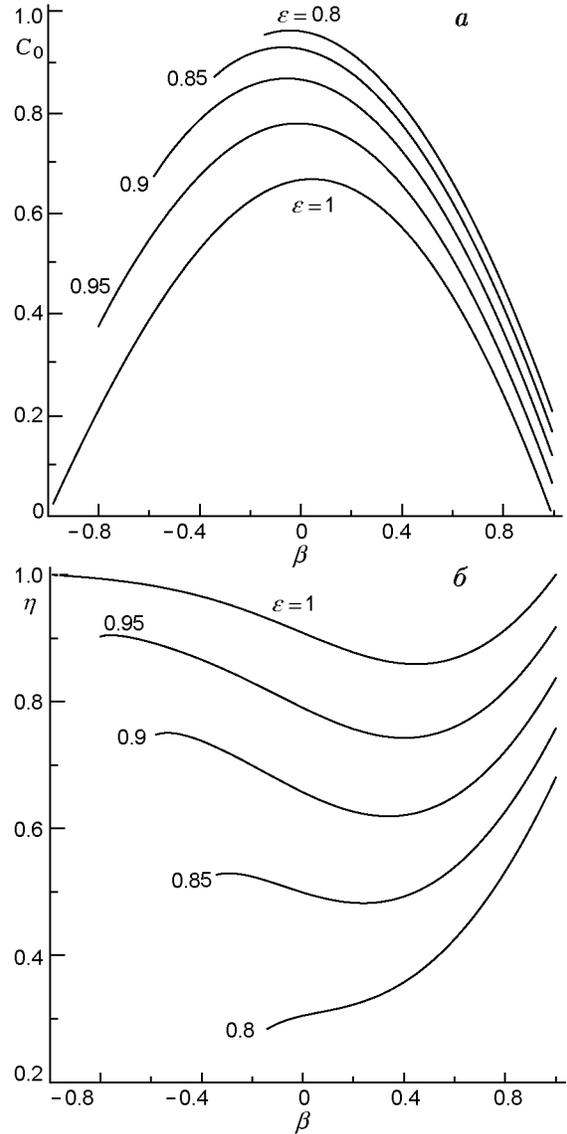


Рис. 1. Зависимости коэффициентов диссипации и генерации хаотической энергии от параметров релаксации и шероховатости

и β для сферических частиц ($k = 0.4$) в области, определяемой условием (7). Коэффициент C_0 в формулах (5), (6) выражает диссипацию, а C_1, C_2 — потери при генерации столкновительной энергии из энергии поступательного движения. Диссипация (C_0) минимальна для идеально гладких или предельно шероховатых сфер ($\beta = \pm 1$) и максимальна при средних (в окрестности нуля) значениях β [29]. Генерация (соответственно, коэффициент η) убывает с уменьшением коэффициента релаксации и характеризуется немонотонной зависимостью от коэффициента шероховатости для достаточно

упругих сфер ($\varepsilon \geq 0.85$). Для идеальных столкновений абсолютно упругих гладких частиц $C_1 = C_2 = 0$, $\eta = 1$.

Определим полную энергию каждой фазы: для газа — стандартным образом, для дискретной фазы — полагая, что наряду с тепловым эффектом реакции горения Q полная энергия включает также энергию хаотического движения частиц:

$$E_1 = c_{v1}T_1 + \frac{u_1^2}{2}, \quad E_2 = c_{v2}T_2 + \frac{u_2^2}{2} + e_c + Q \quad (8)$$

(c_v — удельная теплоемкость при постоянном объеме). Законы сохранения полной энергии имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1 E_1}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_1 u_1 E_1 + m_1 u_1 p_1)}{\partial x} = \\ = -p_1 \frac{\partial u_2 m_2}{\partial x} + J E_2 - f u_2 - q, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_2 E_2}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_2 u_2 E_2 + m_2 u_2 p_2)}{\partial x} = \\ = p_1 \frac{\partial u_2 m_2}{\partial x} - J E_2 + f u_2 + q. \end{aligned}$$

Уравнения (9) показывают, что изменение внутренней энергии частиц (температуры) определяется теплоподводом от газа к частицам q и нагревом частиц в процессе столкновений за счет трения друг о друга и за счет деформации при соударениях, т. е. определяется диссипацией и потерями при генерации энергии e_c в уравнении баланса (5):

$$\rho_2 \frac{d_2 c_{v2} T_2}{dt} = q + I_0 - I_1. \quad (10)$$

В уравнениях (9) правые части можно преобразовать к виду, принятому в работе [3]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1 E_1}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_1 u_1 E_1 + m_1 u_1 p_1)}{\partial x} = \\ = p_1 \left(\frac{\partial m_2}{\partial t} + \frac{J}{\rho_{22}} \right) + J E_2 - f u_2 - q, \\ \frac{\partial \rho_2 E_2}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_2 u_2 E_2 + m_2 u_2 p_2)}{\partial x} = \\ = -p_1 \left(\frac{\partial m_2}{\partial t} + \frac{J}{\rho_{22}} \right) - J E_2 + f u_2 + q. \end{aligned}$$

Замечание 1. Нетрудно убедиться, что система уравнений (1)–(6), (8), (9) инвариантна относительно преобразования Галилея, так как генерация столкновительной энергии определяется не абсолютными значениями скорости, а лишь ее градиентом.

Замечание 2. В правой части уравнений (9) член $p_1 \partial(m_2 u_2)/\partial x$ отличается от соответствующего члена в уравнениях модели Баера — Нунзиато, где он имеет вид $p_1 u_2 \partial m_2 / \partial x - (p_2 - \bar{\beta})F$, $\bar{\beta}$ — параметр (граница компактирования), $F(\bar{\beta}, m_2, p_1, p_2) = m_1 m_2 (p_1 - p_2 - \bar{\beta})/\tau_p$, τ_p — время процесса, а уравнение $\rho_{22} = \text{const}$ заменено релаксационным уравнением компактирования $\partial \rho_{22} / \partial t + \partial(\rho_{22} u_2) / \partial x = -\rho_{22} F / m_2$ [15]. Если принять равновесное приближение ($\tau_p = 0$, $p_1 = p_2 + \bar{\beta}$), а частицы считать несжимаемыми ($\rho_{22} = \text{const}$), то из уравнения компактирования следует $F = -m_2 \partial u_2 / \partial x$. Тогда с учетом (2) при $\bar{\beta} = p_c / m_2$ уравнения энергии совпадают. Таким образом, настоящая модель является равновесным по давлению приближением модели Баера — Нунзиато при условии $p_c / m_2 = G(m_2) \rho_{22} e_c = \text{const}$, которое, например, имеет место для разреженной среды (когда справедливо $G(m_2) = \alpha_t / 2$) при $e_c = \text{const}$.

Замечание 3. Модель [24] является частным случаем настоящей модели при отсутствии диссипации ($I_0 = 0$), но с учетом передачи части генерируемой энергии столкновений на нагрев частиц (с коэффициентом ξ_{2T}) и $I_1 = p_c \partial u_2 / \partial x$ ($C_1 = C_2 = 1$). При этом в модели [24] для уравнения состояния принимается формула Гауфа — Шварца, отражающая эмпирическую зависимость скорости звука от концентрации в уплотненном образце пористой среды.

Замечание 4. В модели [32] учитываются вязкое трение континуума частиц и «диффузия» «гранулярной» температуры, однако не учитываются потери при генерации столкновительной энергии, связанные с шероховатостью и неупругостью частиц, т. е. принимается $C_1 = C_2 = 0$.

Замечание 5. Модель [35] является частным случаем настоящей модели для малых объемных концентраций абсолютно гладких частиц и идеально упругих столкновений. Для этого следует исключить члены с p_1 в уравнениях для фазы частиц и положить $G(m_2) = \alpha_t / 2$, $\alpha_t = 4/3$, $C_1 = C_2 = 0$. Уравнения при этом могут быть записаны в консервативной форме.

2. УДАРНО-ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В ИЗОЛИРОВАННОЙ ГРАНУЛИРОВАННОЙ СРЕДЕ

Рассмотрим случай, когда несущая газовая среда не оказывает никакого влияния на движение и поведение частиц. Уже здесь определяющая система уравнений отдельно взятой дискретной фазы является неконсервативной из-за присутствия в правой части уравнения (5) недивергентных членов, что затрудняет ее характеристический анализ. В [29] приведены выражения для скорости звука в предельных случаях $\varepsilon = |\beta| = 1$, а также получены асимптотические приближения для $m \ll 1$ или $m_* - m \ll 1$ при $\varepsilon < 1$ или $|\beta| < 1$. Для общего случая конечной объемной концентрации m в [29] представлены приближенные условия на сильном разрыве: среднее значение не входящего под знак дифференциала множителя определено как полусумма значений перед и за скачком, хотя этот множитель связан с нелинейной функцией $g(m_2)$ (резко возрастающей вблизи предельных концентраций).

Заметим, что уравнение (5) приводится к дивергентному виду, если рассмотреть варианты $C_1 = C_2 = C$. Это имеет место, когда потери при генерации хаотической энергии за счет неидеальности столкновений I_1 пропорциональны давлению столкновений, что предполагает некоторое перераспределение потерь энергии поступательного и вращательного хаотического движения частиц (которые определены в [29] коэффициентами C_1, C_2). Тогда в терминах $\rho, \rho u, \rho E$, где $E = e + 0.5\eta u^2$ — модифицированная полная энергия частиц, $\eta = 1 - C$ (индексы s и 2 в данном параграфе для простоты опущены), система уравнений принимает дивергентный вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} &= R, \quad R = \{0, 0, -I_0\}^T, \\ U &= \{\rho, \rho u, \rho E\}^T, \\ F &= \{\rho u, p + \rho u^2, \rho u E + \eta \rho u\}^T, \\ p &= G(\rho)(\rho E - 0.5\eta \rho u^2), \end{aligned} \quad (11)$$

$$G(\rho) = \frac{1}{2} \alpha_t [1 + 2(1 + \varepsilon)mg(m)], \quad m = \frac{\rho}{\rho_{22}}.$$

Характеристики системы определяются из анализа собственных чисел матрицы Якоби:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -u^2 + \frac{\partial p}{\partial \rho} & 2u + \frac{\partial p}{\partial(\rho u)} & \frac{\partial p}{\partial(\rho E)} \\ -uE + \eta u \frac{\partial p}{\partial \rho} & E + \eta \frac{p}{\rho} + & u + \\ -\eta u \frac{p}{\rho} & +\eta u \frac{\partial p}{\partial(\rho u)} & +\eta u \frac{\partial p}{\partial(\rho E)} \end{vmatrix}.$$

Условие $\det(A - \lambda E) = 0$ позволяет определить три различных вещественных собственных числа: $\lambda_1 = u$, $\lambda_{2,3} = \pm c$, где скорость звука в гранулированной среде вещественна: $c^2 = \gamma(m)p/\rho > 0$, т. е. система является гиперболической.

Параметр адиабаты γ зависит от объемной концентрации и определяется формулой

$$\begin{aligned} \gamma &= \eta G(m) + \frac{d[G(m)m]}{G(m)dm} = \\ &= 1 + \eta G(m) + \frac{m}{G(m)} \frac{dG(m)}{dm}. \end{aligned} \quad (12)$$

В разреженной среде при $m \ll 1$

$$G(m) = \frac{1}{2} \alpha_t [1 + 2(1 + \varepsilon)m],$$

$$\gamma = 1 + \eta \frac{1}{2} \alpha_t + m(1 + \varepsilon)(\eta \alpha_t + 2).$$

В нулевом приближении с учетом того, что здесь $\eta = 1 - C_1$, выражение для скорости звука совпадает с приведенным в работе [29]:

$$c^2 = \left[1 + (1 - C_1) \frac{1}{2} \alpha_t \right] \frac{p}{\rho}.$$

В другом предельном случае — в состоянии, близком к состоянию в плотной упаковке ($m \rightarrow m^*$), функция $G(m)$ стремится к бесконечности и скорость звука в рамках модели, предполагающей несжимаемость твердого материала, неограниченно возрастает. В окрестности предельной упаковки $\Delta = m^* - m \ll 1$ справедливо асимптотическое приближение $G(m) = 0.75\alpha_t(1 + \varepsilon)m/\Delta$, $dG/dm = 0.75\alpha_t(1 + \varepsilon)m/\Delta^2$. В этом случае $\gamma \approx m[1 + 0.75\eta\alpha_t(1 + \varepsilon)]/\Delta$ и с учетом того, что $\eta = 1 - C_2$, выражение для скорости звука

$$c^2 = \frac{p}{\rho_{22}} \left[1 + (1 - C_2) \frac{3}{4} \alpha_t(1 + \varepsilon) \right] \frac{1}{\Delta}$$

также совпадает с приведенным в [29].

В общем случае зависимость параметра γ от объемной концентрации m представлена на рис. 2. В области малых значений m зависимости близки к линейным функциям (рис. 2,а). Отметим монотонную связь между γ и ε при $\beta = 0$ (сплошные линии) и немонотонные зависимости между γ и β (штриховая и штрихпунктирная линии при $\varepsilon = 0.9$) и между γ и η : взаимное расположение линий на рис. 2,а при $\beta = -0.6, 0, 0.3$ и 1 не соответствует взаимному положению значений η при $\varepsilon = 0.9$ на рис. 1,б.

На рис. 2,б нанесена функция $\gamma(m)$ при $\varepsilon = 1$, а при $\varepsilon = 0.8$ показаны зависимости $\gamma(m)$, $g(m)$, а также $G(m)$ при значениях пре-

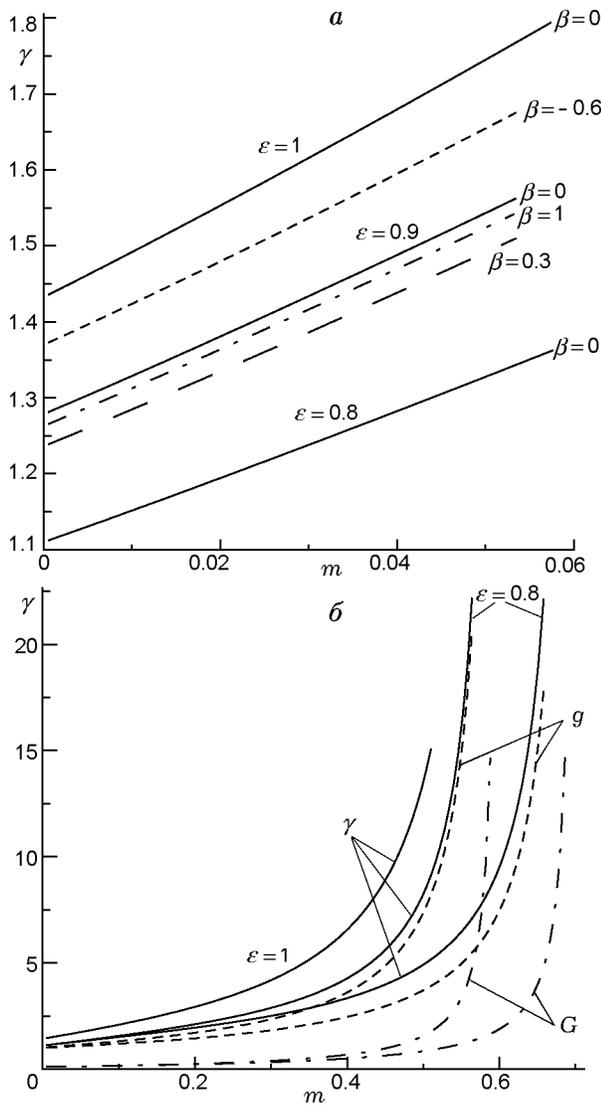


Рис. 2. Поведение параметра адиабаты при малых значениях m ($m_* = 0.6$) (а) и во всем диапазоне m ($m_* = 0.6$ и 0.7) (б)

дельной концентрации $m_* = 0.6$ и 0.7 . Обе группы кривых имеют асимптоты, соответствующие значениям m_* . Как видно, при одних и тех же m значения $g(m)$, $G(m)$ и $\gamma(m)$ тем больше, чем меньше предельная концентрация m_* .

Дивергентная форма уравнений (11) имеет ряд преимуществ, в частности, позволяет корректно определять условия на скачке, применять консервативные схемы расчета нестационарных уравнений и др. К недостаткам подхода можно отнести ограниченность рассматриваемого множества материалов (для которых параметры C_1 и C_2 должны быть близки) или ограниченность пределов объемной концентрации среды, при которых один из членов в формуле для $G(m)$ является доминирующим.

Для стационарной ударной волны, распространяющейся в изолированной столкновительной среде со скоростью u_0 , параметры на скачке определяются из соотношений, вытекающих из (11):

$$\begin{aligned} \rho u &= \rho_0 u_0, & p + \rho u^2 &= p_0 + \rho_0 u_0^2, \\ e + \eta \frac{u^2}{2} + \eta \frac{p}{\rho} &= e_0 + \eta \frac{u_0^2}{2} + \eta \frac{p_0}{\rho_0}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$p = \rho \frac{1}{2} \alpha_t [1 + 2(1 + \varepsilon) m g(m)] e, \quad \rho = \rho_{22} m.$$

Последовательно выражая из уравнений (13) u , p , e через ρ , можно получить одно уравнение для определения плотности (или объемной концентрации) за фронтом, анализ которого в общем случае затруднителен ввиду его существенной нелинейности. Поэтому рассмотрим наиболее практичный случай распространения ударных волн по невозмущенной смеси, т. е. когда перед фронтом $p_0 = 0$ и $e_0 = 0$. Здесь одно из возможных решений — $p = 0$, $e = 0$, которое при ненулевом скачке плотности отвечает контактному разрыву ($u = u_0$). Если $p \neq 0$, $e \neq 0$, то плотность (объемная концентрация) частиц за фронтом удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right) G(\rho) = \frac{2}{\eta}$$

или

$$\frac{1}{2} \alpha_t \left(\frac{m}{m_0} - 1 \right) [1 + (1 + \varepsilon) m g(m)] = \frac{2}{\eta}. \quad (14)$$

В левой части стоит произведение двух функций. Одна из них меняется от 0 при $m = m_0$ до

некоторого конечного значения при $m \rightarrow m_*$. Другая равна 1 при $m = 0$ и монотонно возрастает до ∞ при $m \rightarrow m_*$ (в приближении к состоянию плотной упаковки). Соответственно, их произведение монотонно возрастает от 0 до ∞ при изменении m от m_0 до m_* . Таким образом, для любого $\eta > 0$ существует m , удовлетворяющее уравнению (14), т. е. ударные волны в гранулированном газе с $C_1 = C_2 = C$ могут существовать при любых начальных значениях плотности, если $C < 1$ ($C_{1,2} < 1$). Заметим, что амплитуда столкновительного скачка (плотность частиц за фронтом) определяется в (14) только начальной плотностью m_0 и значениями α_t , η (свойствами материала) вне зависимости от скорости распространения скачка. Также из (13), (14), (12) и условия $\eta < 1$ нетрудно убедиться, что скорость u , определяемая соотношением $\rho u = \rho_0 u_0$, меньше скорости звука за скачком. Тем самым для данного разрыва справедлива теорема Цемплена.

Область существования ударно-волновых структур в гранулированном газе (определяемая условием $\eta > 0$) в плоскости параметров реституции и шероховатости показана на рис. 3. Область ограничена снизу сплошной линией, отделяющей область применимости модели соответственно условию (7), и штриховой

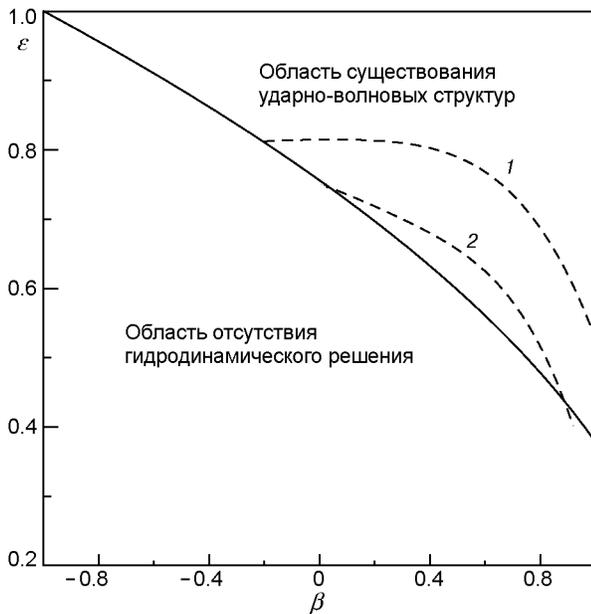


Рис. 3. Карта гидродинамических решений изолированной столкновительной среды в плоскости параметров реституции и шероховатости

линией 2 при $\eta = 1 - 0.5(C_1 + C_2)$ либо линией 1 при $\eta = 1 - C_2$ (соответствует случаю близких к предельным объемных концентраций).

3. УДАРНО-ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В СМЕСИ ГАЗА И СТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ ДИСКРЕТНОЙ ФАЗЫ

Для класса гранулированных сред, столкновения частиц в которых характеризуются свойством $C_1 = C_2 = 1 - \eta$, система уравнений двухфазной среды состоит из уравнений (1)–(4), (7)–(9), уравнения для модифицированной полной энергии частиц

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_2 E_c}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_2 u_2 E_c + \eta m_2 u_2 p_2)}{\partial x} = \\ = \eta p_1 \frac{\partial u_2 m_2}{\partial x} - I_0 - J E_c + \eta f u_2 \end{aligned} \quad (15)$$

и замыкающих соотношений

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{6}{\pi d} C_0 \rho_2 m_2 g(m_2) (e_c)^{3/2}, \\ I_1 &= (1 - \eta) p_c \frac{\partial u_2}{\partial x}, \quad E_c = e_c + \frac{\eta u_2^2}{2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Следует отметить, что система (1)–(4), (7)–(9), (15), (16) в общем случае не была приведена к дивергентному виду полностью. Однако для стационарного скачка условия на сильном разрыве могут быть определены.

После перехода в сопутствующую систему координат (u_0 — скорость фронта) и некоторых преобразований получаются следующие соотношения, описывающие структуру стационарных волн в столкновительной смеси: законы сохранения смеси в целом —

$$\begin{aligned} \rho_1 u_1 + \rho_2 u_2 &= (\rho_{10} + \rho_{20}) u_0, \\ \rho_1 u_1^2 + \rho_2 u_2^2 + p_1 + p_c &= \\ &= (\rho_{10} + \rho_{20}) u_0^2 + p_0 + p_{c0}, \\ \rho_1 u_1 E_1 + \rho_2 u_2 E_2 + m_1 u_1 p_1 + m_2 u_2 p_1 + u_2 p_c &= \\ &= u_0 (\rho_{10} E_{10} + \rho_{20} E_{20} + p_0 + p_{c0}); \end{aligned}$$

парциальные уравнения кинетики массообмена, обмена импульсами, обмена энергией и кинетики хаотической энергии —

$$\frac{d(m_2 u_2)}{dx} = -\frac{J}{\rho_{22}},$$

$$\rho_{22}m_2u_2\frac{du_2}{dx} + \frac{dp_c}{dx} + m_2\frac{dp_1}{dx} = f, \quad (17)$$

$$\rho_2u_2c_{v2}\frac{dT_2}{dx} = q + I_0,$$

$$\rho_2u_2\frac{de_c}{dx} + \eta p_c\frac{du_2}{dx} = -I_0.$$

Из (17) следуют соотношения на сильном разрыве:

$$[\rho_1u_1 + \rho_2u_2] = 0,$$

$$[\rho_1u_1^2 + \rho_2u_2^2 + p_1 + p_c] = 0,$$

$$[\rho_1u_1E_1 + \rho_2u_2E_2 + \quad (18)$$

$$+ m_1u_1p_1 + m_2u_2p_1 + u_2p_c] = 0,$$

$$[m_2u_2] = 0, \quad [T_2] = 0.$$

Интегрирование вдоль скачка второго дифференциального уравнения системы (17) при $m_2u_2 = m_0u_0$ и $[u_2] \neq 0$ приводит к соотношению

$$\left(\rho_{22} + \frac{[p_c]}{[u_2]m_0u_0}\right)m_2u_2\frac{du_2}{dx} + m_2\frac{dp_1}{dx} = f - \varphi,$$

где φ — интегрируемая функция:

$$\varphi = \frac{dp_c}{dx} - \frac{[p_c]}{[u_2]}\frac{du_2}{dx}.$$

Отсюда следует замыкающее условие на скачке

$$\frac{1}{2}\left(\rho_{22} + \frac{[p_c]}{[u_2]m_0u_0}\right)[u_2^2] + [p_1] = 0. \quad (19)$$

Проведя некоторые преобразования, учитывая $\rho_2 = m_2\rho_{22}$ и уравнения состояния, систему (18), (19) можно привести к виду:

$$[\rho_1u_1] = 0, \quad [m_2u_2] = 0,$$

$$\rho_{10}u_0[u_1] + \rho_{20}u_0[u_2] + [p_1] + [p_c] = 0,$$

$$\rho_{10}u_0\left[\frac{u_1^2}{2}\right] + \frac{\gamma_1}{\gamma_1 - 1}[m_1u_1p_1] + \quad (20)$$

$$+ \frac{\eta - 1}{\eta}\rho_{20}u_0[e_c] = 0,$$

$$\frac{p_c + p_{c0}}{2}[u_2] + \frac{1}{\eta}\rho_{20}u_0[e_c] = 0,$$

$$\rho_{20}u_0\left[\frac{u_2^2}{2}\right] + \frac{u_2 + u_0}{2}[p_c] + m_{20}u_0[p_1] = 0,$$

$$[T_2] = 0, \quad p_1 = \frac{\rho_1RT_1}{1 - m_2}, \quad p_c = \rho_{22}m_2e_cG(m_2).$$

Итого, мы имеем 9 уравнений для 9 неизвестных: $\rho_1, m_2, u_1, u_2, p_1, p_c, T_1, T_2, e_c$.

При распространении столкновительной ударной волны по невозмущенной смеси ($e_{c0} = 0, p_{c0} = 0$) уравнение для объемной концентрации на скачке совпадает с (14), значение u_2 определяется из $m_2u_2 = m_0u_0$. Для определения остальных параметров задача сводится к решению квадратного уравнения для u_1 :

$$A_1u_1^2 + A_2u_1 + A_3 = 0, \quad (21)$$

$$A_1 = 1 - \frac{2\gamma}{\gamma - 1}\frac{m_1}{\psi},$$

$$A_2 = \frac{2\gamma m_1 p_0}{(\gamma - 1)c_1} + \frac{2\gamma m_1 u_0}{(\gamma - 1)\psi} + \frac{(1 - \eta)(1 - \psi)[u_2]}{\psi},$$

$$A_3 = -u_0^2 - \frac{2\gamma p_0}{(\gamma - 1)\rho_{11,0}} - \frac{c_2(1 - \eta)}{c_1}[u_2]^2 + \quad (21)$$

$$+ \frac{(1 - \eta)(1 - \psi)u_0}{\psi}[u_2],$$

$$c_1 = \rho_{10}u_0, \quad c_2 = \rho_{20}u_0, \quad \psi = 1 - \frac{2m_0m_2}{m_0 + m_2},$$

и соотношений для $p_1, p_c, e_c, \rho_1, \rho_2, T_1, T_2$:

$$p_1 = p_0 - \frac{c_1(u_1 - u_0)}{\psi},$$

$$p_c = c_2(u_0 - u_2) - (1 - \psi)(p_1 - p_0),$$

$$e_c = \frac{p_c}{\rho_2 G}, \quad \rho_1 = \frac{c_1}{u_1}, \quad \rho_2 = \rho_{22}m_2,$$

$$T_2 = T_0, \quad T_1 = \frac{p_1(1 - m_2)}{\rho_1 R}.$$

Решения уравнения (21) вещественны, если дискриминант больше нуля, что имеет место не при любых значениях m_0, u_0 в области решений на рис. 3. На рис. 4 области существования столкновительных скачков находятся выше кривых, представляющих зависимости критического значения u_0 от начальной концентрации при различных ε, β . Плотность

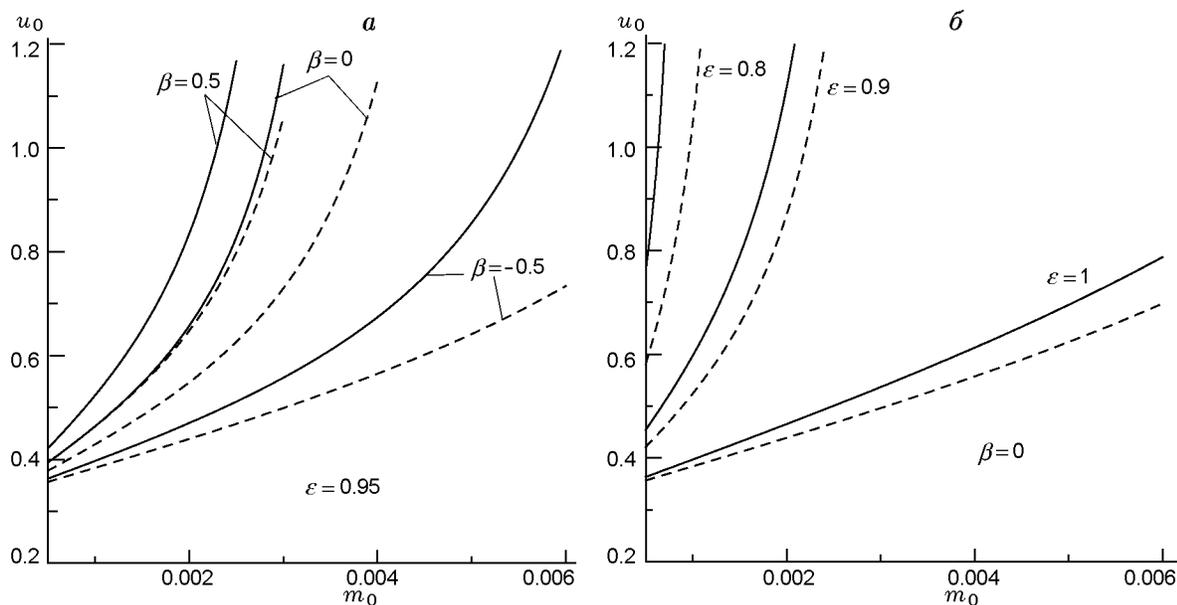


Рис. 4. Минимальные скорости столкновительных скачков в газозвесах алюминия (сплошные линии) и угольной пыли (штриховые линии)

частиц алюминия $\rho_{22} = 2700 \text{ кг/м}^3$, частиц угля — $\rho_{22} = 2000 \text{ кг/м}^3$, начальное давление 1 атм.

Область решения сужается с увеличением коэффициента шероховатости (рис. 4, а), уменьшением коэффициента релаксации (рис. 4, б), но расширяется с уменьшением собственной плотности материала частиц. Предельное значение минимальной скорости ударной волны при $m_0 \rightarrow 0$ совпадает с замороженной скоростью звука (скоростью звука в незапыленном газе).

Существует также решение (тривиальное) $e_c = 0$, $p_c = 0$. В этом случае условия на скачке отвечают модели бесстолкновительной двухфазной среды с учетом сил плавуемости, для которой $[T_2] = 0$, $[m_2 u_2] = 0$, а скорость дискретной фазы за скачком определяется известной формулой

$$\left[\frac{u_2^2}{2} \right] + \frac{1}{\rho_{22}} [p_1] = 0. \quad (22)$$

Здесь задача сводится к решению линейного алгебраического уравнения пятой степени относительно u_2 (с учетом тривиального решения $u_2 = u_0$ — четвертой степени), анализ которого для изотермического случая проведен в [9].

Таким образом, установлено, что в двухфазной столкновительной смеси газ — частицы

могут существовать два типа комбинированных разрывов: бесстолкновительный комбинированный скачок в смеси с учетом сил плавуемости (условие (22)) и скачок с генерацией столкновительной энергии в дискретной фазе (условие (14)). Какой из двух типов решения (столкновительный или бесстолкновительный) реализуется, зависит от физических параметров и условий задачи. Как отмечалось, столкновительные ударные волны существуют в ограниченной области параметров ε , β (см. рис. 3), а также m_0 , u_0 (см. рис. 4).

4. ВЕРИФИКАЦИЯ МОДЕЛИ ПО РАВНОВЕСНОЙ СКОРОСТИ ЗВУКА

В работе [36] представлены результаты измерения скорости распространения малых возмущений в насыпных средах. Эксперименты проводились в ударной трубе, разделенной диафрагмой. Одна часть (камера высокого давления) была заполнена частицами и газом, находящимся под давлением, другая — газом при атмосферных условиях. При разрушении диафрагмы происходило истечение смеси из камеры высокого давления, а по камере распространялась волна разрежения. Средние по показаниям двух датчиков значения скорости распространения переднего фронта волны разрежения (импульса давления) для четырех материалов (порошок и калиброванный песок с различным

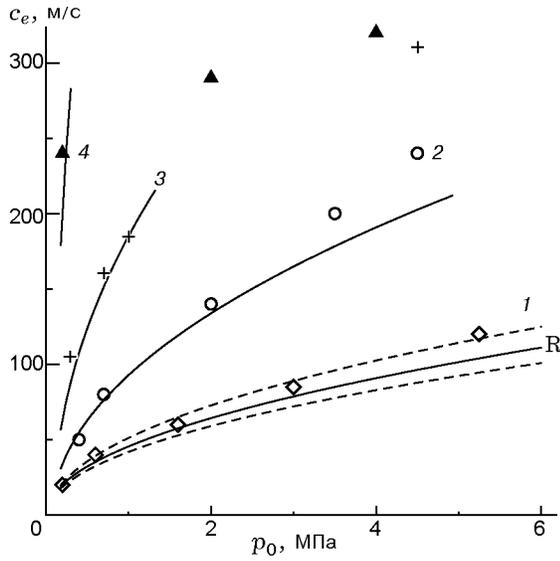


Рис. 5. Зависимости скорости звука от размера частиц и давления в засышке:

значки — эксперимент [36]: \diamond — порошок с диаметром частиц 20 мкм, \circ , $+$, \blacktriangle — песок с диаметром частиц соответственно 0.2, 0.5 и 3 мм; сплошные линии — расчет для порошка, штриховые — для песка, R — формула Рудингера

средним размером частиц) приведены на рис. 5.

Теоретическая оценка равновесной скорости звука в смеси газа и частиц в условиях экспериментов [36] получена на основе следующих соображений. Из анализа уравнения (5) и выражения для I_0 следует, что при фиксированных параметрах задачи справедлива зависимость $e_c \sim d^2$. Генерация столкновительной энергии I_1 пропорциональна $\partial u_2 / \partial x$, что коррелирует с разностью давлений в камерах высокого и низкого давления в начальный момент времени.

Полагая $e_c = \text{const}$, получаем оценочную параметрическую зависимость $e_c = e_0(d/d_0)^2(P_N/P_0 - 1)$, где P_N , P_0 — давление в камере высокого давления и вне ее, $e_0 = \text{const}$.

Равновесные по скоростям и температурам течения в столкновительной среде газ — частицы в предположении $e_c = \text{const}$ описываются следующей системой уравнений для $\rho = \rho_1 + \rho_2$, $u = u_1 = u_2$, $T = T_1 = T_2$ и $m = m_2$, $p = p_1 + p_c$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial(p + \rho u^2)}{\partial x} = 0, \quad (23)$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial[\rho u(E + p/\rho)]}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial(mu)}{\partial x} = 0,$$

$$E = e + \xi e_c + \frac{u^2}{2}, \quad \xi = \frac{\rho_2}{\rho}, \quad \rho_2 = m\rho_2,$$

$$\rho_2 = \text{const}, \quad e = c_v T = [(1 - \xi)c_{v1} + \xi c_{v2}]T,$$

$$p_1 = \rho_{11}RT = \frac{(1 - \xi)\rho RT}{1 - m}, \quad p_c = \rho_2 e_c G(m),$$

$$G(m) = \frac{1}{2} \alpha_t [1 + 2(1 + \varepsilon)mg(m)].$$

Из анализа характеристик системы (23) получается выражение для равновесной скорости звука

$$c^2 = c_R^2 + \xi e_c \left[G(m) \gamma_e - \frac{G(m)}{1 - m} + \frac{dmG(m)}{dm} \right]. \quad (24)$$

Здесь $G(m)$ определяется формулой (3), $c_R^2 = \frac{(1 - \xi)RT}{\gamma_e(1 - m)^2}$ — формула Рудингера, $\gamma_e = [c_v + R(1 - \xi)]/c_v$ — равновесный показатель адиабаты бесстолкновительной смеси.

На рис. 5 показаны зависимости равновесной скорости звука, рассчитанные по формуле (24) для порошка и засыпок песка, используемого в экспериментах [36], а также рассчитанные по формуле Рудингера. В расчетах принималось $T = 300$ К, $m_* = m_0 + \Delta$, для порошка $\Delta = 0.1$, для песка $\Delta = 0.01$ при $d < 1$ мм и $\Delta = 0.02$ при $d = 3$ мм, m_0 — по данным экспериментов. Величина e_0 выбиралась из наилучшего согласования с экспериментом, для всех песчаных засыпок принято одно и то же ее значение.

Видно, что зависимости скорости звука от начального давления в порах и от размера частиц хорошо согласуются на начальном участке давления. Расхождения для крупных частиц при большом давлении связаны с влиянием релаксационных процессов, которое в масштабах экспериментальной установки (ширина трубы 5 см, расстояние от мембраны до датчиков давления 21 см и 45 см) становится существенным. Здесь скорость передней характеристики распространения волны разрежения ниже равновесной скорости звука и в пределе (при увеличении d и давления в порах) стремится к замороженной скорости звука (скорости звука в газе $c_1 = \sqrt{\gamma_1 RT}$), что обсуждалось также в [36].

Таким образом, несмотря на оценочный характер выражения для e_c в условиях экспериментов [36], расчетные зависимости равновесной скорости звука в рамках столкновительной модели с $e_c = \text{const}$ качественно согласуются с имеющимися данными экспериментов.

ВЫВОДЫ

В работе представлена модель реагирующей двухфазной среды газ — несжимаемые частицы, в которой учитывается столкновительная динамика хаотического движения частиц, основанная на молекулярно-кинетических подходах теории гранулированной среды.

Выделен класс изолированных гранулированных сред, для которых уравнения могут быть приведены к дивергентному виду. Получены условия на сильных разрывах, найдены их типы и показана справедливость теоремы Цемплена. Определена область существования разрывов в плоскости параметров реституции и шероховатости.

Для двухфазной столкновительной смеси газ — частицы установлено два типа комбинированных разрывов: без генерации и с генерацией столкновительной энергии на скачке.

Показано, что в столкновительном скачке амплитуда объемной концентрации частиц однозначно определяется начальной концентрацией и параметрами соударения частиц, независимо от скорости его распространения.

Получены аналитические представления параметров газа и частиц на скачках. Определены области существования скачков с генерацией хаотического движения частиц в плоскости параметров «скорость ударной волны — начальная концентрация частиц».

Проведена верификация модели по данным экспериментов [36] при разрушении камеры высокого давления ударной трубы. Расчетные зависимости равновесной скорости звука от размера и концентрации частиц в столкновительной двухфазной смеси и давления в камере высокого давления согласуются с данными измерения скорости распространения волны разрежения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рахматуллин Х. О. Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред // ПММ. — 1956. — Т. 20, вып. 2.
2. Нигматулин Р. И. Динамика многофазных сред. — М.: Наука, 1987. — Ч. 1.
3. Николаевский В. Н. Гидродинамический анализ ударных адиабат гетерогенных смесей веществ // ПМТФ. — 1969. — № 3. — С. 82–88.
4. Яненко Н. Н., Солоухин Р. И., Папырин А. Н., Фомин В. М. Сверхзвуковые двухфазные течения в условиях скоростной неравновесности частиц. — Новосибирск: Наука, 1980.
5. Медведев А. Е., Федоров А. В., Фомин В. М. Описание воспламенения и горения смесей газа и твердых частиц методами механики сплошной среды // Физика горения и взрыва. — 1984. — Т. 20, № 2. — С. 3–9.
6. Федоров А. В., Фомин В. М., Хмель Т. А. Гетерогенная детонация газовзвесей. — Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2012.
7. Федоров А. В., Фомин В. М. Применение методов механики гетерогенных сред к теории фильтрации газов в угольных пластах // Динамика многофазных сред / под ред. Н. Н. Яненко. — Новосибирск, 1981. — С. 49–59.
8. Казаков Ю. В., Федоров А. В., Фомин В. М. Исследование структур изотермических ударных волн и расчет разлета облака газозвеси. — Новосибирск, 1986. — (Препринт/АН СССР, Сиб. отд-ние, ИТПМ; № 8-86).
9. Казаков Ю. В., Федоров А. В., Фомин В. М. Структура изотермических ударных волн в газозвесах // Проблемы теории фильтрации и механика повышения нефтеотдачи. — М.: Наука, 1987. — С. 108–115.
10. Федоров А. В., Фомин В. М. К теории комбинированного разрыва в газозвесах // Физическая газодинамика реагирующих сред. — Новосибирск: Наука, 1990. — С. 18–134.
11. Федоров А. В., Фомин В. М. Численное исследование течений композитных реагирующих газозвесей // ПМТФ. — 1999. — Т. 40, № 2. — С. 128–136.
12. Казаков Ю. В., Федоров А. В., Фомин В. М. Расчет разлета сжатого объема газозвеси // ПМТФ. — 1987. — № 5. — С. 139–143.
13. Baer M. R., Nunziato J. W. A two-phase mixture theory for the deflagration to detonation transition (DDT) in reactive granular materials // Intern. J. Multiphase Flow. — 1986. — V. 12. — P. 861–889.
14. Powers J. M., Stewart D. S., Krier H. Theory of two-phase detonation. Part I: Modelling // Combust. Flame. — 1990. — V. 80. — P. 264–279.
15. Bdzil J. B., Menikoff R., Son S. F., Kapila A. K., Stewart D. S. Two-phase modeling of DDT in granular materials: A critical examination of modeling issues // Phys. Fluids. — 1999. — N 11. — P. 378–402.
16. Xu S., Stewart D. S. Deflagration-to-detonation transition in porous energetic materials: A comparative model study // J. Eng. Math. — 1997. — V. 31. — P. 143–172.

17. **Федоров А. В.** Математическое описание течения смеси конденсированных материалов при высоких давлениях // Физическая газодинамика реагирующих сред. — Новосибирск: Наука, 1990. — С. 119–128.
18. **Федоров А. В.** Структура ударной волны в смеси двух твердых тел (гидродинамическое приближение) // Моделирование в механике. — 1991. — Т. 5 (22), № 4. — С. 135–158.
19. **Варламов Е. В., Федоров А. В.** Бегущая волна в неизотермической смеси твердых тел // Моделирование в механике. — 1991. — Т. 5 (22), № 3. — С. 14–26.
20. **Федоров А. В., Жилин А. А.** Структура ударной волны в двухскоростной смеси сжимаемых сред с двумя давлениями // ПМТФ. — 1998. — № 2. — С. 10–19.
21. **Федоров А. В., Федорова Н. Н.** Структура, распространение и отражение ударных волн в смеси твердых материалов (гидродинамическое приближение) // ПМТФ. — 1992. — № 4. — С. 10–18.
22. **Федоров А. В., Жилин А. А.** Распространение ударных волн в двухфазной смеси с различными давлениями компонентов // ПМТФ. — 1999. — № 1. — С. 55–63.
23. **Кутушев А. Г., Рудаков Д. А.** Численное исследование параметров воздушных УВ при разлете расширяющегося слоя порошкообразной среды // Физика горения и взрыва. — 1992. — Т. 28, № 6. — С. 105–112.
24. **Кутушев А. Г.** Математическое моделирование волновых процессов в аэродисперсных и порошкообразных средах. — СПб.: Недра, 2003.
25. **Gubaidullin A. A., Britain A., Dudko D. N.** Air shock wave interaction with an obstacle covered by porous material // Shock Waves. — 2003. — V. 13. — P. 41–48.
26. **Федоров А. В.** Структура комбинированного разрыва в газовзвесьях при наличии хаотического давления частиц // ПМТФ. — 1992. — № 5. — С. 36–41.
27. **Гольдштик М. А.** Элементарная теория кипящего слоя // ПМТФ. — 1972. — № 6. — С. 106–112.
28. **Гольдштик М. А., Козлов Б. Н.** Элементарная теория концентрированных дисперсных систем // ПМТФ. — 1973. — № 4. — С. 67–77.
29. **Goldshtein A., Shapiro M.** Mechanics of collisional motion of granular materials. Part I. General hydrodynamics equations // J. Fluid Mech. — 1995. — V. 282. — P. 75–114.
30. **Goldshtein A., Shapiro M., Gutfinger C.** Mechanics of collisional motion of granular materials. Part 3: Self-similar shock wave propagation // J. Fluid Mech. — 1996. — V. 316. — P. 29–51.
31. **Serna S., Marquina A.** Capturing blast waves in granular flow // Comp. Fluids. — 2007. — V. 36, N 8. — P. 1364–1372.
32. **Gidaspow D.** Multiphase flow and fluidization: Continuum and kinetic theory descriptions. — Boston: Academic Press, 1994.
33. **Fan B. C., Chen Z. H., Jiang X. H., Li H. Z.** Interaction of a shock wave with a loose dusty bulk layer // Shock Waves. — 2007. — V. 16. — P. 179–187.
34. **Schneiderbauer S., Aigner A., Pirker S.** A comprehensive frictional-kinetic model for gas — particle flows: Analysis of fluidized and moving bed regimes // Chem. Eng. Sci. — 2012. — V. 80. — P. 279–292.
35. **Кул А. Л., Балакришнан К.** Газодинамическая модель течения слабозапыленной двухфазной среды с горением // Физика горения и взрыва. — 2012. — Т. 48, № 5. — С. 59–76.
36. **Гельфанд Б. Е., Медведев С. П., Поленов А. Н., Тимофеев Е. И., Фролов С. М., Цыганов С. А.** Измерение скорости малых возмущений в пористых средах насыпной плотности // ПМТФ. — 1986. — № 1. — С. 141–144.

Поступила в редакцию 21/1 2013 г.