

УДК 532.517.4

Численное моделирование вырождения закрученного турбулентного следа за самодвижущимся телом*

А.Г. Деменков^{1,2}, Г.Г. Черных^{3,4,5}

¹Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск

²Новосибирский государственный технический университет

³Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск

⁴Новосибирский государственный университет

⁵Сибирский государственный университет телекоммуникаций
и информатики, Новосибирск

E-mails: demenkov@itp.nsc.ru, chernykh@ict.nsc.ru

Выполнен численный анализ вырождения закрученного турбулентного следа за самодвижущимся телом. Показано, что начиная с расстояний порядка 100 диаметров от тела течение становится практически бесдвиговым. Построена упрощенная математическая модель дальнего закрученного следа за самодвижущимся телом.

Ключевые слова: закрученный турбулентный след за самодвижущимся телом, математическое моделирование, автомоделное вырождение, бесдвиговое течение.

Введение

Закрученные турбулентные течения являются объектами повышенной сложности при математическом моделировании. Такие течения встречаются в различного рода энергетических и химико-технологических устройствах, при обтекании тел и т.д. В настоящей работе рассматривается турбулентный след за самодвижущимся телом вращения. Изучается частный случай самодвижения тела с двигателем, тяга которого компенсирует силу гидродинамического сопротивления. При этом в безграничной однородной несжимаемой жидкости тело перемещается равномерно и прямолинейно, так что продольная компонента избыточного импульса в следе равна нулю. Двигатель может закручивать жидкость, поэтому, для того чтобы тело не вращалось вокруг своей оси, закрутка должна быть тем или иным способом также скомпенсирована. В этом случае момент количества движения в следе относительно его оси также будет равен нулю.

* Постановки задач осуществлены при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00246) и гранта ведущих научных школ НШ-7214.2016.9, численные эксперименты на основе полной и упрощенной моделей выполнены при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-19-01685).

Обзор ранних работ по численному исследованию закрученных турбулентных следов представлен в монографии [1]. Там же изложены результаты расчетов по упрощенной e -модели турбулентности и одновременно подвергнуты критике попытки использования алгебраических моделей рейнольдсовых напряжений и более общих математических моделей второго порядка. Возможно, неудачные попытки были обусловлены неполнотой или отсутствием необходимых для применения этих моделей экспериментальных данных в ближней зоне следа. Асимптотическому и численному анализу закрученных следов на основе классической e - ε модели турбулентности посвящена работа [2], качественно верно отражающая основные особенности течения, однако не дающая полного описания структуры турбулентности в следе. Критический обзор экспериментальных и теоретических исследований закрученных турбулентных следов, включая более поздние работы, содержится в работе [3].

Численное моделирование закрученного безымпурсного турбулентного следа с ненулевым моментом количества движения, основанное на применении иерархии полуэмпирических моделей турбулентности второго порядка, проводилось в работе [4]. Было показано, что удовлетворительное согласование с экспериментальными данными [5] может быть получено при использовании математической модели, включающей дифференциальные уравнения переноса нормальных и одного из касательных рейнольдсовых напряжений и неравновесных алгебраических соотношений для остальных касательных напряжений.

В публикациях [6, 7] представлены основанные на применении дифференциальных уравнений переноса нормальных компонент тензора рейнольдсовых напряжений численные модели закрученного безымпурсного турбулентного течения с нулевым моментом количества движения, позволившие адекватно описать след за самодвижущимся телом и численно исследовать автомодельность вырождения дальнего следа. Выполненные по этой модели расчеты были сопоставлены с экспериментальными данными, полученными в Институте гидродинамики СО РАН [6] в аэродинамической трубе в следе за эллипсоидом вращения, сопротивление которого компенсировалось импульсом выдуваемой из его кормовой части закрученной струи, а вносимая струей закрутка уравновешивалась вращением части поверхности тела в противоположном направлении. В опытах были измерены на различных расстояниях от тела все компоненты вектора осредненной скорости, тензора рейнольдсовых напряжений, а также скорость диссипации энергии турбулентности.

Из не вошедших в обзоры [3, 6, 7] работ отметим статью [8], в которой на основе полуэмпирической модели турбулентности второго порядка было выполнено численное моделирование ряда свободных турбулентных течений, включая закрученный безымпурсный турбулентный след. Результаты этого численного моделирования закрученных турбулентных следов сопоставлялись с известными результатами лабораторных измерений и расчетами других авторов; было получено удовлетворительное согласование. Также в работе был приведен детальный обзор ряда теоретических и экспериментальных работ, существовавших на момент написания статьи.

Анализ известных работ по численному моделированию закрученного турбулентного следа за самодвижущимся телом показывает недостаточную изученность тонкой структуры течения на больших расстояниях от тела. Прежде всего не найден ответ на вопрос о бессдвиговости течения в дальнем следе. Для случая безымпурсного незакрученного турбулентного следа за сферой в экспериментах [9] было получено, что уже на расстоянии порядка 10 диаметров от тела течение становится практически бессдвиговым, близким к изотропному; результаты численных экспериментов [10] согласуются с этим выводом. Вопрос о выходе течения в дальнем закрученном турбулентном следе за самодвижущимся телом на бессдвиговый режим остается открытым. Из анализа результатов экспериментальных исследований [6] и численных экспериментов [6, 7] можно лишь предположить возможность реализации такого режима на достаточно большом удалении от тела. В настоящей работе выполнен подробный численный анализ

вырождения закрученного турбулентного следа за самодвижущимся телом. Показано, что начиная с расстояний порядка 100 диаметров от тела течение становится практически изотропным бессдвиговым. Построена упрощенная математическая модель дальнего закрученного турбулентного следа за самодвижущимся телом. Работа является развитием и продолжением исследований [6, 7, 11].

1. Постановка задачи

Для описания эволюции турбулентного следа привлекается система осредненных уравнений движения, неразрывности, переноса нормальных рейнольдсовых напряжений и скорости диссипации энергии турбулентности во вращательно-симметричном течении в приближении тонкого сдвигового слоя (ТСС) [6, 7]:

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} r \langle u'v' \rangle + \frac{\partial}{\partial x} \int_r^\infty \frac{[W^2 + \langle w'^2 \rangle - \langle v'^2 \rangle]}{r} dr - \frac{\partial (\langle u'^2 \rangle - \langle v'^2 \rangle)}{\partial x}, \quad (1)$$

$$U \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{VW}{r} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} r \langle v'w' \rangle - \frac{\langle v'w' \rangle}{r} - \frac{\partial \langle u'w' \rangle}{\partial x}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{V}{r} = 0, \quad (3)$$

$$U \frac{\partial \langle u'^2 \rangle}{\partial x} + V \frac{\partial \langle u'^2 \rangle}{\partial r} = -2(1 - C_2) \langle u'v' \rangle \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{2}{3} \varepsilon - C_1 \frac{\varepsilon}{e} (\langle u'^2 \rangle - \frac{2}{3} e) + \frac{2}{3} C_2 P + \frac{C_s}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{re \langle v'^2 \rangle}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial \langle u'^2 \rangle}{\partial r} \right), \quad (4)$$

$$U \frac{\partial \langle v'^2 \rangle}{\partial x} + V \frac{\partial \langle v'^2 \rangle}{\partial r} - 2 \frac{W}{r} \langle v'w' \rangle = 2(1 - C_2) \langle v'w' \rangle \frac{W}{r} - \frac{2}{3} \varepsilon - C_1 \frac{\varepsilon}{e} (\langle v'^2 \rangle - \frac{2}{3} e) + \frac{C_s}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{re}{\varepsilon} (\langle v'^2 \rangle \frac{\partial \langle v'^2 \rangle}{\partial r} - \frac{2 \langle v'w' \rangle^2}{r}) \right] - \frac{2C_s e}{r\varepsilon} [\langle v'w' \rangle \frac{\partial \langle v'w' \rangle}{\partial r} + \langle w'^2 \rangle \frac{\langle v'^2 \rangle - \langle w'^2 \rangle}{r}] + \frac{2}{3} C_2 P, \quad (5)$$

$$U \frac{\partial \langle w'^2 \rangle}{\partial x} + V \frac{\partial \langle w'^2 \rangle}{\partial r} + 2 \frac{W}{r} \langle v'w' \rangle = -2(1 - C_2) \langle v'w' \rangle \frac{\partial W}{\partial r} - \frac{2}{3} \varepsilon - C_1 \frac{\varepsilon}{e} (\langle w'^2 \rangle - \frac{2}{3} e) + \frac{C_s}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{re}{\varepsilon} (\langle v'^2 \rangle \frac{\partial \langle w'^2 \rangle}{\partial r} + \frac{2 \langle v'w' \rangle^2}{r}) \right] + \frac{2C_s e}{r\varepsilon} [\langle v'w' \rangle \frac{\partial \langle v'w' \rangle}{\partial r} + \langle w'^2 \rangle \frac{\langle v'^2 \rangle - \langle w'^2 \rangle}{r}] + \frac{2}{3} C_2 P, \quad (6)$$

$$U \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + V \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = \frac{C_\varepsilon}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{re \langle v'^2 \rangle}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right) + \frac{\varepsilon}{e} (C_{\varepsilon 1} P - C_{\varepsilon 2} \varepsilon), \quad (7)$$

здесь (x, r, φ) — цилиндрическая система координат с началом на задней кромке тела, ось x направлена противоположно направлению движения тела; U, V, W, u', v', w' — продольная, радиальная и тангенциальная компоненты скорости осредненного и пульсационного движения, $\langle u'^2 \rangle, \langle v'^2 \rangle, \langle w'^2 \rangle, \langle u'v' \rangle, \langle u'w' \rangle, \langle v'w' \rangle$ — рейнольдсовы напряжения, $e = (\langle u'^2 \rangle + \langle v'^2 \rangle + \langle w'^2 \rangle)/2$ — энергия турбулентности, $\langle \rangle$ — знак осреднения. В правых частях уравнений (1), (2), (4)–(7) члены с молекулярной вязкостью не учитываются в предположении их малости.

Касательные турбулентные напряжения определяются из неравновесных алгебраических соотношений [12]:

$$\langle u'v' \rangle = \alpha \langle v'^2 \rangle (\partial U / \partial r), \quad (8)$$

$$\langle u'w' \rangle = \alpha (\langle u'v' \rangle (\partial W / \partial r) + \langle v'w' \rangle (\partial U / \partial r)), \quad (9)$$

$$\langle v'w' \rangle = \alpha (\langle v'^2 \rangle r \frac{\partial (W/r)}{\partial r} + \frac{W}{r} (\langle v'^2 \rangle - \langle w'^2 \rangle)), \quad (10)$$

где $\alpha = -\lambda_1 e / \varepsilon$, $\lambda_1 = (1 - C_2) / (C_1 + P / \varepsilon - 1)$. В уравнениях (4)–(7) и соотношениях (8)–(10) величина P обозначает порождение энергии турбулентности за счет осредненного движения:

$$P = - \left(\langle u'v' \rangle \frac{\partial U}{\partial r} + \langle v'w' \rangle r \frac{\partial (W/r)}{\partial r} + \langle u'w' \rangle \frac{\partial W}{\partial x} + \langle u'^2 \rangle \frac{\partial U}{\partial x} + \langle v'^2 \rangle \frac{\partial V}{\partial r} + \langle w'^2 \rangle \frac{V}{r} \right).$$

В основу представленной выше математической модели положена модель, предложенная в работе [13], предназначенная для описания турбулентного течения в закрученных турбулентных струях в приближении тонкого сдвигового слоя. Она включает в себя дифференциальные уравнения переноса всех компонент тензора рейнольдсовых напряжений. В работе [7], выполненной с участием авторов, рассматривались и вариант полной модели [13], и ее упрощенная версия с применением алгебраических аппроксимаций (8)–(10), принятая в настоящем исследовании. Результаты, полученные в обеих математических моделях удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными [6]. Однако при проведении расчетов дальнего следа [7] выяснилась определенная непостоянность («нерегулярность») полной дифференциальной модели, обусловленная недиффузионностью уравнений (1), (2). Поэтому в настоящей работе, с учетом необходимости проведения численного моделирования турбулентного следа на значительных удалениях от тела, выбрана приведенная выше математическая модель (1)–(10). Дифференциальные уравнения (4)–(6) являются уравнениями переноса нормальных рейнольдсовых напряжений. В их правые части включены слагаемые, описывающие турбулентный диффузионный перенос, порождение напряжений за счет сдвига осредненных скоростей, перераспределение этих напряжений за счет корреляций с пульсациями давления (обменные слагаемые) и диссипации под воздействием молекулярной вязкости (см., например, [13]). Эмпирические постоянные модели имели следующие значения: $C_s = 0,22$, $C_\varepsilon = 0,17$, $C_1 = 2,2$, $C_2 = 0,55$, $C_{\varepsilon 1} = 1,45$, $C_{\varepsilon 2} = 1,92$.

В качестве начальных условий при $x = 10D$ задавались экспериментально полученные в работе [6] поперечные распределения $U, W, \varepsilon, \langle u'_i u'_i \rangle$ ($i = 1, 2, 3$), измеренные при числе Рейнольдса $Re = U_0 D / \nu = 50000$, где ν — кинематический коэффициент вязкости, U_0 — скорость невозмущенной жидкости, D — диаметр тела.

При $r \rightarrow \infty$ ставились условия невозмущенного потока, при $r = 0$ — условия симметрии для $U, \langle u'_i u'_i \rangle, \varepsilon$ и антисимметрии для V, W :

$$\partial U / \partial r = \partial \langle u'_i u'_i \rangle / \partial r = \partial \varepsilon / \partial r = V = W = 0.$$

Из уравнений (1)–(3) и указанных начальных и граничных условий для рассматриваемого течения вытекают следующие законы сохранения суммарного избыточного импульса и момента количества движения:

$$J(x) = 2\pi\rho_0 \int_0^\infty [UU_1 - \int_r^\infty \frac{[W^2 + \langle w'^2 \rangle - \langle v'^2 \rangle]}{r'} dr' + \langle u'^2 \rangle - \langle v'^2 \rangle] r dr = 0, \quad (11)$$

$$M(x) = 2\pi\rho_0 \int_0^{\infty} (UW + \langle u'w' \rangle) r^2 dr = 0, \quad (12)$$

где $U_1 = U - U_0$ — дефект продольной компоненты скорости, $\rho_0 = \text{const}$ — плотность жидкости.

Численная реализация модели основана на применении конечно-разностного алгоритма первого порядка аппроксимации на подвижных сетках [6, 7], консервативного по отношению к законам сохранения (11, 12). Детальные численные эксперименты по тестированию численной модели путем расчетов на последовательности сеток задачи об истечении ламинарной незакрученной затопленной струи, имеющей точное автомодельное аналитическое решение, и закрученной ламинарной струи вязкой жидкости, имеющей асимптотическое аналитическое решение, были выполнены в работе [7]. В настоящей работе исследования ограничены расчетами на последовательности сеток.

При проведении расчетов граничные условия для $U_1, W, \varepsilon, \langle u_i'^2 \rangle$ из бесконечности переносились на линию $r = r_* = 4D$, где r_* определялась в ходе численных экспериментов. Переменные задачи обезразмеривались с применением скорости невозмущенного потока U_0 и характерной длины D (диаметра тела). В дальнейшем для обезразмеренных величин будут по-возможности оставлены исходные обозначения.

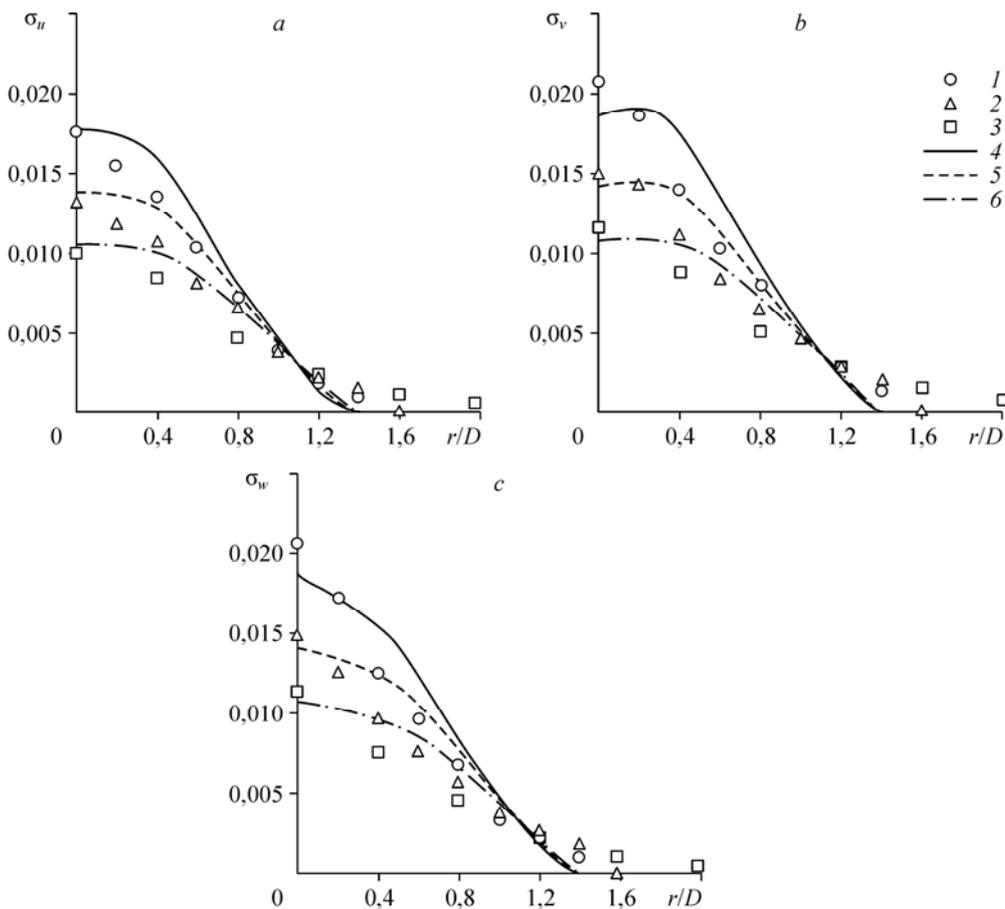


Рис. 1. Сопоставление рассчитанных профилей интенсивностей турбулентных флуктуаций скорости с экспериментальными данными. Эксперименты: $x/D = 20$ (1), 30 (2), 46 (3); расчеты: $x/D = 20$ (4), 30 (5), 46 (6).

2. Результаты расчетов

Рассчитанные безразмерные распределения интенсивностей различных компонент пульсационной составляющей скорости ($\sigma_u = \langle u'^2 \rangle^{1/2}$, $\sigma_v = \langle v'^2 \rangle^{1/2}$, $\sigma_w = \langle w'^2 \rangle^{1/2}$) сопоставляются с экспериментальными данными на рис. 1. Видно, что результаты расчетов вполне удовлетворительно согласуются с данными эксперимента. Обращает на себя внимание также анизотропия течения на рассмотренных расстояниях от тела, обусловленная различными слагаемыми порождения напряжений в уравнениях (4)–(6) и начальными условиями для этих величин.

Рисунок 2 иллюстрирует изменение рассчитанных характерных масштабов турбулентности в зависимости от расстояния от тела. Здесь $|U_{10}|$ — модуль осевого значения дефекта продольной компоненты скорости, $|W|_{\max}$, $|\langle u'v' \rangle|_{\max}$, $|\langle v'w' \rangle|_{\max}$, $|\langle u'w' \rangle|_{\max}$ — соответственно максимальные в данном сечении следа значения модулей окружной компоненты скорости и касательных рейнольдсовых напряжений, $\sigma_u^0, \sigma_v^0, \sigma_w^0$ — осевые величины интенсивностей пульсационных компонент скорости, ε_0 — осевые значения скорости диссипации кинетической энергии турбулентности, l — характерный масштаб ширины следа, определенный из условия $e(l, x) = 0,5e(0, x)$, $Re_\lambda = \sqrt{2e_0} \lambda / \nu$ — осевое значение турбулентного числа Рейнольдса, где $\lambda = \sqrt{10e_0} \nu / \varepsilon_0$ — тейлоровский микро-масштаб течения.

На относительно небольших расстояниях, на которых проводились измерения [6], результаты расчетов согласуются с экспериментальными данными, практически совпадая для масштабных функций $U_{10}(x)$, $e_0(x) = e(0, x)$ и $l(x)$ во всем рассмотренном диапазоне значений x/D [6, 7]. В работах [6, 7] также подробно представлено сопоставление измеренных и рассчитанных радиальных распределений дефекта продольной компоненты скорости, окружной компоненты скорости и других величин для всех расстояний от тела, на которых проводились измерения; было получено удовлетворительное согласование. В настоящей работе авторы ограничились лишь сопоставлениями, представленными на рис. 1 (подробное сопоставление см. в работах [6, 7]).

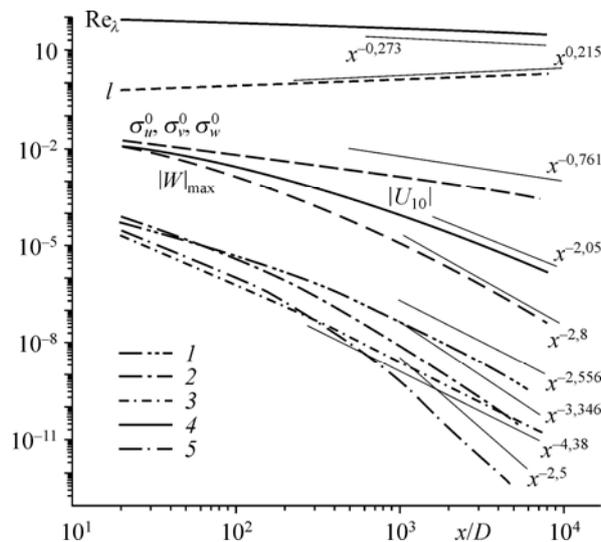


Рис. 2. Изменение характерных масштабов турбулентности в следе в зависимости от расстояния от тела.

1 — $|\langle u'v' \rangle|_{\max}$, 2 — $|\langle v'w' \rangle|_{\max}$, 3 — $|\langle u'w' \rangle|_{\max}$, 4 — Re_λ , 5 — ε_0 .

На больших расстояниях от тела поведение всех масштабных функций демонстрирует степенную зависимость от x (в логарифмических координатах это сплошные прямые на рис. 2), что в рамках использованной математической модели является одним из необходимых признаков достижения автомодельности турбулентного движения в следе. Скорость диссипации энергии турбулентности вырождается по закону $\varepsilon_0(x) \sim x^{-2,5}$, интенсивность пульсационных компонент скорости $\sigma_u^0, \sigma_v^0, \sigma_w^0$ — по закону $x^{-0,761}$, касательные напряжения Рейнольдса $\langle u'v' \rangle_{\max}, \langle v'w' \rangle_{\max}, \langle u'w' \rangle_{\max}$ — по законам $x^{-2,556}, x^{-3,346}, x^{-4,38}$ соответственно. Окружная компонента скорости при больших x/D убывает как $|W|_{\max}(x) \sim x^{-2,8}$, а осевой дефект скорости — $|U_{10}(x)| \sim x^{-2,05}$, так что начиная с некоторого удаления от тела закруткой и продольной компонентой скорости можно пренебречь. Законы расширения характерного размера следа l и вырождения турбулентного числа Рейнольдса Re_λ определяются как $x^{0,215}$ и $x^{-0,273}$.

Основные результаты расчетов получены на стационарной равномерной по переменным r и x сетке с шагами $h_r/D = 0,01$ и $h_x/D = 0,01$. Для контроля точности осуществлялся расчет на более мелкой сетке с $h_r/D = 0,005$ и $h_x/D = 0,01$. Отклонения сеточных решений в равномерной норме при этом не превышали 1,5–2 %. Сеточные аналоги суммарного избыточного импульса и момента количества движения в расчетах были равны соответственно $5,5 \cdot 10^{-14}$ и $3,6 \cdot 10^{-14}$.

На больших расстояниях от тела наблюдается также аффинное подобие поперечных профилей различных характеристик турбулентности в следе, нормированных на соответствующие масштабы. На основе анализа результатов расчетов получено, что в полном соответствии с достижением асимптотического вырождения (рис. 2) при $x/D > 1000$ в следе наблюдается и подобие распределений. При этом автомодельные распределения интенсивностей турбулентных флуктуаций продольной, радиальной и азимутальной компонент скорости практически совпадают. На рис. 3 представлены рассчитанные автомодельные профили дефекта продольной компоненты скорости, тангенциальной компоненты скорости и энергии турбулентности. Автомодельный профиль энергии турбулентности представляет собой финитную колоколообразную функцию; автомодельные профили тангенциальной и дефекта продольной компоненты скорости имеют области отрицательных и положительных значений. Последнее согласуется с законами сохранения (11), (12).

Как уже отмечалось выше, законы вырождения дефекта продольной осредненной компоненты скорости, окружной скорости и касательных турбулентных напряжений свидетельствуют о переходе течения к бессдвиговому режиму на достаточно большом расстоянии от тела. С целью демонстрации выхода течения на бессдвиговый режим в табл. 1 приводятся данные об изменении обезразмеренных суммарных значений характеристик турбулентного следа.

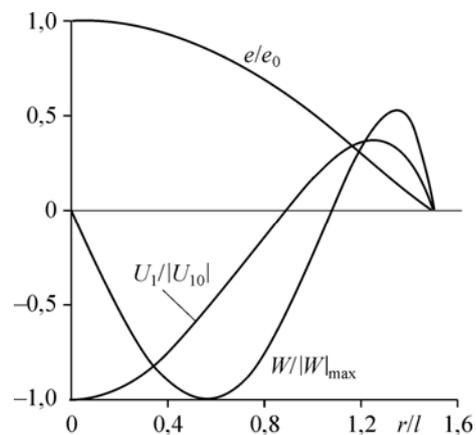


Рис. 3. Рассчитанные автомодельные профили дефекта продольной компоненты скорости, тангенциальной компоненты скорости и энергии турбулентности.

Таблица 1

Интегральные характеристики течения в закрученном следе за самодвижущимся телом

x/D	E_U	E_W	E	P_U	P_W	Π	Σ
60	$1,1 \cdot 10^{-6}$	$8,3 \cdot 10^{-7}$	$4,2 \cdot 10^{-5}$	$2,6 \cdot 10^{-8}$	$2,0 \cdot 10^{-8}$	$5,7 \cdot 10^{-8}$	$7,1 \cdot 10^{-7}$
110	$4,0 \cdot 10^{-7}$	$1,9 \cdot 10^{-7}$	$2,3 \cdot 10^{-5}$	$6,5 \cdot 10^{-9}$	$3,6 \cdot 10^{-9}$	$1,1 \cdot 10^{-8}$	$2,2 \cdot 10^{-7}$
	$3,9 \cdot 10^{-7}$	$1,9 \cdot 10^{-7}$	$2,2 \cdot 10^{-5}$	–	–	–	$2,1 \cdot 10^{-7}$
910	$1,7 \cdot 10^{-9}$	$7,7 \cdot 10^{-11}$	$2,6 \cdot 10^{-6}$	$6,1 \cdot 10^{-12}$	$4,8 \cdot 10^{-13}$	$6,5 \cdot 10^{-12}$	$6,1 \cdot 10^{-9}$
	$1,8 \cdot 10^{-9}$	$8,4 \cdot 10^{-11}$	$2,4 \cdot 10^{-6}$	–	–	–	$2,9 \cdot 10^{-9}$
1810	$1,7 \cdot 10^{-10}$	$2,9 \cdot 10^{-12}$	$1,2 \cdot 10^{-6}$	$3,3 \cdot 10^{-13}$	$1,1 \cdot 10^{-14}$	$3,4 \cdot 10^{-13}$	$7,3 \cdot 10^{-10}$
	$1,8 \cdot 10^{-10}$	$3,2 \cdot 10^{-12}$	$1,2 \cdot 10^{-6}$	–	–	–	$6,9 \cdot 10^{-10}$
6010	$2,5 \cdot 10^{-12}$	$6,6 \cdot 10^{-15}$	$3,4 \cdot 10^{-7}$	$1,5 \cdot 10^{-15}$	$1,1 \cdot 10^{-17}$	$1,5 \cdot 10^{-15}$	$6,0 \cdot 10^{-11}$
	$2,7 \cdot 10^{-12}$	$7,4 \cdot 10^{-15}$	$3,2 \cdot 10^{-7}$	–	–	–	$5,8 \cdot 10^{-11}$

В таблице

$$E(x) = \int_0^\infty \epsilon r dr, \quad E_U(x) = \int_0^\infty \frac{U_1^2}{2} r dr, \quad E_W(x) = \int_0^\infty \frac{W^2}{2} r dr, \quad P_U(x) = - \int_0^\infty \langle u'v' \rangle \frac{\partial U}{\partial r} r dr,$$

$$P_W(x) = - \int_0^\infty \langle v'w' \rangle \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{W}{r} \right) r^2 dr, \quad \Pi(x) = \int_0^\infty Pr dr, \quad \Sigma(x) = \int_0^\infty \epsilon r dr.$$

Первые три интегральные величины характеризуют обезразмеренные суммарные по сечению следа кинетическую энергию турбулентности и части кинетической энергии осредненного движения, обусловленные продольной и окружной компонентами скорости. Для перехода к размерным суммарным значениям энергий достаточно умножить их на сомножитель $2\pi\rho_0 U_0^2 D^2$. Остальные величины характеризуют суммарные по сечению следа порождения и скорость диссипации. Вторая строка в табл. 1 для расстояний $x/D > 60$ соответствует расчетам по упрощенной модели, когда начальные условия ставились при $x/D = 60$ исходя из решения полной задачи. В качестве упрощенной модели принималось приближение дальнего следа, при этом дополнительно второе слагаемое в правой части уравнения (1) не учитывалось в предположении его малости; уравнения (4)–(6) заменялись уравнением баланса энергии турбулентности — $\langle u'^2 \rangle = \langle v'^2 \rangle = \langle w'^2 \rangle = 2/3 \epsilon$; слагаемые порождения в уравнениях переноса e и ϵ полагались равными нулю:

$$U_0 \frac{\partial U_1}{\partial x} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} r K_U \frac{\partial U_1}{\partial r}, \quad U_0 \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} r^3 K_W \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{W}{r} \right), \quad U_0 \frac{\partial e}{\partial x} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} r K_e \frac{\partial e}{\partial r} - \epsilon,$$

$$U_0 \frac{\partial \epsilon}{\partial x} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} r K_\epsilon \frac{\partial \epsilon}{\partial r} - C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{e}. \quad \text{Здесь } K_U = K_W = 0,25 \frac{e^2}{\epsilon}, \quad K_e = 0,147 \frac{e^2}{\epsilon}, \quad K_\epsilon = 0,113 \frac{e^2}{\epsilon}.$$

Видно, что уже на относительно небольшом расстоянии от тела ($x/D = 60$) величины E_U , E_W существенно меньше, чем E , а интегральные характеристики, найденные по упрощенной модели при $x/D > 60$, близки к полученным по полной модели. Дополнительно были выполнены также более детальные численные эксперименты с применением полной и упрощенной математических моделей (табл. 2; представлены обезразмеренные величины). Строки В1 в таблице соответствуют расчетам по полной модели; В2, В3, В4 — расчеты по упрощенной модели для $x/D > 20$, $x/D > 60$, $x/D > 110$ соответственно. Начальный этап в каждом из этих вариантов проводился по полной модели. Из анализа табл. 2 можно сделать вывод о том, что применение упрощенной математической модели,

Таблица 2

Характерные масштабы турбулентного течения в закрученном следе за самодвижущимся телом

x/D	$ U_{10} $	$ W _{\max}$	e_0	ε_0	l	Варианты
210	$0,109 \cdot 10^{-2}$	$0,386 \cdot 10^{-3}$	$0,230 \cdot 10^{-4}$	$0,125 \cdot 10^{-6}$	1,004	B1
	$0,119 \cdot 10^{-2}$	$0,433 \cdot 10^{-3}$	$0,204 \cdot 10^{-4}$	$0,108 \cdot 10^{-6}$	0,980	B2
	$0,109 \cdot 10^{-2}$	$0,380 \cdot 10^{-3}$	$0,224 \cdot 10^{-4}$	$0,121 \cdot 10^{-6}$	0,989	B3
	$0,108 \cdot 10^{-2}$	$0,378 \cdot 10^{-3}$	$0,228 \cdot 10^{-4}$	$0,124 \cdot 10^{-6}$	0,995	B4
510	$0,292 \cdot 10^{-3}$	$0,613 \cdot 10^{-4}$	$0,651 \cdot 10^{-5}$	$0,146 \cdot 10^{-7}$	1,192	B1
	$0,336 \cdot 10^{-3}$	$0,764 \cdot 10^{-4}$	$0,587 \cdot 10^{-5}$	$0,130 \cdot 10^{-7}$	1,162	B2
	$0,297 \cdot 10^{-3}$	$0,628 \cdot 10^{-4}$	$0,631 \cdot 10^{-5}$	$0,140 \cdot 10^{-7}$	1,180	B3
	$0,291 \cdot 10^{-3}$	$0,613 \cdot 10^{-4}$	$0,640 \cdot 10^{-5}$	$0,143 \cdot 10^{-7}$	1,185	B4
1010	$0,885 \cdot 10^{-4}$	$0,116 \cdot 10^{-4}$	$0,239 \cdot 10^{-5}$	$0,271 \cdot 10^{-8}$	1,368	B1
	$0,106 \cdot 10^{-3}$	$0,154 \cdot 10^{-4}$	$0,218 \cdot 10^{-5}$	$0,245 \cdot 10^{-8}$	1,330	B2
	$0,912 \cdot 10^{-4}$	$0,122 \cdot 10^{-4}$	$0,232 \cdot 10^{-5}$	$0,262 \cdot 10^{-8}$	1,355	B3
	$0,893 \cdot 10^{-4}$	$0,118 \cdot 10^{-4}$	$0,235 \cdot 10^{-5}$	$0,265 \cdot 10^{-8}$	1,362	B4
2010	$0,241 \cdot 10^{-4}$	$0,190 \cdot 10^{-5}$	$0,854 \cdot 10^{-6}$	$0,487 \cdot 10^{-9}$	1,583	B1
	$0,296 \cdot 10^{-4}$	$0,261 \cdot 10^{-5}$	$0,788 \cdot 10^{-6}$	$0,447 \cdot 10^{-9}$	1,534	B2
	$0,250 \cdot 10^{-4}$	$0,202 \cdot 10^{-5}$	$0,833 \cdot 10^{-6}$	$0,473 \cdot 10^{-9}$	1,567	B3
	$0,245 \cdot 10^{-4}$	$0,196 \cdot 10^{-5}$	$0,842 \cdot 10^{-6}$	$0,479 \cdot 10^{-9}$	1,575	B4

начиная с расстояний $x/D = 60$ и $x/D = 110$, приводит к результатам, близким к полученным по полной модели. Отклонения массивов значений функций U_1 , W , e , ε , полученных по полной и упрощенной моделям, не превышает отклонений соответствующих характерных (осевых и максимальных) значений, приведенных в таблице. В рамках принятых математических моделей и выполненных численных экспериментов выход на практически бесследный режим течения наступает существенно раньше, чем выход на автомодельность.

Заключение

Выполнен подробный численный анализ вырождения закрученного турбулентного следа за самодвижущимся телом. Детально проанализирована автомодельность вырождения дальнего следа. Показано, что начиная с расстояний порядка $100D$ от тела течение становится практически бесследным. Построена упрощенная математическая модель дальнего закрученного следа за самодвижущимся телом.

Авторы посвящают настоящую работу светлой памяти Владимира Алексеевича Костомахи и благодарят О.Ф. Воропаеву, О.В. Капцова и А.В. Шмидта за полезные обсуждения.

Список литературы

1. Шетц Дж. Турбулентные течения. Процессы вдува и перемешивания. М.: Мир, 1984. 247 с.
2. Гумилевский А.Г. Автомоделность и законы вырождения в следах с компенсацией по импульсу и моменту количества движения // Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 5. С. 35–41.
3. Piquet J. Turbulent flows. Models and physics. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1999. 761 p.
4. Chernykh G.G., Demenkov A.G., Kostomakha V.A. Numerical model of a swirling momentumless turbulent wake // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1998. Vol. 13, No. 4. P. 279–288.
5. Костомаха В.А., Леснова Н.В. Турбулентный закрученный след за сферой с полной или частичной компенсацией силы сопротивления // Прикладная механика и техническая физика. 1995. Т. 36, № 2. С. 88–98.
6. Гаврилов Н.В., Деменков А.Г., Костомаха В.А., Черных Г.Г. Экспериментальное и численное моделирование турбулентного следа за самодвижущимся телом // Прикладная механика и техническая физика. 2000. Т. 41, № 4. С. 49–58.
7. Chernykh G.G., Demenkov A.G., Kostomakha V.A. Swirling turbulent wake behind a self-propelled body // Intern. J. of Computational Fluid Dynamics. 2005. Vol. 19, No. 5. P. 399–408.

8. **Lu M.-H., Sirviente A.I.** Numerical study of the momentumless wake of an axisymmetric body // 43rd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, 10–13 January 2005, Reno, Nevada. AIAA Paper. No. 2005-1109. 14 p.
9. **Алексенко Н.В., Костомаха В.А.** Экспериментальное исследование осесимметричного безымпulsive струйного течения // Прикладная механика и техническая физика. 1987. № 1. С. 65–69.
10. **Федорова Н.Н., Черных Г.Г.** О численном моделировании безымпulsive турбулентного следа за сферой // Моделирование в механике. 1992. Т. 6 (23), № 1. С. 129–140.
11. **Деменков А.Г., Черных Г.Г.** Об автомодельном вырождении закрученного турбулентного следа за само-движущимся телом // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сб. тр. Междунар. научно-технической конф., посвященной 70-летию победы в Великой Отечественной войне. Россия, Воронеж, 2015. С. 109–111.
12. **Rodi W.** A new algebraic relation for calculating the Reynolds stresses // ZAMM. 1976. Vol. 56. P. 219–221.
13. **Лаундер Б.Е., Морс А.** Численный расчет осесимметричных свободных сдвиговых течений с использованием замыканий напряжений // Турбулентные сдвиговые течения. Пер. с англ. / под ред. А.С. Гиневского. М.: Машиностроение, 1982. С. 291–310.

*Статья поступила в редакцию 9 декабря 2015 г.,
после доработки — 19 февраля 2016 г.*