УДК 517.958.532

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ТЕПЛОВОЙ ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

В. Н. Монахов

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Работа посвящена построению обобщенных автомодельных решений тепловой модели двухфазной фильтрации в пористых средах.

Интенсивное увеличение добычи нефти во всем мире стало возможным благодаря не только приросту разведанных ее запасов, но также и внедрению прогрессивных систем разработки месторождений, позволяющих, в частности, эксплуатировать нефтяные залежи с сильновязкими и парафинистыми нефтями, не поддающимися извлечению традиционными методами заводнения.

Основное место среди новых систем разработки нефтяных месторождений занимают различные способы термического воздействия на пласт, например, методом направленного вытеснения нефти теплоносителями (паром или горячей водой) от нагнетательных к добывающим скважинам либо с помощью циклической паротепловой обработки скважин. Для описания такого воздействия В. Н. Монаховым и О. Б. Бочаровым [1, 2] впервые предложена температурная модель двухфазной фильтрации (МЛТ-модель), построенная на основе изотермической модели Маскета — Леверетта [3] и учитывающая тепловые эффекты через известные зависимости от температуры, вязкостей и капиллярных свойств компонент двухфазной жидкости.

В отличие от используемых ранее тепловых моделей двухфазной фильтрации МЛТ-модель, во-первых, технологична в том смысле, что для ее описания употребляются только экспериментально определяемые функциональные параметры, и, во-вторых, уравнение энергии в ней является следствием законов сохранения энергии компонент жидкости и пористой среды.

Построены автомодельные решения МЛТ-модели. В изотермическом случае ($\theta \equiv \mathrm{const}$) существование таких решений установлено в [4, 5].

1. МЛТ-модель. Пусть s_i, $\rho_i = \mathrm{const}$, p_i и $\boldsymbol{v}_i$ ($i = 1, 2$) — фазовые насыщенности (концентрации), плотности, давления и скорости (расходы) фильтрации, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ — скорость фильтрации смеси. Уравнения МЛТ-модели имеют вид

$$m_0 \frac{\partial}{\partial \tau}(s_i \rho_i) + \nabla \cdot (\rho_i \boldsymbol{v}_i) = 0, \qquad \boldsymbol{v}_i = -K(\xi) \frac{k_i(s)}{\mu_i(\theta)} (\nabla p_i + \rho_i \boldsymbol{g}),$$

$$p_2 - p_1 = p_c(\xi, s, \theta), \qquad \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \nabla \cdot (\lambda \nabla \theta - \boldsymbol{v} \theta), \qquad s_1 + s_2 = 1.$$

Здесь m_0 — пористость среды; θ — температура; K — тензор абсолютной проницаемости среды; k_i и μ_i — относительные проницаемости и вязкости фаз; $s = (s - s_1^0)(1 - s_1^0 - s_2^0)^{-1}$ — эффективная насыщенность смачивающей фазы, s_i^0 — остаточные фазовые насыщенности;

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и программы «Университеты России».

$\lambda = \sum_{i=1}^{3}\alpha_i\lambda_i(\rho_i c_{pi})^{-1}$, $\alpha_i = m_0 s_i$, $i = 1, 2$ и $\alpha_3 = 1 - m_0$ — объемные концентрации жидкостей и пористой среды, $\lambda_i = \lambda_i(\theta)$ и $c_{pi} = \text{const}$ ($i = 1, 2, 3$) — фазовые коэффициенты теплопроводности и теплоемкости; $p_c(\xi, s, \theta)$ — капиллярное давление; τ — время; $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ — вектор пространственных координат.

В случае одномерной фильтрации двухфазной жидкости в однородной пористой среде в плоскости, ортогональной вектору $\boldsymbol{g}$ ускорения силы тяжести (плановая фильтрация), уравнения МЛТ-модели принимают вид

$$\boldsymbol{u}_\tau = (A\boldsymbol{u}_\xi - \boldsymbol{B}q)_\xi, \qquad \boldsymbol{u} = (s, \theta). \tag{1}$$

Здесь $q = v(\tau + 1)^{-1/2}$ — заданный расход смеси ($v = \text{const}$), $A = A(\boldsymbol{u}) = \{a_{ij}\}$ — квадратная матрица, $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}) = (b(\boldsymbol{u}), \theta)$; $a_{1i} = a(s)\alpha_{1i}$, $a(s) = Kk_1k_2$ ($K = \text{const}$), $\alpha_{11} = \nu(\boldsymbol{u})|p_{cs}|$, $\alpha_{21} = \nu|p_{c\theta}|$, $b = k_1\mu_2\nu$, $\nu^{-1} = (\mu_2 k_1 + \mu_1 k_2)m$, $m = m_0(1 - s_1^0 - s_2^0)$, $a_{12} = 0$, $a_{22} = \lambda$.

Используются стандартные обозначения банаховых пространств непрерывных по Гёльдеру функций $f(x) \in C^\alpha(\Omega)$, $\alpha > 0$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ с нормой $\|f\|^{(\alpha)} = \max\limits_{(x,y)\in\Omega}(|f(x)| + |f(x) - f(y)||x - y|^{-\alpha})$, непрерывно дифференцируемых $f(x) \in C^1(\bar\Omega)$ с нормой $\|f\|^{(1)} = \max(|f(x)| + |\nabla f(x)|)$ и соответственно $f(x) \in C^{1+\alpha}(\bar\Omega)$ с нормой $\|f\|^{(1+\alpha)} = \|f\|^{(\alpha)} + \|\nabla f\|^{(\alpha)}$.

Согласно свойствам функциональных параметров МЛТ-модели коэффициенты (1) $(A, \boldsymbol{B}) \in C^\alpha(R)$, $R = [0, 1] \times [\theta_0, \theta_1]$ и удовлетворяют условиям [1]

$$\begin{gathered} M_0^{-1} \leqslant (a^{-1}a_{11}, a_{22}) \leqslant M_0, \qquad (a^{-1}|a_{12}|, a^{-1}|b_\theta|, |b_s|, |a_s|) \leqslant M_0, \\ a_{21} = 0, \qquad 0 < a(s) < 1, \quad s \in (0, 1), \quad a(0) = a(1) = 0. \end{gathered} \tag{2}$$

Пусть фильтрация двухфазной жидкости происходит между двумя скважинами (галереями скважин), расположенными на линиях $\xi = \xi_i$, $i = 0, 1$, причем для определенности линия $\xi = \xi_0 = 0$ соответствует нагнетательной скважине, а $\xi = \xi_1$ — эксплуатационной. На скважинах задается либо расход смачиваемой фазы (воды)

$$-v_1\Big|_{\xi=\xi_k} = (a_{11}s_\xi + a_{12}\theta_\xi - vb)_{\xi=\xi_k} = -(vb)\Big|_{\xi=\xi_k},$$

пропорциональный ее подвижности (правая часть условия), либо ее насыщенность $s\big|_{\xi=\xi_k} = s_k$. Аналогично при $\xi = \xi_k$ задается либо поток тепла $\sigma = \lambda\theta_\xi - v\theta$, либо температура.

Итак, краевые и начальные условия для системы (1) принимают одну из следующих форм:

$$\boldsymbol{u}\Big|_{\xi=\xi_k} = \boldsymbol{u}_k(\tau), \qquad \boldsymbol{u}\Big|_{\tau=0} = \boldsymbol{u}^0(\xi), \quad k = 0, 1; \tag{3}$$

$$(v_1 - vb, \sigma - \sigma_k)\Big|_{\xi=\xi_k} = 0, \qquad \boldsymbol{u}\Big|_{\tau=0} = \boldsymbol{u}^0(\xi), \quad k = 0, 1. \tag{4}$$

2. Автомодельные переменные. Регуляризация. Переменные $t = \ln(1 + \tau)$ и $x = \xi(\tau + 1)^{-1/2}$, называемые автомодельными, позволяют представить систему (1) в виде

$$\boldsymbol{u}_t = (A\boldsymbol{u}_x - \boldsymbol{B}v)_x + \frac{1}{2}x\boldsymbol{u}_x \equiv L\boldsymbol{u}. \tag{5}$$

Определение 1. *Автомодельными решениями* задачи (1), (3) (параболического типа) назовем стационарные ($\boldsymbol{u}_t = 0$) решения соответствующей краевой задачи для уравнения (5)

$$L\boldsymbol{u} \equiv (A\boldsymbol{u}_x - \boldsymbol{B}v)_x + \frac{1}{2}x\boldsymbol{u}_x = 0, \qquad \boldsymbol{u}\Big|_{x=x_k} = \boldsymbol{u}_k, \quad k = 0, 1, \tag{6}$$

где $x \in \Omega = \{x | 0 = x_0 < x < x_1 \leqslant \infty\}$.

Автомодельные решения (6) позволяют, в частности, осуществлять численную реализацию решений исходных уравнений (1).

Ввиду однородности уравнения (6) для θ относительно производных линейной подстановкой $\theta = \gamma_1 T + \gamma_0$, $\gamma_i = \mathrm{const}$ можно привести граничные условия (6) к виду $T(x_0) = 1$, $T(x_1) = 0$. Поэтому без нарушения общности положим в (6) $\theta_0 = 1$, $\theta_1 = 0$, $s_k \in [0,1]$.

Не меняя обозначений, положим в (6) $a_{11} = a_\varepsilon \alpha_{11}$, $a_\varepsilon = a(s) + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Продолжим A и $\boldsymbol{B}$ вне промежутков $s \in [0,1]$ и $\theta \in [0,1]$ их крайними значениями и произведем стекловское усреднение коэффициентов α_{11}, α_{12} и $a_{22} = \lambda$ матрицы A: $\alpha_{11}(h)$, $\alpha_{12}(h)$, $\lambda(h)$, где $h \to 0$ есть параметр усреднения.

Наряду с формой (6), регуляризованной описанным способом задачи, рассмотрим ее эквивалентное представление

$$a_2 u_{xx} + a_1 u_x + af = 0, \qquad \lambda\theta_{xx} + \lambda_1 \theta_x = 0, \qquad \boldsymbol{v}(x_k) = \boldsymbol{v}_k, \qquad k = 0, 1. \tag{7}$$

Здесь $\boldsymbol{v} = (u, \theta)$; $u = \int\limits_0^s a_\varepsilon(t)\,dt$; $a_2 = \alpha_{11}(h)$; $a_1 = \alpha_{11x}(h) + a_s a_\varepsilon^{-1} \alpha_{12}(h)\bar{\theta}_x - b_s a_\varepsilon^{-1} v + 0{,}5 x a_\varepsilon^{-1}$; $f = \alpha_{12x}(h)\bar{\theta}_x - \alpha_{12}(h)\lambda_1 \lambda^{-1}\theta_x - b_\theta a^{-1} v\theta_x$; $\lambda_1 = \lambda_x - v + 0{,}5x$; $\lambda = a_{22}(h)$; $\bar{\theta}_x$ — срезка θ_x: $\bar{\theta}_x = \theta_x$ при $|\theta_x| \leqslant M_1$, $|\bar{\theta}_x| = M_1$ при $|\theta_x| > M_1$, $M_1 = \mathrm{const} > 0$ фиксируется ниже. При такой регуляризации коэффициенты системы (7) ограничены: $(|a_2|, a_1, \lambda, |\lambda_1|, |f|) \leqslant M(M, h)$.

3. Разрешимость регуляризованной задачи

Лемма 1 (об оценках). *Для решений $\boldsymbol{v} = (u, \theta)$ задачи (7) имеют место следующие оценки:*

$$0 \leqslant \theta(x) \leqslant 1, \qquad |\theta_x| \leqslant M_1 e^{-\alpha x^2}; \tag{8}$$

$$0 \leqslant u(x) \leqslant u_0, \qquad \alpha_0 a |s_x| \leqslant |u_x| \leqslant M_2(x_1) \tag{9}$$

с постоянными M_1, M_2, не зависящими от ε и h.

Доказательство первой оценки (8) начнем с введения новой функции $\omega(x)$: $\theta = (\gamma - e^{-\beta x})\omega(x) \equiv \alpha\omega$, удовлетворяющей уравнению

$$L_0 \omega = \alpha\lambda\omega_{xx} + (\lambda_1 \alpha + 2\beta\lambda e^{-\beta x})\omega_x - \beta e^{-\beta x}(\lambda\beta - \lambda_1)\omega = 0.$$

Выберем $\beta > 0$ настолько большим, чтобы $(\lambda\beta - \lambda_1) > 0$, $x \in \Omega \equiv [0, x_1]$, и зафиксируем $\gamma > 1$, чтобы $\alpha = \gamma - e^{-\beta x} > 0$, $x \in \Omega$. Пусть в некоторой точке $x_2 \in \Omega$ достигается отрицательный минимум $\omega(x)$, $\omega(x_2) < 0$. Тогда $\omega_x(x_2) = 0$, $\omega_{xx}(x_2) \geqslant 0$ и $L_0\omega(x_2) \geqslant \beta e^{-\beta x_2}(\lambda\beta - \lambda_1)|\omega(x_2)| > 0$, что противоречит равенству $L_0\omega = 0$. Следовательно, $\omega(x) \geqslant 0$ и тем самым $\theta(x) \geqslant 0$, $x \in \Omega$. Аналогично устанавливается неравенство $\bar{\theta} \equiv 1 - \theta \geqslant 0$.

Запишем граничную задачу (6) для функции $\theta(x)$ в виде

$$(\lambda\theta_x)_x + \lambda_0(\lambda\theta_x) = 0, \qquad \theta(x_0) = 1, \qquad \theta(x_1) = 0,$$

где $\lambda_0 = (0{,}5x - v)\lambda^{-1}$. Считая $\lambda(x) \equiv \lambda[s(x), \theta(x), h]$ и $\lambda_0(x) = \lambda_0[s(x), \theta(x), h]$ заданными функциями, приходим к следующему представлению решений последней задачи:

$$1 - \theta = NF(x), \qquad F = \int\limits_0^x \lambda^{-1}(t) e^{-\Lambda(t)}\,dt, \qquad \Lambda = \int\limits_0^x \lambda_0(t)\,dt, \tag{10}$$

где $N = [F(x_1)]^{-1}$.

Чтобы включить в рассмотрение случай $x_1 = \infty$, характерный для задач механики в автомодельных переменных, отметим вытекающие из (10) неравенства

$$\gamma_0^{-1} e^{-\alpha x^2} \leqslant \frac{dF}{dx} \leqslant \gamma_0 e^{-\alpha x^2}, \qquad \gamma_0 = \max(\lambda, \lambda^{-1}),$$

из которых и следует вторая оценка (8) для θ_x.

Первая оценка (9) получается аналогично (8) для $\theta(x)$ с помощью замены

$$u(x) = (\gamma - \mathrm{e}^{-\beta x})w(x) \equiv \alpha w, \qquad \gamma > 1, \qquad a_{11}\beta - a_1 > 0,$$

приводящей (7) к следующему уравнению для $w(x)$:

$$L_1 w \equiv a_2 w_{xx} + a_3 w_x - cw + af = 0, \qquad x \in \Omega = (0, x_1) \quad (c > 0).$$

Пусть в некоторой точке $x_2 \in \Omega$ достигается отрицательный минимум функции $w(x)$, т. е. $w(x_2) < 0$. Поскольку в силу регуляризации $a(s) = 0$ при $s \notin [0,1]$ $(u(x_2) = \alpha(x_2)w(x_2) < 0)$, то $L_1 w(x_2) \geqslant c|w(x_2)| > 0$, что противоречит выполнению уравнения $L_1 w(x_2) = 0, x_2 \in \Omega$ и, следовательно, $u(x) = \alpha w \geqslant 0$, $x \in \bar{\Omega}$. Аналогично введением функции $z = (u_0 - u)(\gamma - \mathrm{e}^{-\beta x})^{-1}$ устанавливается и верхняя оценка $u(x) \leqslant u_0$. Полученная оценка $|\theta_x|$ позволяет снять срезку $\bar{\theta}_x$ в коэффициентах a_1, f и записать задачу (7) для $u(x) = \int\limits_0^s a_\varepsilon(t)\,dt$ в виде

$$(a_2 u_x + \varphi)_x = 0, \qquad u(0) = u_0, \qquad u(x_1) = u_1.$$

Интегрированием этой задачи получим

$$-a_2 u_x = \varphi + C, \qquad u(0) = u_0 \qquad (C = \mathrm{const}). \tag{11}$$

Здесь $\varphi = 0{,}5\Big[xs + \int\limits_x^{x_1} s(t)\,dt\Big] + a_{12}\theta_x - vb$, $u_0 = \int\limits_0^1 a_\varepsilon(t)\,dt$, $C = C_0^{-1}\Big[u_0 - u_1 - \int\limits_0^{x_1} a_2^{-1}(t)\varphi(t)\,dt\Big]$, $C_0 = \int\limits_0^{x_1} a_2^{-1}(t)\,dt$.

Из представления (11) очевидным образом следует вторая оценка (9). Лемма 1 доказана.

Замечание 1. Непосредственно из уравнений (7) (уравнение для $u(x)$ умножается на $a_\varepsilon(s)$) получаются следующие оценки:

$$a|(as_x)_x| \leqslant M_2(x_1), \qquad |(\lambda\theta_x)_x| \leqslant M_1 \mathrm{e}^{-\alpha x^2}.$$

Лемма 2 (о гёльдеровской непрерывности). *Пусть*

$$a(s) \geqslant a_0 s^{\alpha_0}(1-s)^{\alpha_1}, \qquad a_0 = \mathrm{const} > 0 \qquad (\alpha_0, \alpha_1 \geqslant 0). \tag{12}$$

Тогда для решений $\boldsymbol{u}(x) = (s, \theta)$ *задачи* (6) *выполняются неравенства*

$$(\|s\|^{(\beta)}, \|a_\varepsilon s_x\|^{(\beta)}, \|\theta_x\|^{(\beta)}) \leqslant M_3(x_1), \qquad \beta = (1+\alpha)^{-1}, \qquad \alpha = \max(\alpha_0, \alpha_1). \tag{13}$$

Доказательство. Установим прежде всего гёльдеровскую непрерывность преобразования $s = s(u)$, обратного к $u = \int\limits_0^s a_\varepsilon(t)\,dt$ $(a_\varepsilon = a + \varepsilon \geqslant a)$:

$$|s(u_2) - s(u_1)| \leqslant K|u_2 - u_1|^\beta, \qquad (u_1, u_2) \in [0, p], \qquad p = \int\limits_0^1 a_\varepsilon(t)\,dt.$$

Очевидно, для этого достаточно, чтобы $|u(s_2) - u(s_1)| \geqslant K_0|s_2 - s_1|^{1+\alpha}$ при $(s_1, s_2) \in [0{,}3/4] \cup [1/4{,}1]$.

Пусть для определенности $0 \leqslant s_1 \leqslant s_2 \leqslant 3/4$. Тогда $u_2 - u_1 = \int\limits_{s_1}^{s_2} a_\varepsilon(s)\,ds \geqslant K_0 \int\limits_{s_1}^{s_2} s^\alpha(1-s)^\alpha\,ds \geqslant K(s_2^{\alpha+1} - s_1^{\alpha+1}) \geqslant K(s_2 - s_1)^{\alpha+1}$, $K = K_0 4^{-\alpha}(1+\alpha)^{-1}$. Последнее из цепочки неравенств следует из рассмотрения функции $f(\sigma) = (1-\sigma^\gamma)(1-\sigma)^{-\gamma}$, $\gamma = 1+\alpha$, $\sigma = s_1/s_2$, для которой $\min f(\sigma) = f(0) = 1 (f_\sigma > 0,\ 0 < \sigma < 1)$.

Итак, доказано, что $s(u) \in C^\beta[0,p]$. Поскольку $|u_x| \leqslant M_2$, то $s[u(x)] \in C^\beta[0,x_1]$. Теперь из представлений (10), (11), в которых коэффициенты $\lambda(x) \equiv \lambda[s(x),\theta(x)]$, $a_2(x)$ и др. непрерывны по Гёльдеру, следуют неравенства (13). Лемма доказана.

Лемма 3 (о разрешимости регуляризованной задачи). *Пусть* $(A,\boldsymbol{B}) \in C^\alpha(R)$, $R = (0,1)\times(0,1)$ *и выполнено* (2). *Тогда регуляризованная задача* (6) $\forall(\varepsilon,h) > 0$ *имеет по крайней мере одно классическое решение* $\boldsymbol{u} = (s,\theta)$, *для которого справедливы оценки* (8), (9). *При дополнительном условии* (12) $u(x)$ *удовлетворяет неравенствам* (13).

Доказательство. Запишем задачу (6) для $\boldsymbol{u} = (s,\theta)$ в эквивалентной форме

$$\frac{d^2\boldsymbol{u}}{dx^2} = \boldsymbol{F}(x,\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_x), \qquad \boldsymbol{u}(x_k) = \boldsymbol{u}_k, \qquad k = 0,\,1.$$

В силу регуляризации коэффициентов (6), оценок (8), (9) и их следствия $|s_x| \leqslant a_\varepsilon^{-1}|u_x| \leqslant M_4(x_1,\varepsilon)$ имеем $|\boldsymbol{F}| \leqslant M_5(x_1,\varepsilon)$ при $(s,\theta) \in [0,1]$ и $(s_x,\theta_x) \in (-\infty,\infty)$ $\forall(\varepsilon,h) > 0$. Разрешимость полученной выше задачи, а также задачи (6) следует из теоремы Бирхгофа — Келлога [6, с. 498]. Лемма доказана.

4. Обобщенные решения. Определение 2. *Обобщенным решением* задачи (6) назовем вектор $\boldsymbol{u} \in C^\alpha(\Omega)$, $\alpha > 0$, удовлетворяющий граничным условиям, неравенствам (8), (9), (13) и следующему интегральному тождеству:

$$\int\limits_0^{x_1} \Big[(A\boldsymbol{u}_x - \boldsymbol{B}v)\eta_x + \frac{1}{2}(x\eta)_x\boldsymbol{u}\Big]\,dx = 0 \tag{14}$$

$\forall\eta \in C^1(\bar\Omega)$, $\eta(0) = \eta(x_1) = 0$.

Замечание 2. В силу (8), (9), (13) имеем $(u,\theta) \equiv \boldsymbol{v} \in C^{1+\alpha}(\bar\Omega)$, $\alpha > 0$, $u = \int\limits_0^s a_\varepsilon(t)\,dt$, и поэтому построение обобщенного решения задачи (6) эквивалентно решению следующей задачи Коши:

$$-a_2u_x = \varphi + C, \qquad -\lambda\theta_x = \psi + K, \qquad \boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{v}_0. \tag{15}$$

Здесь функция φ и постоянная C определены в (11), $\psi = 0{,}5\Big(x\theta + \int\limits_x^{x_1}\theta(t)\,dt\Big) - v\theta$, $K = K_0^{-1}\Big(1 - \int\limits_0^{x_1}\psi(t)\lambda^{-1}(t)\,dt\Big)$, $K_0 = \int\limits_0^{x_1}\lambda^{-1}(t)\,dt$.

Теорема 1 (существования). *Пусть* $(A,\boldsymbol{B}) \in C^\alpha(\bar R)$, $\alpha > 0$, $R = (0,1)\times(0,1)$ *и выполняются* (2), (12). *Тогда существует по крайней мере одно обобщенное решение задачи* (6).

Доказательство. Выделим из последовательности $\{u(x,\varepsilon,h),\theta(x,\varepsilon,h)\} \in C^{1+\alpha}(\bar\Omega)$, $u = \int\limits_0^s a_\varepsilon(t)\,dt$ подпоследовательность $\{u(x,\varepsilon_k,h_k),\theta(x,\varepsilon_k,h_k)\}$, сходящуюся в $C^{1+\alpha_0}(\bar\Omega)$,

$0 < \alpha_0 < \alpha$ при $(\varepsilon_k, h_k) \to 0$. Переходя к пределу в интегральном тождестве (14) при $(\varepsilon_k, h_k) \to 0$, найдем обобщенное решение $\{u(x), \theta(x)\}$ задачи (5).

Теорема 2 (о конечной скорости). *Пусть дополнительно к условиям теоремы* 1 *выполняются неравенства*

$$(a(s), b(s,\theta)) \leqslant Ms^\gamma, \quad \gamma \geqslant 1 \quad \{\text{или}\,(a, |b - b(1,0)|) \leqslant M(1-s)^\gamma\}. \tag{16}$$

Тогда при $s(x_1) = 0$ $\{$*или* $s(x_1) = 1\}$, $x_1 \gg 1$ *существует такое значение* $x_* < \infty$, *что*

$$s(x) \equiv 0 \quad \{\text{или}\ s(x) \equiv 1\} \quad \text{при}\ x \geqslant x_*, \tag{17}$$

т. е. фронт $s = 0$ $(s = 1)$ *распространяется с конечной скоростью.*

Доказательство. Положим

$$x_* = (X^2 + M_0\delta^{-1})^{1/2}, \qquad X = 2\max(|a_{12}|s^{-1}M_1,\ |v|b_*s^{-1}), \tag{18}$$

где $M_0 = \int\limits_0^1 a(t)t^{-1}\,dt$; $\delta = (1/8)\min\alpha_{11}$; $M_1 = \max|\Theta_x|$; $b_* = b$ при $s(x_1) = 0$ и $b_* = |b - b(1,0)|$ при $s(x_1) = 1$.

Рассмотрим представление (11), (15) для $u(x)$. Поскольку $u(x_1) = 0$ и в окрестности $x = x_1$ имеем $u \geqslant 0$, то, очевидно, $u_x(x_1) \leqslant 0$ и, следовательно, $c = -a_2(0,0)u_x(x_1) \geqslant 0$. Тогда $-a_2u_x = \varphi + c \geqslant 0{,}5xs - |a_{12}||\theta_x| - |v|b \geqslant xs/4$ при $x \geqslant X$, где X определено в (18). Итак, приходим к неравенству

$$[u(s)]_x + 2\delta xs \leqslant 0, \quad \delta = (1/8)\min\alpha_{11},$$

равносильному следующему:

$$[\Phi(s)]_x + 2\delta x \leqslant 0, \qquad x \in [X, x_1], \qquad s(X) = s_2 \geqslant 0, \tag{19}$$

где $\Phi(s) = \int\limits_0^s a(t)t^{-1}\,dt$. Из (19) следует, что $\Phi_x < 0$ при $x \geqslant X$, а $\Phi_s \geqslant 0$, $s \in [0,1]$, поэтому $s(x) \leqslant s(y)$ при $x \geqslant y$. Интегрируя (19), находим

$$-\int\limits_s^{s_2} a(t)t^{-1}\,dt + \delta(x^2 - X^2) \leqslant 0, \qquad x \geqslant X.$$

Так как

$$\Phi(s) - \Phi(s_1) = -\int\limits_s^{s_2} a(t)t^{-1}\,dt \geqslant -\int\limits_0^1 a(t)t^{-1}\,dt \equiv -M_0,$$

то из предыдущего неравенства следует $\delta(x^2 - X^2) - M_0 \leqslant 0$, $x \geqslant X$, что возможно только при $X \leqslant x \leqslant x_* \equiv (X^2 + M_0\delta^{-1})^{1/2}$.

При $x > x_*$ для справедливости (19) необходимо выполнение соотношения (17).

Если решается задача $s(0) = s_0 \geqslant 0$, $s(x_1) = 1$, то, производя замену $\sigma = 1 - s$ и полагая $b_* = |b(s,\theta) - b(1,0)|$, приходим к рассмотренному случаю $\sigma(x_1) = 0$, откуда и следует тождество $\sigma = 1 - s \equiv 0$ при $x \geqslant x_*$. Теорема доказана.

Замечание 3. Пусть для системы (6) решается краевая задача на промежутке $[-x_0, x_1]$, $(x_0, x_1) \gg 1$, причем $s(-x_0) = 1$, $s(x_1) = 0$. Тогда согласно теореме 2 имеем решение типа вала: $s(x) \equiv 1$ при $x \leqslant -x_*$, $s(x) \equiv 0$ при $x \geqslant x_*$.

Замечание 4. В силу оценок (8) для $\theta(x)$ и доказанной конечной скорости для $s(x)$ (соотношения (17)) очевидно следует существование обобщенного решения задачи (6) при $x_1 = \infty$.

5. Смешанная краевая задача. Для системы уравнений (6) рассмотрим следующую краевую задачу типа (4):

$$(A\boldsymbol{u}_x - v\boldsymbol{B})(x_0) = \boldsymbol{Q}, \qquad \boldsymbol{u}(x_1) = \boldsymbol{u}_1, \qquad v \geqslant 0. \tag{20}$$

Здесь $x_0 = 0, l$; $x_1 = l, 0$, $l > 0$ конечное или $l = \infty$; вектор $\boldsymbol{Q} = (-Q, q)$ задан (Q — расход смачивающей фазы, q — поток тепла).

Изучим случаи физически реализуемых условий на параметры краевой задачи (20). При этом для решений задачи (6), (20) (системы (6) и граничных данных (20)) справедливы теоремы 1, 2, доказанные для первой краевой задачи (6).

Рассмотрим сначала случай $x_0 = 0$, $x_1 = l \gg 1$. Интегрируя (20) для $\theta(x)$, находим

$$\lambda\theta_x = N\mathrm{e}^{-\Lambda(x)}, \qquad \Lambda = \int\limits_0^x \lambda^{-1}(t)(t/2 - v)\,dt, \tag{21}$$

где N — искомая постоянная. Из (21) следует неравенство $|\Lambda|x^{-2} \leqslant M_0$, $x \geqslant 1$. Подставляя (21) в (20), получим

$$(\lambda\theta_x - v\theta)(0) = N + Nv\int\limits_0^l \lambda^{-1}(t)\mathrm{e}^{-\Lambda(t)}\,dt - v\theta_1 = q,$$

откуда $N = (q + v\theta_1)\Big(1 + v\int\limits_0^l \lambda^{-1}\mathrm{e}^{-\Lambda}\,dt\Big)^{-1}$, $0 < \delta_0 \leqslant N \leqslant \delta_0^{-1}$. Тогда

$$\theta(0) = \theta_1 - N\int\limits_0^l \lambda^{-1}\mathrm{e}^{-\Lambda}\,dt \geqslant \theta_1 - (q + v\theta_1)v \equiv \theta_*,$$

т. е. $\theta_* < \theta^* = \theta_1 = \theta(l)$. Считая формально θ_* заданным, приходим к изученному случаю первой краевой задачи (6) и по лемме 1 находим

$$\theta_* \leqslant \theta(x) \leqslant \theta_1 \equiv \theta^*, \qquad |\theta_x| \leqslant M_1\mathrm{e}^{-\alpha x^2}. \tag{22}$$

В силу независимости оценок (22) от l можно полагать $l = \infty$.

Перейдем к изучению задачи (6), (20) для водонасыщенности $s = s(x)$. Если на скважине, соответствующей точке $x = 0$, расход жидкости пропорционален ее подвижности ($Q = vb\big|_{x=0}$), а $s(x_1) = s_1 = 0$, то с учетом равенства $b\big|_{s=0} = 0$ находим, что $s \equiv 0$ является решением задачи (6), (20). Если $s(x_1) = 1$, произведем замену $\sigma = 1 - s$, тогда, как и выше, $\sigma \equiv 0$ является решением преобразованной задачи (6), (20).

Итак, при $Q = vb\big|_{x=0}$ имеет смысл изучать задачу (6), (20) только при условии $s(x_1) \neq 0, 1$.

Рассмотрим задачу (20) для регуляризованного уравнения (7) относительно $u = \int\limits_0^s a_\varepsilon(t)\,dt$. Коэффициенты этого уравнения ограничены и $af\big|_{u=0,u_1} = 0$, $u_1 = \int\limits_0^1 a_\varepsilon(t)\,dt$. Тем самым выполняются условия леммы 1, согласно которой $0 \leqslant u(x) \leqslant u_1$, $|u_x| \leqslant M_2(x_1)$, а эти оценки обеспечивают разрешимость задачи (7), (20) (лемма 3 и теорема 1) при $x_1 < \infty$. При выполнении дополнительных условий (16), очевидно, справедлива и теорема 2 о конечной скорости, тем самым задача (6), (20) разрешима и при $x_1 = \infty$.

Рассмотрим теперь случай, когда в (20) $x_0 = l \to \infty$, $x_1 = 0$. Для определения функции $\theta(x)$ это обстоятельство не вносит дополнительных трудностей по сравнению с вариантом $x_0 = 0$, $x_1 \to \infty$.

Предположим, что существует $u_\infty = \lim\limits_{x\to\infty} u(x)$, причем $(|u'|, |u''|) \leqslant M$, $x \in [0, \infty)$. Тогда $u'(x) \to 0$ при $x \to \infty$ [7, с. 200].

Поскольку в силу (22) $\theta_x \to 0$ при $x \to \infty$, то условия (20) в точке $x_0 = \infty$ принимают вид

$$\theta_\infty = -qv^{-1}, \qquad b(s_\infty, \theta_\infty) = Qv^{-1}. \tag{23}$$

В силу однозначности $b(s,\theta)$ по s ($b_s \neq 0$, $s \neq 0,1$) из соотношений (23) однозначно определяются значения s_∞ и θ_∞.

В частности, при $\theta = v$ $s_\infty = 1$, при $v = 0$ $s_\infty = 0$, а θ_∞ не определено. Таким образом, задача (6), (20) при $x_0 = \infty$, $x_1 = 0$ эквивалентна изученной ранее $(s,\theta)(0) = (s_1, \theta_1)$, $(s,\theta)(\infty) = (s_\infty, \theta_\infty)$, где s_∞ и θ_∞ определяются однозначно из (23).

Замечание 5. Если расход жидкости на скважине $x_0 = \infty$ пропорционален подвижностям фаз, т. е. $Q = vb|_{x=\infty}$, то условия (23) не определяют значения s_∞.

6. Численная реализация. В [8] изложены алгоритмические основы разработанного авторами проекта «Новые компьютерные технологии в нефтедобыче». Одним из центральных модулей проекта является программа численного расчета автомодельных решений МЛТ-модели и решений на их основе нестационарной задачи (5) в автомодельных переменных.

Известно, что автомодельные переменные $t = \ln(1+\tau)$, $x = \xi(1+\tau)^{-1/2}$ хорошо описывают перемещение водонефтяного контакта, динамику зон влияния скважины и т. д. В то же время на основе автомодельных решений двухфазной фильтрации до сих пор оценивается динамика основных промысловых характеристик нефтедобычи, поэтому проблема численного построения автомодельных решений МЛТ-модели приобретает важное прикладное значение. Однако численная реализация автомодельных решений затруднена несколькими обстоятельствами:

1) бесконечностью промежутка интегрирования ($x \in [0, \infty)$);

2) неэволюционным характером граничных условий (6), (20);

3) вырождением уравнения (6) для $s(x)$ ($a_{11}\Big|_{s=0,\,1} = 0$)

и другими.

Данные особенности задачи (6) учтены при разработке численных алгоритмов.

1. Чтобы найти решение задачи (6) на конечном промежутке, использованы сделанные автором теоретические оценки (18) фронта $x = x_*$ распространения возмущения для $s(x)$ и оценки (8) скорости сходимости $\theta(x)$ при $x \to \infty$. При этом фиксировалась длина промежутка интегрирования $l < \infty$.

2. Для приведения задачи (6) к эволюционной применялась следующая итерация граничных условий данными Коши:

$$\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0, \quad \boldsymbol{u}'(0) = -(\operatorname{tg}\alpha_1^{(n)}, \operatorname{tg}\alpha_2^{(n)}), \quad \alpha_i \in (0, \pi/2).$$

Процесс итерации начинался с произвольного значения $(\alpha_1^{(0)}, \alpha_2^{(0)})$. В соответствии с этим найденное значение $s^{(0)}(l)$ или $\theta^{(0)}(l)$ больше или меньше нуля, в качестве $\alpha_k^{(1)}$ выбиралось $\alpha_k^{(1)} = 2\alpha_k^{(0)}$ или $\alpha_k^{(1)} = \alpha_k^{(0)}/2$. Сходимость такого процесса в изотермическом случае ($\theta \equiv \text{const}$) установлена А. В. Кажиховым [5].

3. Алгоритм приведения уравнения (6) для $s(x)$ к невырожденному заключался не только в его регуляризации — замене $a_{11} = a\alpha_{11}$ на $\bar{a}_{11} = a_\varepsilon \alpha_{11}$, $a_\varepsilon = a + \varepsilon$, но и в дополнительных расчетах функции $u(x) = \int\limits_0^s a_\varepsilon(t)\,dt$ и последующем восстановлении $s(x)$.

Проводился сравнительный анализ нескольких разностных схем решения задачи (6), моделирующей процесс вытеснения нефти горячей водой.

Численно установлено, что прогрев пласта существенно увеличивает степень его промывки. Предложенные алгоритмы решения задачи (6) позволяют, в частности, оперативно оценивать эффективность тепловых методов вторичной разработки нефтяных месторождений.

Данные подходы реализованы в [9].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бочаров О. Б., Монахов В. Н.** Краевые задачи неизотермической двухфазной фильтрации в пористых средах // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1988. Вып. 86. С. 47–59.
2. **Бочаров О. Б., Монахов В. Н.** Неизотермическая фильтрация несмешивающихся жидкостей с переменными остаточными насыщенностями // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1988. Вып. 88. С. 3–12.
3. **Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н.** Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1983.
4. **Хуснутдинова Н. В.** О поведении решений задачи Стефана при неограниченном возрастании времени // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1969. Вып. 2. С. 168–178.
5. **Кажихов А. В.** Некоторые автомодельные задачи нестационарной фильтрации и их численное решение // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1969. Вып. 3. С. 33–49.
6. **Хартман Ф.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
7. **Ильин А. М., Олейник О. А.** Асимптотическое поведение решений задачи Коши для некоторых квазилинейных уравнений при больших значениях времени // Мат. сб. 1960. Т. 51, вып. 2. С. 191–216.
8. **Жумагулов Б. Т., Зубов Н. В., Монахов В. Н., Смагулов Ш. С.** Новые компьютерные технологии в нефтедобыче. Алма-Ата: Наука (Гылым), 1996.
9. **Бочаров О. Б., Монахов В. Н., Осокин А. Е.** Численно-аналитические методы исследования задач тепловой двухфазной фильтрации // Математические модели фильтрации и их приложения: Сб. науч. тр., 1999. С. 46–59.

Поступила в редакцию 27/VIII 1998 г.