ПМТФ, № 4, 1973

УДК 539.374

ДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛ

А. Н. Спорыхин, В. Г. Трофимов

(Воронеж)

На основании трехмерных линеаризированных уравнений устойчивости исследуется процесс деформирования упруговязкопластических тел при сжатии их вдоль оси x_3 усилиями интенсивности p и вдоль осей x_1 и x_2 усилиями интенсивности q. Докритические деформации являются малыми и однородными.

В качестве примера исследуется устойчивость плит. Приводится графическая зависимость критических нагрузок от свойств и геометрии плит.

1. В работах [1,2] приводятся общие решения статических и динамических уравнений устойчивости [3,4] для упрочняющихся упруговязкопластических тел при сжатии их вдоль оси x_3.

Приведенные решения по аналогии с результатами, полученными для упругих, вязкоупругих и пластических тел [5,6] при малых однородных докритических деформациях, позволяют исследовать обширный класс задач устойчивости упруговязкопластических тел.

Напряженно-деформированное состояние трехмерного тела до потери устойчивости определяется соотношениями

$$
\begin{gathered}
\sigma_{11}{}^0 = \sigma_{22}{}^0 = -q, \quad \sigma_{33}{}^0 = -p, \quad \sigma_{ij}{}^0 = 0 \quad (i \neq j) \\
2e_{11}{}^{p_0} = 2e_{22}{}^{p_0} = -e_{33}{}^{p_0} = 2\left(p - q - k\sqrt{1.5}\right) / 3c, \quad e_{ij}{}^{p_0} = 0 \quad (i \neq j)
\end{gathered} \tag{1.1}
$$

Линеаризированные уравнения устойчивости [3,4] представим в форме

$$
L_{ij}\, u_j = 0 \qquad (i, j = 1, 2, 3) \tag{1.2}
$$

где дифференциальные операторы имеют вид

$$
\begin{aligned}
L_{ij} = {} & (\lambda + \mu + a_j b_i) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \delta_{ij} \left[(\mu - q) \frac{\partial^2}{\partial x_1{}^2} + (\mu - q) \frac{\partial^2}{\partial x_2{}^2} + \right. \\
& \left. + (\mu - p) \frac{\partial^2}{\partial x_3{}^2} - \rho s^2 \right] (b_i = s_{ii}{}^0 - c e_{ii}{}^{p_0}, \quad a_j = 4\mu^2 (b_1 + b_2 + b_3 - \\
& - 3b_j) \left[3k^2 (2\mu + c + s\eta) \right]^{-1})
\end{aligned}
$$

Для цилиндрического тела с криволинейным контуром поперечного сечения общее решение уравнений устойчивости имеет вид

$$
\begin{aligned}
& u_n = \frac{\partial}{\partial \tau} \Psi_1 - \frac{\partial^2}{\partial n\, \partial x_3} \Psi, \quad u_\tau = -\frac{\partial}{\partial n} \Psi_1 - \frac{\partial^2}{\partial \tau\, \partial x_3} \Psi \\
& u_3 = \frac{\lambda + 2\mu + a_1 b_1 - q}{\lambda + \mu + a_3 b_1} \left(\Delta + \frac{\mu - p}{\lambda + 2\mu + a_1 b_1 - q} \frac{\partial^2}{\partial x_3{}^2} - \right. \\
& \left. - \frac{\rho s^2}{\lambda + 2\mu + a_1 b_1 - q} \right) \Psi
\end{aligned} \tag{1.3}
$$

Здесь через n и τ обозначены соответственно нормаль и касательная к контуру поперечного сечения.

Функции Ψ и Ψ_1 определяются из уравнений

$$\left(\Delta + \frac{\mu - p}{\mu - q}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\rho s^2}{\mu - q}\right)\Psi_1 = 0 \qquad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)$$

$$\left[\left(\Delta + \frac{\mu - p}{\lambda + 2\mu + a_1 b_1 - q}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\rho s^2}{\lambda + 2\mu + a_1 b_1 - q}\right)\left(\Delta + \right.\right.$$
$$(1.4)\qquad \left. + \frac{\lambda + 2\mu + a_3 b_3 - p}{\mu - q}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\rho s^2}{\mu - q}\right) -$$
$$\left. - \frac{(\lambda + \mu + a_3 b_1)(\lambda + \mu + a_1 b_3)}{(\lambda + 2\mu + a_1 b_1 - q)(\mu - q)}\Delta\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right]\Psi = 0$$

В статической постановке ($s = 0$) функции Ψ_i являются решениями уравнений

$$(1.5)\qquad \left(\Delta + \xi_i^2\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\Psi_i = 0 \quad (\Psi = \Psi_2 + \Psi_3)$$

где постоянные ξ_i^2 имеют вид

$$\xi_1^2 = \frac{\mu - p}{\mu - q}, \quad \xi_{2,3}^2 = A \pm \left[A^2 - \frac{(\lambda + 2\mu + a_3 b_3 - p)(\mu - p)}{(\lambda + 2\mu + a_1 b_1 - q)(\mu - q)}\right]^{1/2}$$
$$A = \frac{1}{2}\left[\frac{\lambda + 2\mu + a_3 b_3 - p}{\mu - q} + \frac{\mu - p}{\lambda + 2\mu + a_1 b_1 - q} - \right.$$
$$\left. - \frac{(\lambda + \mu + a_3 b_1)(\lambda + \mu + a_1 b_3)}{(\lambda + 2\mu + a_1 b_1 - q)(\mu - q)}\right]$$

В случае плоской деформации ($x_1\,x_3$) решение системы уравнений (1.2) можно представить в виде

$$(1.6)\qquad u_1 = L_{33}\Psi, \qquad u_3 = -L_{31}\Psi$$

Решение уравнения (1.4), периодическое по оси x_3, запишем в форме

$$(1.7)\qquad \Psi = (C_m^1 e^{k_2 x_1} + C_m^2 e^{-k_2 x_1} + C_m^3 e^{k_3 x_1} + C_m^4 e^{-k_3 x_1})\sin(\gamma x_3)$$
$$k_{2,3}^2 = D \pm \sqrt{F}, \quad D = A\gamma^2 + \frac{\rho s^2(\lambda + 3\mu + a_1 b_1 - 2q)}{2(\mu - q)(\lambda + 2\mu + a_1 b_1 - q)}$$
$$F = D^2 - \frac{(\mu - p)(\lambda + 2\mu + a_3 b_3 - p)\gamma^4 - \rho s^2(\lambda + 3\mu + a_3 b_3 - 2p)\gamma^2 + \rho^2 s^4}{(\mu - q)(\lambda + 2\mu + a_1 b_1 - q)}$$
$$(\gamma = \pi m / l; \quad m = 1, 2, 3, \ldots, \infty)$$

Решение (1.7) удовлетворяет условиям шарнирного опирания на торцах в интегральном смысле.

2. Исследуем устойчивость деформирования плиты толщиной $2h$ и длиной l. Принято, что до момента потери устойчивости напряженно-деформированное состояние плиты описывается соотношениями (1.1), а в момент потери устойчивости деформация происходит в плоскости $x_1 x_3$.

Граничные условия на боковой поверхности $x_1 = \pm h$ приводят к соотношениям

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + B_1\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - s^2 B_3\right)\frac{\partial\Psi}{\partial x_1} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - B_2\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + s^2 B_4\right)\frac{\partial\Psi}{\partial x_3} = 0$$

(2.1)

$$B_1 = \frac{\lambda + 2\mu + a_3 b_3 - p}{\mu - q} - \frac{(\lambda + \mu + a_1 b_3)(\lambda + a_3 b_1)}{(\mu - q)(\lambda + 2\mu + a_1 b_1 - r)}, \quad B_3 = \frac{\rho}{\mu - q}$$
$$B_2 = \frac{\mu(\lambda + 2\mu + a_3 b_3 - p)}{(\mu - r)(\lambda + a_1 b_3) - \mu(\mu - q)},$$
$$B_4 = \frac{\rho\mu}{(\mu - r)(\lambda + \mu + a_1 b_1) - \mu(\mu - q)}$$

В выражениях (2.1) следует положить $r = q$, если нагрузка q «мертвая», $r = 0$, если нагрузка «следящая».

Из уравнений (1.7) и (2.1) при условии существования ненулевых решений получаем трансцендентные уравнения для определения критических нагрузок

$$\frac{k_2(k_2^2 - B_1\gamma^2 - s^2B_3)(k_3^2 + B_2\gamma^2 + s^2B_4)}{k_3(k_3^2 - B_1\gamma^2 - s^2B_3)(k_2^2 + B_2\gamma^2 + s^2B_4)} = \operatorname{th}(k_3h)\operatorname{cth}(k_2h) \tag{2.2}$$

$$\frac{k_2(k_2^2 - B_1\gamma^2 - s^2B_3)(k_3^2 + B_2\gamma^2 + s^2B_4)}{k_3(k_3^2 - B_1\gamma^2 - s^2B_3)(k_2^2 + B_2\gamma^2 + s^2B_4)} = \operatorname{th}(k_2h)\operatorname{cth}(k_3h) \tag{2.3}$$

Соотношения (2.2) и (2.3) являются критериями устойчивости соответственно, когда перемещение u_1 четное и нечетное по x_1.

Для тонкой пластинки, используя разложение тригонометрических множителей в степенной ряд и пренебрегая сжимаемостью материала, в случае следящей нагрузки q из (2.2) получим алгебраическое уравнение

$$\begin{gathered}[3(1-q)+(3+2q)\alpha^2]\rho s^2 - \gamma_1^2\{3(1-q)(p+q) - \\ -\alpha^2[3p+d-4-q(1-p-q-d)]\} = 0, \quad \gamma_1 = \pi / l, \\ \alpha = \gamma_1 h, \ d = 6/(2+c+s\eta)\end{gathered} \tag{2.4}$$

Здесь все величины, имеющие размерность напряжения, отнесены к величине $E/3$.

Перепишем (2.4) в виде

$$d_3s^3 + d_2s^2 + d_1s + d_0 = 0 \tag{2.5}$$

$$\begin{gathered}d_0 = (2+c)\,d_1/\eta + 6\alpha^2\gamma_1^2(1+q), \ d_1 = \eta\gamma_1^2[3p(1+\alpha^2) - \\ -4\alpha^2 + pq(\alpha^2-3) - q(3q+q\alpha^2+\alpha^2)], \\ d_2 = \rho(2+C)[3(1-q)+(3+2q)\alpha^2], \ d_3 = \eta d_2(2+c)^{-1}\end{gathered}$$

Применение критерия Гурвица [7] показывает, что неустойчивость возникает только тогда, когда $d_0 = 0$. При этом характеристический показатель s переходит на правую полуплоскость комплексного переменного через $s = 0$. Для критической нагрузки p имеем

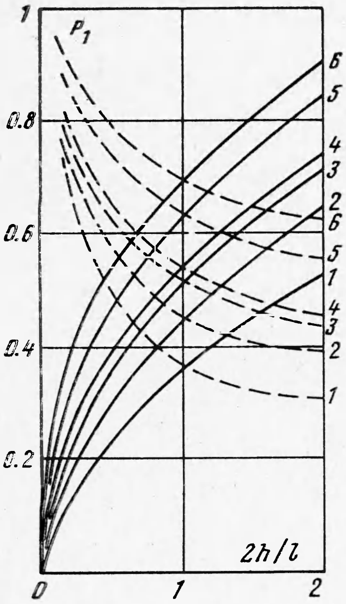
$$p = \frac{2\alpha^2 + 2q[3q + \alpha^2(q-2)] + c[3q^2 + \alpha^2(4+q+q^2)]}{3(2+c)(1+\alpha^2) + q(\alpha^2-3)} \tag{2.6}$$

В случае мертвой нагрузки возможен статический тип неустойчивости [4]. Для тонкой пластины из (2.2) можно получить выражение критической силы p с точностью до α^4

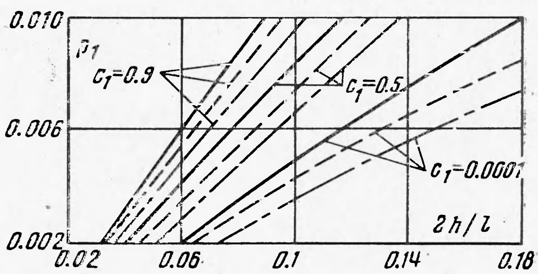
$$\begin{gathered}p = \frac{q}{q-1} + \frac{\alpha^2}{3(q-1)^3}[(1-q)d - (2-q)^2] + \\ + \frac{\alpha^4}{3(q-1)^5}\left\{\frac{1}{3}(2q-3)[(1-q)d - (2 - \right. \\ \left. - q)^2] - {}^2/_5[(q-1)(2-q-d) - q][(1-q)d - (q-2)^2]\right\}\end{gathered} \tag{2.7}$$

Исследуем влияние свойств материала и геометрических размеров плиты на форму выпучивания и на величину критической силы. Полагаем, что на плиту действует только равномерная сжимающая нагрузка p ($q = 0$). Как было показано, возможны две формы выпучивания: боковое (2.2) и бочкообразное (2.3). Уравнения (2.2) и (2.3) в статической постановке решались численно на ЭЦВМ БЭСМ-4 при различных значениях параметров ν, c_1 и $2h/l$; ν — коэффициент Пауссона, $c_1 = c/E$.

Зависимость величины критической нагрузки $p_1 = p / E$ от формы выпучивания и указанных параметров представлена на фиг. 1. Сплошные линии соответствуют боковому выпучиванию, а штриховые — бочкообразному. Кривые с номерами *1*, *2*, *3* и *4*, *5*, *6* соответствуют коэффициентам упрочнения $c_1 = 0.0001$ и 0.75. Кривые с номерами *1*, *4* соответствуют $\nu = 0.2$, *2*, *5* — $\nu = 0.3$, *3*, *6* — $\nu = 0.5$. Как видно из фиг. 1, при малых докритических деформациях бочкообразное выпучивание ввиду нереальных критических нагрузок не наблюдается. Боковое выпучивание имеет место для пластин с соотношением $2h / l < 0.2$ (фиг. 2). Сплошные линии соответствуют $\nu = 0.5$, штриховые — $\nu = 0.3$, штрихпунктирные — $\nu = 0.2$. Для $2h / l > 0.2$ основными являются прочностные свойства плит.



Фиг. 1



Фиг. 2

Поступила 5 III 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Спорыхин А. Н., Трофимов В. Г.* К построению общего решения линеаризированных уравнений плоской задачи устойчивости упруговязкопластических тел. Тр. научн.-исслед. ин-та матем. Воронежск. ун-та, 1971, вып. 4.
2. *Спорыхин А. Н., Трофимов В. Г.* Устойчивость упруговязкопластических тел. Прикл. механ., 1972, т. 8, вып. 9.
3. *Новожилов В. В.* Основы нелинейной теории упругости. М., Гостехиздат, 1948.
4. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М., Физматгиз, 1961.
5. *Гузь А. Н.* О трехмерной теории устойчивости деформирования материалов с реологическими свойствами. Изв. АН СССР, МТТ, 1970, № 6.
6. *Гузь А. Н.* Устойчивость трехмерных деформируемых тел. Киев, «Наукова думка», 1971.
7. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М., «Наука», 1967.