9. **Растопов С. Ф., Суходольский А. Т.** Применение лазерно-индуцированного эффекта Марангони для записи дифракционных решеток // Квантовая электрон.— 1987.— Т. 14, № 8.

г. Москва *Поступила 15/V 1990 г., в окончательном варианте — 25/I 1991 г.*

УДК 532.5

В. В. Никулин

АНАЛОГ УРАВНЕНИЙ ВИХРЕВОЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ ДЛЯ ПОЛЫХ И ТОРНАДОПОДОБНЫХ ВИХРЕЙ. ВЫСОТА СТАЦИОНАРНОГО ТОРНАДОПОДОБНОГО ВИХРЯ

В длинноволновом приближении получен аналог уравнений вихревой мелкой воды для полых и торнадоподобных вихрей в невязкой несжимаемой неоднородной жидкости. Рассмотрен вертикальный стационарный торнадоподобный вихрь, жидкость в ядре которого более легкая, чем вне его. Получен строгий критерий, разделяющий случаи, когда течение ограничено или безгранично по высоте. Расчет высоты вихря по теоретическим формулам по порядку величины согласуется с результатами лабораторных измерений и наблюдений за пыльными вихрями в природе.

1. Рассматривается несжимаемая невязкая неоднородная жидкость в поле тяжести. Течение считается вращательно-симметричным. Вводится цилиндрическая система координат $(r\ \varphi\ z)$, r — радиус, φ — азимутальный угол. Ось z направлена против силы тяжести. Область, занимаемая течением, разбивается на две: область I — $r \leqslant r_0(z,\ t)$, II — $r_0(z, t) \leqslant r \leqslant r_*$, где r_* — постоянная величина, r_0 — в общем случае функция z и t, t — время. На границе r_0 может быть разрыв плотности и касательной к ней компоненты скорости. Через $(u\ v\ w)$ обозначаются компоненты скорости, соответствующие $(r\ \varphi\ z)$, p, ρ, g — давление, плотность и ускорение силы тяжести.

Чтобы в дальнейшем перейти к длинноволновому приближению, вводятся характерные масштабы длины, скорости и плотности. За единицу длины принимается характерный масштаб изменений по оси z, за единицу скорости — величина вращательной компоненты скорости при $r = r_0$, $z = 0$, $t = 0$, характерная плотность полагается равной 1. В этом случае характерное время, давление и ускорение будут равны 1. Характерный масштаб изменений по оси r обозначается через δ, считается, что $\delta \ll 1$.

Переход к новым переменным и функциям совершается по соотношениям

$$r^2 \to \delta^2\eta,\ z \to z,\ t \to t,\ 2ur \to \delta^2 q,$$
$$vr \to \delta A,\ w \to w,\ \rho \to \rho,\ p \to p,\ g \to g.$$

Значение $r = r_0$ соответствует $\eta = \eta_0(z,\ t)$, $r = r_*$ — $\eta = \eta_*$.

Уравнения движения и неразрывности примут вид

$$\frac{\rho\delta^2}{2}\left(\frac{\partial q}{\partial t} + q\frac{\partial q}{\partial \eta} - \frac{q^2}{2\eta} + w\frac{\partial q}{\partial z}\right) - \frac{\rho A^2}{\eta} = -2\eta\frac{\partial p}{\partial \eta}, \tag{1.1}$$
$$\frac{\partial A}{\partial t} + q\frac{\partial A}{\partial \eta} + w\frac{\partial A}{\partial z} = 0,$$
$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + q\frac{\partial w}{\partial \eta} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g,$$
$$\frac{\partial q}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + q\frac{\partial \rho}{\partial \eta} + w\frac{\partial \rho}{\partial z} = 0.$$

В качестве краевых условий принимаются следующие:

(1.2) $$q = A = 0 \text{ при } \eta = 0.$$

На границе областей $\eta = \eta_0$ считается непрерывным давление и выполняется кинематическое условие

(1.3) $$q = \partial\eta_0/\partial t + w\partial\eta_0/\partial z.$$

При $\eta = \eta_*$ выполнено условие непротекания

(1.4) $$q = 0 \text{ при } \eta = \eta_*.$$

Далее, слагаемые в (1.1), имеющие множитель δ^2, считаются малыми и опускаются, а система преобразуется методом, аналогичным предложенному в теории вихревой мелкой воды [1]. Преобразованные уравнения выводятся для каждой из областей I и II по отдельности.

Вводятся новые независимые переменные z', t', ν $(0 \leqslant \nu \leqslant 1)$ по соотношениям $z = z'$, $t = t'$, $\eta = R(z', t', \nu)$, где R удовлетворяет уравнению

(1.5) $$\partial R/\partial t' + w\partial R/\partial z' = q$$

и краевым условиям

(1.6) $$R(z', t', 0) = 0, \ R(z', t', 1) = \eta_0$$

для уравнений в области I и

(1.7) $$R(z', t', 0) = \eta_*, \ R(z', t', 1) = \eta_0$$

в области II. Легко видеть, что при таком определении R краевые условия (1.2) (для q), (1.3) и (1.4) выполняются автоматически. При этом неизвестная граница $\eta = \eta_0$ перешла в известную $\nu = 1$.

Для операторов дифференцирования можно записать

$$\frac{\partial R}{\partial \nu}\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial \nu}\frac{\partial}{\partial z'} - \frac{\partial R}{\partial z'}\frac{\partial}{\partial \nu}, \quad \frac{\partial R}{\partial \nu}\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \nu},$$

$$\frac{\partial R}{\partial \nu}\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial \nu}\frac{\partial}{\partial t'} - \frac{\partial R}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial \nu}.$$

Отсюда с учетом (1.5) оператор полной производной $\partial/\partial t + q\partial/\partial\eta + w\partial/\partial z$ перейдет в $\partial/\partial t' + w\partial/\partial z'$. Тогда в переменных t', z', ν система (1.1) примет вид (далее штрихи при t', z' опускаются)

(1.8) $$\frac{\rho A^2}{2R^2}\frac{\partial R}{\partial \nu} = \frac{\partial p}{\partial \nu}, \quad \frac{\partial A}{\partial t} + w\frac{\partial A}{\partial z} = 0,$$

$$\rho\frac{\partial R}{\partial \nu}\left(\frac{\partial w}{\partial t} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\frac{\partial R}{\partial \nu}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial R}{\partial \nu}\frac{\partial p}{\partial \nu} - \rho g\frac{\partial R}{\partial \nu},$$

$$\frac{\partial q}{\partial \nu} + \frac{\partial R}{\partial \nu}\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial \nu} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + w\frac{\partial \rho}{\partial z} = 0.$$

Из (1.8) следует, что если при $t = 0$ $A = a(\nu)$, $\rho = \rho(\nu)$, то

(1.9) $$A = a(\nu), \ \rho = \rho(\nu)$$

для любого t. Далее (1.9) считается выполненным.

С учетом (1.9) из первого уравнения (1.8) интегрированием от ν до 1 выражается p, результат подставляется в третье. С помощью (1.5) из четвертого уравнения исключается q и получается система двух уравнений:

(1.10) $$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p_1}{\partial z} + \frac{\rho_1 a_1^2}{2R_1^2}\frac{\partial R_1}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}\int_\nu^1 \frac{1}{2R}\frac{\partial(\rho a^2)}{\partial \nu}d\nu - \rho g,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial R}{\partial \nu}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(w\frac{\partial R}{\partial \nu}\right) = 0.$$

Здесь p_1, ρ_1, a_1, R_1 — значения соответствующих величин при $\nu = 1$ (на границе между областями I и II). Отметим, что уравнения будут иметь одинаковый вид (1.10) в областях I и II. Разными могут быть значения ρ_1

и a_1, поскольку при переходе через границу допускается скачок плотности и касательной к ней компоненты скорости, значения p_1 и R_1 в областях I и II одинаковы в силу непрерывности давления и определения R. Из (1.10) находим уравнения для полых и торнадоподобных вихрей.

Полый вихрь. Считается, что в области I жидкость отсутствует, а давление постоянно и равно нулю. Тогда для области II поверхность $\nu = 1$ свободная и $p_1 = 0$. Значит, уравнения для полого вихря имеют вид (1.10), где положено p_1 равным нулю.

Торнадоподобный вихрь. Вводится еще один малый параметр $\varepsilon = 1/\eta_*$, физический смысл ε — квадрат отношения радиусов областей I и II. Порядок малости ε не произволен. Как следует из (1.1), для того чтобы отброшенные слагаемые оставались малыми, необходимо выполнение неравенства $\delta^2 \ll \varepsilon$.

Решения системы (1.10) ищутся разложением по малому параметру ε. В области I

$$R = R^0 + \varepsilon R^1 + \ldots,\ w = w^0 + \varepsilon w^1 + \ldots,\ p_1 = \pi^0 + \varepsilon \pi^1 + \ldots$$

В области II ищутся решения некоторого специального вида:

$$R = (1 - \nu)/\varepsilon + R^0 + \varepsilon R^1 + \ldots,\ w = w^0(\nu) + \varepsilon w^1 + \ldots,\ a = \rho = 1,$$

p_1 такое же, как в области I, в силу условий на границе.

Согласно (1.6), (1.7), при $\nu = 0$ надо положить $R^i = 0$ ($i = 0, 1, 2, \ldots$).

Заметим, что решения в области II хорошо аппроксимируют реальные течения в торнадоподобных вихрях вне ядра вихря, наблюдаемые как в лабораторных экспериментах [2, 3], так и в природе [4].

Разложения подставляются в (1.10). Остаются члены нулевого порядка по ε. В области II получается уравнение

$$-\frac{\partial \pi^0}{\partial z} + \frac{1}{2\left(R_1^0\right)^2}\frac{\partial R_1^0}{\partial z} - g = 0.$$

Как уже отмечалось, π^0 и R_1^0 одинаковы для областей I и II. Поэтому из последнего соотношения выражается π^0 и подставляется в уравнения для области I. В результате для нее имеем

$$\rho\left(\frac{\partial w^0}{\partial t} + w^0\frac{\partial w^0}{\partial z}\right) = -\frac{1 - \rho_1 a_1^2}{2\left(R_1^0\right)^2}\frac{\partial R_1^0}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}\int\limits_\nu^1 \frac{1}{2R^0}\frac{\partial(\rho a^2)}{\partial \nu}\,d\nu + (1 - \rho)g, \tag{1.11}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial R^0}{\partial \nu}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(w^0\frac{\partial R^0}{\partial \nu}\right) = 0.$$

Из (1.10) с учетом $p_1 = 0$ и (1.11) следует, что если $\partial(\rho a^2)/\partial\nu = 0$, то данные системы эквивалентны уравнениям вихревой мелкой воды постоянной плотности [1]. В таком случае гиперболические свойства этих систем устанавливаются по аналогии с [1] путем соответствующих переобозначений.

2. Развитый метод применяется для исследования более конкретного течения. Рассматривается стационарный торнадоподобный вихрь. Изучается течение в области I, называемое далее ядром вихря. В области II полагается $w = 0$. В этом случае система (1.10) приводится к виду (1.11) непосредственно для R и w без разложения по ε. Таким образом, рассматривается (1.11) без верхнего индекса нуль.

В качестве граничных условий задаются значения w и R при $z = 0$. Полагается $w = w_0(\nu)$, $R = \nu$ при $z = 0$. Основной результат раздела формулируется как

Теорема. *Пусть* $a = 0$, $\rho = \mathrm{const} < 1$, $w_0 \geqslant \gamma > 0$, γ — *постоянная, течение стационарно,*

$$\lambda = \frac{1}{2\rho}\int\limits_0^1 \frac{d\nu}{w_0^2}.$$

Тогда, если $\lambda < 1$, то решение существует при всех $z > 0$, $\nu \in [01]$, причем $R \to 0$, $w \to \infty$ для каждого фиксированного ν монотонно при $z \to \infty$. Если $\lambda > 1$, то решение существует только для $z \leqslant l$, где l определяется равенством

$$l = \frac{\rho}{2(1-\rho)g}\left(\frac{1}{\rho} - \gamma^2 - \frac{1}{\rho\int\limits_0^1 \frac{w_0^2\,d\nu}{\sqrt{w_0^2-\gamma^2}}}\right),$$

причем величина w при $z = l$ обращается в нуль для ν, задаваемых уравнением $w_0(\nu) = \gamma$.

Доказательство. Уравнения (1.11) интегрируются один раз по z. Через φ обозначим $\varphi = w^2 - w_0^2$. Получаем

$$\varphi - \frac{1}{\rho R_1} = \frac{2(1-\rho)}{\rho} gz - \frac{1}{\rho}, \tag{2.1}$$

$$R = \int\limits_0^\nu \frac{w_0\,d\nu}{(w_0^2+\varphi)^{1/2}},\quad w = (w_0^2+\varphi)^{1/2}.$$

Из первого уравнения вытекает, что $\varphi = \varphi(z)$. Таким образом, чтобы найти зависимость от z функций R и w, необходимо исследовать неявную зависимость $\varphi(z)$, даваемую первым уравнением (2.1).

Обозначим $f(\varphi) = \varphi - 1/(\rho R_1)$. Дифференцированием устанавливаются соотношения $f'(0) = 1 - \lambda$,

$$f''(\varphi) = \frac{3}{4\rho R_1^2}\int\limits_0^1 \frac{w_0 d\nu}{(w_0^2+\varphi)^{5/2}} - \frac{1}{2\rho R_1^3}\left(\int\limits_0^1 \frac{w_0 d\nu}{(w_0^2+\varphi)^{3/2}}\right)^2.$$

При вычислениях учитывалось, что $\varphi = 0$, $R_1 = 1$ при $z = 0$. Используя неравенство Буняковского и выражение для R_1 из второго уравнения (2.1), можно написать

$$\left(\int\limits_0^1 \frac{w_0 d\nu}{(w_0^2+\varphi)^{3/2}}\right)^2 \leqslant R_1 \int\limits_0^1 \frac{w_0 d\nu}{(w_0^2+\varphi)^{5/2}}.$$

Из последнего неравенства и выражения для $f''(\varphi)$ следует, что $f''(\varphi) > 0$ для $\varphi > -\gamma^2$.

Пусть $\lambda < 1$. Тогда из выражения для $f'(0)$ вытекает, что $f'(0) > 0$. Отсюда и из положительности $f''(\varphi)$ имеем $f'(\varphi) > 0$. Из (2.1) получим $df/dz > 0$. Так как $df/dz = (df/d\varphi)(d\varphi/dz)$, а по доказанному $f'(\varphi) > 0$, то $d\varphi/dz > 0$. Таким образом, φ — монотонно возрастающая функция z, причем, согласно (2.1), $\varphi \to \infty$ при $z \to \infty$. Тогда из (2.1) находим, что $w \to \infty$, $R \to 0$ при $z \to \infty$ монотонно для каждого фиксированного ν.

Пусть $\lambda > 1$. Тогда $f'(0) < 0$. Рассматривая этот случай аналогично предыдущему, получим, что $d\varphi/dz < 0$. Таким образом, φ — монотонно убывающая функция. При $\varphi < -\gamma^2$ решение не существует, так как выражение под корнем в (2.1) становится отрицательным. Подстановка $\varphi = -\gamma^2$ в (2.1) дает предельное значение $z = l$, до которого существует решение. Из (2.1) также вытекает, что при $z = l$ величина $w(\nu)$ обращается в нуль при тех ν, для которых выполнено равенство $w_0(\nu) = \gamma$.

3. Полученные результаты применяются для расчета высоты реальных торнадоподобных вихрей с теплым ядром. В качестве примеров природных вихрей рассматриваются пыльные вихри [4—6], лабораторных — экспериментальные модели [3, 7]. Применение модели торнадоподобного вихря к описанию реальных течений обосновывается качественным сходством модельных и реальных течений, а также отсутствием влияния внешней границы η_* на структуру уравнений (1.11).

Из наблюдений за пыльными вихрями установлено, что их ядра, обычно хорошо визуализированные пылью, на некоторой высоте резко теряют свою видимость, исчезают. При этом часто перед местом исчезновения ядро вихря заметно утолщается [5]. В экспериментах [3, 7] показано, что на некоторой высоте ядро вихря резко меняет свою структуру и превращается в конвективный невращающийся термик, радиус которого быстро увеличивается. Таким образом, вихревое течение рассматриваемого вида на некоторой высоте может претерпевать резкое изменение и переходить в течение другой структуры.

Будем считать, согласно [8], где исследовался вихрь, стекающий с крыла самолета, что высота вихря l равна предельному значению z, до которого существует решение в рассматриваемом приближении. Как вытекает из теоремы, при таком z обращается в нуль вертикальная скорость хотя бы в одной точке внутри ядра. Таким образом, данное предположение аналогично предположению, которое делается в теории пограничного слоя при определении точки отрыва.

Выполним расчеты высоты вихря по формуле модели и сопоставим их с данными экспериментов [3, 7], а также наблюдений за пыльными вихрями. Далее все величины и расчеты берутся в размерном виде.

Плоскость $z = 0$ помещается на верхней границе приземного пограничного слоя или в соответствии с обозначениями [2] — на нижней границе области IV. Согласно [2], профиль вертикальной скорости близок к ступенчатой функции. Поэтому полагается $w_0 = \text{const}$ (w_0 — размерная вертикальная скорость в ядре вихря при $z = 0$). Через ρ, ρ_0 обозначаются плотности жидкости в ядре вихря и вне его, причем $\rho < \rho_0$, v_0 — величина вращательной компоненты скорости на границе ядра при $z = 0$. Тогда условие ограниченности высоты вихря $\lambda > 1$ и выражение для l примут вид

$$\frac{2\rho w_0^2}{\rho_0 v_0^2} < 1, \quad l = \frac{\rho v_0^2}{2(\rho_0 - \rho) g}\left(\frac{\rho_0}{\rho} - \frac{w_0^2}{v_0^2}\right).$$

Из этих соотношений следует, что l слабо зависит от w_0, и поэтому по порядку величины запишем

$$l \approx \rho_0 v_0^2/[2g(\rho_0 - \rho)].$$

Для $(\rho_0 - \rho)/\rho_0$ можно дать оценку $(\rho_0 - \rho)/\rho_0 \approx (T - T_0)/T_0$, если $(T - T_0) \ll T_0$ (T — средняя температура в ядре, T_0 — температура окружающего воздуха). Тогда получим

$$l \approx v_0^2 T_0/(2g(T - T_0)).$$

Полагается $v_0 = 100$ см/с, $w_0 = 43$ см/с, $T - T_0 = 20$ К, $T_0 = 300$ К [7]. Величина v_0 рассчитана из условия сохранения циркуляции скорости вокруг ядра во внешней области, тогда $2w_0^2/v_0^2 < 1$, т. е. $\lambda > 1$, $l \approx 85$ см. Согласно измерениям [7], $l \approx 45$ см.

Положим $v_0 = 40$ см/с, $T - T_0 = 10$ К, $T_0 = 300$ К [3], тогда $l \approx 24$ см. Согласно [3], $l \approx 60$ см.

Для пыльных вихрей примем $v_0 = 10$ м/с, $T - T_0 = 2$ К, $T_0 = 300$ К [4], при этом $l \approx 750$ м. На фото, приведенном в [5], высота вихря примерно 600 м.

Таким образом, результаты теории качественно подтверждаются данными наблюдений. Количественный расчет высоты вихря по формулам модели по порядку величины согласуется с результатами лабораторных измерений и наблюдений в природе за пыльными вихрями.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Тешуков В. М.** О гиперболичности уравнений длинных волн // ДАН СССР.— 1985.— Т. 284, № 3.
2. **Никулин В. В.** Исследование взаимодействия торнадоподобного вихря с твердыми границами // ПМТФ.— 1980.— № 1.
3. **Mullen J. B., Maxworthy T.** A laboratory model of dust devil vortices // Dyn. Atmos. and Oceans.— 1977.— N 1.

4. **Sinclair P. C.** The lower structure of dust devils // J. Atmos. Sci.— 1973.— V. 30, N 8.
5. **Ives R. L.** Behaviour of dust devil // Bull. Amer. Metereol. Soc.— 1947.— V. 28, N 4.
6. **Williams N. R.** Development of dust wirls and similar small-scale vortices // Bull. Amer. Meteorol. Soc.— 1948.— V. 29, N 3.
7. **Fitzjarrald D. E.** A laboratory simulation of convective vortices // J. Atmos. Sci.— 1973.— V. 30, N 7.
8. **Mager A.** Dissipation and breakdown of a wing-tip vortex // J. Fluid Mech.— 1972.— V. 55, N 4.

г. Новосибирск *Поступила 3/XII 1990 г.*

УДК 532.526

С. А. Гапонов, А. Д. Косинов, А. А. Маслов,
С. Г. Шевельков

О ВЛИЯНИИ ВЕЕРА ВОЛН РАЗРЕЖЕНИЯ НА РАЗВИТИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

Вопросы взаимодействия пограничного слоя с локальными неоднородностями сверхзвукового потока в настоящее время недостаточно хорошо изучены. Особенно это относится к устойчивости сверхзвукового ламинарного пограничного слоя в сложных течениях с градиентами давления. Теоретически задача устойчивости вблизи изогнутых поверхностей рассматривалась в [1]. Анализировался случай обтекания выпуклой поверхности сверхзвуковым потоком. Отмечено стабилизирующее влияние на пограничный слой поворота сверхзвукового потока на внешнем тупом угле.

Результаты экспериментального исследования устойчивости пограничного слоя при его взаимодействии с веером волн разрежения представлены в [2]. Получено, что искусственные возмущения, прошедшие через веер волн разрежения, остаются нейтральными в области небольшого положительного градиента давления за поворотом потока. Этот результат был также предсказан теоретически в [1]. Таким образом, можно отметить, что на развитие возмущений в данном случае оказывает влияние предыстория течения.

В настоящей работе сделана попытка исключить влияние веера волн разрежения, чтобы более определенно выделить его воздействие на развитие возмущений. Для этого были повторены измерения, выполненные в [2]. Однако в данном случае искусственные возмущения вводились в пограничный слой сразу за веером волн разрежения в отличие от работы [2], в которой источник возмущений располагался перед поворотом потока.

1. Измерения выполнены в сверхзвуковой аэродинамической трубе Т-325 ИТПМ СО АН СССР с размерами рабочей части $200 \times 200 \times 600$ мм. Условия экспериментов: $\mathrm{Re}_1 = U/\nu = 6{,}75 \cdot 10^6$ м$^{-1}$, $F = 2\pi f/\mathrm{Re}_1 U = 0{,}337 \cdot 10^{-4}$, $\mathrm{M}_\infty = 2{,}0$, где Re_1 — единичное число Рейнольдса; ν — кинематическая вязкость; U — скорость на внешней границе пограничного слоя; M_∞ — число Маха набегающего потока; f — частота возмущения; F — безразмерный частотный параметр. Исследования осуществлялись при помощи термоанемометра постоянного тока. Применялись датчики с нитью из вольфрама диаметром 6 мкм и длиной около 1,2 мм.

Эксперименты проведены на той же модели, что и в [2], представляющей собой острый стальной конус с углом при вершине 10° и цилиндрической хвостовой частью диаметром 38 мм. В качестве источника искусственных возмущений использовался электрический разряд переменного тока, который находился на цилиндрической части модели на расстоя-