ПМТФ, № 3, 1972

УДК 533.95

РАСПРОСТРАНЕНИЕ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ УДАРНЫХ ВОЛН В СРЕДЕ УБЫВАЮЩЕЙ ПЛОТНОСТИ

Ю. К. Калмыков, А. А. Румянцев

(Ленинград)

Выяснено условие развития неустойчивости фронта ударной волны при распространении ударной волны в среде убывающей плотности при наличии магнитного поля. Показано, что в лабораторных условиях развитие неустойчивости фронта, связанной с нарушением этого условия, может быть подавлено диффузией отрезков фронта к границам системы. Рассмотренная неустойчивость может проявляться, например, в некоторых астрофизических объектах.

1. Фронт сильной ударной волны, распространяющейся в отсутствие магнитного поля в среде с убывающей плотностью, оказывается неустойчивым [1]. Случайные искривления фронта, при которых отдельные элементы опережают фронт или отстают от него, нарастают со временем. Действительно, в среде убывающей плотности фронт сильной ударной волны перемещается с возрастающей скоростью. Поэтому случайно выдвинувшийся вперед элемент фронта будет перемещаться с возросшей скоростью и его опережение будет нарастать, тогда как у случайно отставшего элемента скорость перемещения меньше, чем у остального фронта, и его отставание будет усиливаться.

Эти качественные соображения могут быть отнесены и к рассматриваемому в статье случаю распространения сильной ударной волны (число Маха $M \gg 1$) в среде с убывающей плотностью при наличии поперечного магнитного поля. Как показано в работе [2], ускорение невозмущенного фронта сильной ударной волны имеет место, если в направлении распространения (за которое выберем положительное направление оси x) нарастает альфвеновская скорость $H_0(x) / \sqrt{4\pi\rho_0(x)}$, где $H_0(x)$ и $\rho_0(x)$ — соответственно невозмущенные напряженность магнитного поля и плотность среды. Последующий расчет подтверждает указанные выше качественные соображения и для случая магнитной ударной волны.

2. Будем рассматривать малые возмущения фронта с длиной волны, много меньшей длины неоднородности l, так что удовлетворяется неравенство $kl \gg 1$, где k — волновое число возмущения, и применимо квазиклассическое приближение. Кроме того, будем считать среду идеально проводящей, так что в силу условия вмороженности вектор напряженности магнитного поля в каждой точке фронта будет направлен по касательной к фронту.

Предположим, что «искривление» фронта зависит от y. Обозначим координату невозмущенного фронта через X, а координату возмущенного фронта — через $\Xi = X + \xi$ и будем считать $\partial\xi / \partial y$ величиной малой и пренебрегать ее квадратом. Переместим начало координатной системы в точку Ξ и повернем так, чтобы новая ось y' касалась искривленного фронта.

Угол поворота равен $\partial\xi \,/\, \partial y$ и, следовательно, мал; тогда с принятой точностью

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y'}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'} - \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x'} \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} - \dot{\Xi}\frac{\partial}{\partial x'} - \dot{\Xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y'} - y'\frac{\partial^2\xi}{\partial y\partial t}\frac{\partial}{\partial x'} + x'\frac{\partial^2\xi}{\partial y\partial t}\frac{\partial}{\partial y'}$$

3. В лабораторной системе координат уравнения магнитной гидродинамики на фронте ударной волны имеют вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial\rho v_y}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial\rho v_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(p + \rho v_x^2 + \frac{H^2}{8\pi} - \frac{H_x^2}{4\pi}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho v_x v_y - \frac{1}{4\pi}H_x H_y\right) = 0 \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial\rho v_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho v_x v_y - \frac{1}{4\pi}H_x H_y\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(p + \rho v_y^2 + \frac{H^2}{8\pi} - \frac{H_y^2}{4\pi}\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho\varepsilon + \frac{H^2}{8\pi}\right) + \operatorname{div}\left\{\rho \mathbf{v}\left(\frac{v^2}{2} + w\right) + \frac{1}{4\pi}\left[\mathbf{H}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{H})\right]\right\} = 0$$

где p, ρ, ε, w — давление, плотность, энергия и энтальпия единицы массы.

Перейдем к штрихованным координатам и проинтегрируем уравнения по x' в пределах скачка, а по y' — по бесконечно малой области вблизи точки касания этой оси с фронтом. Учтем также, что с принятой точностью

$$v_y = v_x\partial\xi/\partial y, \qquad H_x = H_y\partial\xi/\partial y$$

Тогда для скачков газодинамических величин получим следующие выражения:

$$\{\rho(v - \dot{\Xi})\} = 0, \quad \left\{p + \rho v^2 + \frac{H^2}{8\pi} - pv\dot{\Xi}\right\} = 0 \tag{3.2}$$

$$\left\{\rho v\left(\frac{v^2}{2} + w + \frac{H^2}{4\pi\rho}\right) - \rho\dot{\Xi}\left(\frac{v^2}{2} + \varepsilon + \frac{H^2}{8\pi\rho}\right)\right\} = 0$$

После алгебраических преобразований с использованием закона сохранения вещества получим

$$\rho\,(v - \dot{\Xi}) = -\rho_0\dot{\Xi}, \quad p^* = p_0^* + \rho_0 v\dot{\Xi} \tag{3.3}$$

$$({}^1/{}_2 v^2 + \varepsilon^* - \varepsilon_0^*)\,\rho_0\dot{\Xi} - p^*\,v = 0$$

$$p^* = p + H^2\,/\,8\pi, \quad \varepsilon^* = \varepsilon + H^2\,/\,8\pi\rho$$

где нулями отмечены начальные значения этих величин. К условиям (3.3) следует присоединить условие вмороженности (3.4)

$$H\,/\,\rho = H_0\,/\,\rho_0 \tag{3.4}$$

При наличии возмущения функции ρ, v, p^*, H для газа за фронтом будут отличаться от невозмущенных значений на величины $\delta\rho$, δv, δp^*, δH. Если ввести также величину $\delta u = \dot{\xi} - \xi\partial u\,/\,\partial x$, то в случае идеального газа для этих величин получим уравнения

$$\left(\frac{u}{v} - 1\right)\frac{\delta\rho}{\rho} - \frac{\delta v}{v} + \frac{\delta u}{u} = 0$$

$$\left(1 - \frac{\rho c^*}{\rho_0 u}\right)\frac{\delta v}{v} + \frac{\delta u}{u} = 0 \tag{3.5}$$

$$\left[\frac{H_0^2}{8\pi\rho_0^2}\,\rho - \frac{p}{(\gamma - 1)\,\rho}\right]\frac{\delta\rho}{\rho} + \left[\frac{c^2 v}{(\gamma - 1)\,c^*} - v^2 - \frac{p_0^* v}{\rho_0 u}\right]\frac{\delta v}{v} + \frac{p_0^* v}{\rho_0 u}\,\frac{\delta u}{u} = 0$$

Здесь использованы соотношения

$$\varepsilon = p / (\gamma - 1)\rho, \quad \delta p^* = \rho c^* \delta v$$
$$\delta p = (\rho c^2 / c^*)\,\delta v \quad (c^* = \sqrt{\gamma p / \rho + H^2 / 4\pi\rho})$$

где c_* — скорость звука, которые имеют место в пренебрежении величинами порядка $(kl)^{-1}$ [3].

Система уравнений (3.5) однородна, ее определитель равен

$$\Delta = \frac{\lambda - \nu}{\lambda(\gamma - 1)} \left[(1-\nu)(\gamma\nu - \lambda) - \gamma(\lambda - \nu)\left[\pi_0 - \left(\frac{1}{\nu^2} - 1\right)h_0^2\right]\right] \tag{3.6}$$

$$\nu = \frac{\rho_0}{\rho}, \quad h_0^2 = \frac{H_0^2}{8\pi\rho_0 u^2}, \quad \pi_0 = \frac{p_0}{\rho_0 u^2}, \quad \lambda = \frac{c^*}{u} \tag{3.7}$$

Используя результаты [3], получим также

$$\nu = \frac{1}{2(\gamma+1)}[(\gamma - 1) + 2\gamma(\pi_0 + h_0^2) +$$
$$+ \sqrt{[(\gamma-1) + 2\gamma(\pi_0 + h_0^2)]^2 + 8(\gamma+1)(2-\gamma)h_0^2}] \tag{3.8}$$
$$\lambda = \sqrt{\gamma\nu\left[\pi_0 - \left(\frac{1}{\nu^2} - 1\right)h_0^2 + (1-\nu)\right] + \frac{2h_0^2}{\nu}}$$

4. Перейдем к рассмотрению частных случаев.

1. Случай отсутствия магнитного поля, $h_0 = 0$. Если считать также $\pi_0 = 0$ (сильная ударная волна), то $\Delta \neq 0$ за исключением случая $\gamma = 2$. При этом величины $\delta\rho = \delta v = \delta u = 0$ и

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} = \xi \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=X} \tag{4.1}$$

Если невозмущенный фронт волны ускоряется в сторону убывания плотности, то смещение $|\xi| \sim u$ растет, т. е. смещенный участок отделяется от невозмущенного фронта. Это имеет место при обоих знаках возмущения ξ.

2. $\pi_0 = 0$, $0 < h_0^2 < {}^1/_2$ $(h_0^2 = {}^1/_2 M^2)$. Анализ показывает, что в этом случае определитель $\Delta \neq 0$ везде, за исключением кривой $h_0^2(\gamma)$. Для типичных γ соответствующие значения h_0^2 равны

γ	$^6/_5$	$^5/_4$	$^4/_3$	$^7/_5$	$^5/_3$	2
h_0^2	0.0278	0.0271	0.0254	0.0240	0.0152	0

При $\Delta \neq 0$ имеет место уравнение (4.1). В том случае, когда величина альфвеновской скорости $H_0(x) / \sqrt{4\pi\rho_0(x)}$ в невозмущенном газе растет в сторону распространения фронта, скорость его нарастает и, следовательно, будут нарастать смещения ξ и фронт окажется неустойчивым.

В тех случаях, когда $\Delta = 0$, величины $\delta\rho / \rho$, $\delta v / v$, $\delta u / u$ могут оказаться сравнимыми с единицей. Это значит, что фронт ударной волны абсолютно неустойчив, и любые малые возмущения фронта становятся большими.

5. Если принять $H_0 = \mathrm{const}$, то характерной длиной нарастания возмущения фронта оказывается величина αl, где $l = |\nabla \ln \rho_0|^{-1}$ — так называемая высота однородной атмосферы, а α — безразмерный коэффи

циент (порядка нескольких единиц), который может быть найден из численных расчетов. Характерное время развития неустойчивости, как это следует из уравнения (4.1), имеет порядок величины $\alpha l / u$. За это время фронт разобьется на отдельные малые участки с размерами порядка высоты однородной атмосферы.

В случае звездных катастроф, например вспышек новых и сверхновых звезд, это время сравнимо с временем выхода на поверхность звезды сильной ударной волны, сопровождающей взрыв. Поэтому в момент выхода фронт волны окажется сильно искаженным и не будет иметь сферическую форму. Это существенно повлияет на кривую блеска [4], а также может объяснить характер магнитных силовых линий в сброшенных оболочках. Действительно, первоначально регулярное магнитное поле звезды будет запутано выходящей на ее периферию сильной ударной волной. При этом оно усилится волной и исказится ею. Если магнитное поле достаточно велико, то развитие мелкомасштабных пульсаций может оказаться подавленным магнитным полем, имеющимся в крупномасштабных пульсациях. Поэтому структура поля будет иметь квазирегулярный характер: направление магнитного поля в разных крупномасштабных элементах некоррелировано, внутри же одного такого элемента оно имеет преимущественное направление. Именно таковы наблюдаемые особенности магнитного поля в оболочках вспыхивающих звезд [5].

6. Распространение сильной ударной волны в среде убывающей плотности сопровождается процессами кумуляции энергии, т. е. передачей энергии от большой массы вещества к малой. Кумуляция особенно эффективна в случае магнитогидродинамической волны (см., например, [6]). В соответствующих лабораторных установках рассмотренная неустойчивость может проявиться, если время нарастания ее меньше времени диффузии отрезков фронта к границам системы, которое, например, в случае распространения ударной волны вдоль цилиндрической трубы радиуса r имеет порядок, равный или больший r / u. Поэтому указанное выше условие выполнено, если $r > \alpha l$.

Ленинградский политехнический
институт им. М. И. Калинина

Поступила 22 XI 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Гуревич Л. Э., Румянцев А. А. Распространение ударных волн в среде убывающей плотности. ЖЭТФ, 1970, т. 58, вып. 4.
2. Войтенко А. Е., Соболев О. П. Некоторые случаи ускорения магнитогидродинамической ударной волны. ПМТФ, 1968, № 2.
3. Бай Ши-и. Магнитная газодинамика и динамика плазмы. М., «Мир», 1964.
4. Гуревич Л. Э., Румянцев А. А. К теории кривой блеска при вспышке сверхновых. Астрон. ж., 1970, т. 47, вып. 4.
5. Шкловский И. С. Сверхновые звезды. М., «Наука», 1966.
6. Войтенко А. Е., Любимова М. А., Соболев О. П., Сынах В. С. Градиентное ускорение ударной волны. Препринт Ин-та ядерной физики, Новосибирск, 1970.