

УДК 532.51

УСТОЙЧИВОСТЬ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНОВЫЕ РЕЖИМЫ ПРИ СТЕКАНИИ ПЛЕНОК ПО ГОФРИРОВАННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Ю. Я. Трифонов

Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: trifonov@itp.nsc.ru

Проведен теоретический анализ линейной и нелинейной устойчивостей стекания вязких пленок по волнистой стенке по отношению к возмущениям свободной поверхности. Исследования выполнены с использованием интегрального подхода в диапазонах параметров, где результаты расчетов и соответствующие решения уравнений Навье — Стокса (волновое стекание вдоль гладкой стенки и безволновое течение вдоль гофрированной поверхности) хорошо согласуются. Показано, что при небольших числах Рейнольдса существует диапазон параметров гофрирования (амплитуда и период), в котором все линейные возмущения свободной поверхности затухают. При больших числах Рейнольдса безволновое стекание неустойчиво. Определены различные нелинейные волновые режимы при изменении амплитуды гофрирования.

Ключевые слова: вязкое течение пленок, волнистые поверхности, устойчивость, нелинейные волновые режимы.

1. ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Теоретические исследования пленочных течений начаты в работе [1], в которой получено точное решение уравнений Навье — Стокса в случае свободного стекания тонкого слоя вязкой жидкости по гладкой вертикальной стенке:

$$U_0(y) = \frac{3\nu \text{Re}}{H_0} \left(\frac{y}{H_0} - \frac{y^2}{2H_0^2} \right), \quad H_0 = \left(\frac{3\nu^2 \text{Re}}{g} \right)^{1/3}.$$

Здесь $U_0(y)$ — профиль скорости в пленке в направлении силы тяжести g ; ν — кинематическая вязкость; H_0 — толщина слоя жидкости при заданной плотности орошения $q_0 = \nu \text{Re}$; Re — число Рейнольдса.

Дальнейшие теоретические и экспериментальные исследования показали, что решение Нуссельта практически не реализуется и, как правило, поверхность пленки покрыта волнами. Большое количество работ посвящено как линейному, так и нелинейному анализу процесса волнообразования при стекании пленки вдоль гладкой поверхности [2–7]. Задача о нелинейных волнах на пленке, стекающей по гладкой пластине, близка к задаче о стационарном течении вязкого слоя вдоль гофрированной поверхности [8–15]. В обоих случаях уравнения существенно нелинейны, форма свободной поверхности заранее неизвестна, большую роль играют силы поверхностного натяжения и имеется пространственный период. Несмотря на многочисленные приложения этой задачи в процессах дистилляции

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного фонда INTAS (код проекта 99-1107), Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05-08-01238) и Фонда содействия отечественной науке.

и современном теплообменном оборудовании [16], исследованию непосредственно течения пленки вдоль гофрированной поверхности посвящено небольшое число экспериментальных [8, 17] и теоретических [9–15] работ. Так, с использованием метода возмущений исследовано пленочное течение вдоль синусоидальной поверхности с амплитудой гофрирования, малой по сравнению с нуссельтовской толщиной пленки [9]. В работе [10] данный подход обобщен на случай двухслойного пленочного течения вдоль слабоволнистой поверхности. С использованием метода граничных элементов в [11] рассмотрено ползущее течение вдоль наклонной изогнутой поверхности в пренебрежении инерционными силами. Применяя асимптотический подход, авторы работы [12] исследовали стекание пленки по поверхности с амплитудой гофрирования, значительно превышающей нуссельтовскую толщину пленки H_0 . В [13] при рассмотрении гофрирования в линейном приближении изучены резонансные эффекты в области конечных чисел Рейнольдса. В [14] на основе численного решения уравнений Навье — Стокса исследовано пленочное течение в области конечных чисел Рейнольдса при амплитуде гофрирования, сопоставимой с нуссельтовской толщиной. В [15] исследовано стекание пленок по сложным трехмерным поверхностям с крупным гофрированием (с амплитудой, значительно превышающей нуссельтовскую толщину пленки) и мелкой волнистостью с амплитудой, сопоставимой с H_0 . Во всех перечисленных теоретических работах рассматривалось безволновое стекание пленки вдоль гофрированной поверхности (по сути, аналог решения Нуссельта при стекании пленки вдоль гладкой стенки). Основная цель данной работы — исследование устойчивости пленочного течения вдоль гофрированной поверхности по отношению к возмущениям свободной поверхности и расчет волновых режимов стекания вдоль таких поверхностей.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

2.1. Безволновые решения. Безволновое стекание пленки вдоль одномерной гофрированной поверхности описывается системой уравнений Навье — Стокса с соответствующими граничными условиями, приведенной в [14, 15]. Решения представляются в следующем виде:

$$u(x, \eta) = \frac{1}{2} U_1(x) + \sum_{m=2}^M U_m(x) T_{m-1}(\eta_1), \quad \eta_1 = 2\eta - 1, \quad (2.1)$$

$$U_m(x) = U_m^0 + \sum_{\substack{n=-N/2+1 \\ n \neq 0}}^{N/2-1} U_m^n \exp \frac{2\pi i n x}{L}, \quad (U_m^{-n})^* = U_m^n, \quad m = 1, \dots, M.$$

Здесь $u(x, \eta)$ — компонента вектора скорости в направлении силы тяжести; x — координата вдоль направления силы тяжести; $\eta = (y - f(x))/H(x)$; y — координата в направлении, перпендикулярном направлению силы тяжести; L — период гофрирования; $f(x)$ — форма гофрирования; $H(x) = h(x) - f(x)$ — локальная толщина пленки; $h(x)$ — форма свободной поверхности; $T_m(\eta_1)$ — полиномы Чебышева; знак “*” обозначает комплексное сопряжение.

Задача сводится к системе нелинейных уравнений для определения гармоник U_m^n и решается численно. Поле скорости в направлении y , давление в пленке и форма свободной поверхности однозначно восстанавливаются по гармоникам U_m^n .

При исследовании волновой динамики пленок, стекающих по гладкой поверхности, часто используется интегральный подход (система уравнений Шкадова [2]). При этом рассматриваются длинноволновые возмущения. В работе [14] в предположении, что период гофрирования значительно превышает толщину пленки ($\varepsilon = H_0/L \ll 1$), такой подход

обобщен на случай стекания пленки вдоль волнистой стенки. Основная идея интегрального подхода заключается в использовании автомодельного профиля продольной скорости

$$u(x, y) = \frac{3\nu \text{Re}}{H(x)} \left(\frac{y - f(x)}{H(x)} - \frac{(y - f(x))^2}{2H^2} \right). \quad (2.2)$$

После интегрирования поперек слоя с учетом (2.2) получается следующая система уравнений для исследования динамики пленочного течения по волнистой поверхности [14, 15]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{6}{5} \frac{\partial}{\partial x} \frac{q^2}{H} &= \frac{3}{\varepsilon \text{Re}} \left(H - \frac{q}{H^2} \right) + \varepsilon^2 \text{We} H \left(\frac{\partial^3 H}{\partial x^3} + \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{d^3 f}{dx^3} \right), \\ \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь $q(x, t)$ — мгновенный расход в пленке, обезразмеренный величиной q_0 ; толщина пленки отнесена к H_0 ; в качестве масштаба в направлении x выбран период гофрирования; масштаб времени равен $H_0 L / q_0$; $\text{We} = (3\text{Fi})^{1/3} / \text{Re}^{5/3}$ — число Вебера; $\text{Fi} = (\sigma / \rho)^3 / (g\nu^4)$ — пленочное число; ρ — плотность жидкости; σ — поверхностное натяжение; $\varepsilon_1 = H_0 / A$; A — амплитуда гофрирования. Отметим, что сохранение капиллярного члена в уравнении (2.3) объясняется большим значением пленочного числа Fi , входящего в критерий Вебера, для большинства используемых жидкостей.

Безволновому стеканию вдоль гофрированной поверхности соответствуют стационарные решения системы (2.3): $H = H_b(x)$, $q = 1$. Для численного нахождения таких решений использовались метод Ньютона и фурье-разложение:

$$H(x) = \sum_{n=-N/2+1}^{N/2-1} H_n \exp(2\pi i n x), \quad (H_{-n})^* = H_n.$$

2.2. Устойчивость стационарных решений. Подставляя в уравнения (2.3) $q = 1 + q'$, $H = H_b(x) + H'(x, t)$ и линеаризуя их в окрестности исходных решений, получаем систему уравнений с периодически меняющимися коэффициентами:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q'}{\partial t} + \frac{12}{5} \frac{\partial}{\partial x} \frac{q'}{H_b} - \frac{6}{5} \frac{\partial}{\partial x} \frac{H'}{H_b^2} &= \frac{3}{\varepsilon \text{Re}} \left(H' - \frac{q'}{H_b^2} + \frac{2H'}{H_b^3} \right) + \varepsilon^2 \text{We} H' \frac{d^3 h_0}{dx^3} + \varepsilon^2 \text{We} H_b \frac{d^3 H'}{dx^3}, \\ \frac{\partial H'}{\partial t} + \frac{\partial q'}{\partial x} &= 0, \quad h_0 = H_b(x) + \frac{1}{\varepsilon_1} f(x). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Согласно теореме Флоке решения уравнений (2.4), ограниченные по координате x , представляются в виде

$$\begin{aligned} H' &= \psi(x) \exp(-\gamma t + 2\pi i Q x) + \overline{\psi(x)} \exp(-\bar{\gamma} t - 2\pi i Q x), \\ q' &= \varphi(x) \exp(-\gamma t + 2\pi i Q x) + \overline{\varphi(x)} \exp(-\bar{\gamma} t - 2\pi i Q x), \\ \psi(x) &= \psi(x + 1), \quad \varphi(x) = \varphi(x + 1). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь черта сверху обозначает комплексное сопряжение; Q — вещественный параметр, изменяющийся от нуля до единицы. Подставляя (2.5) в уравнения (2.4), получаем следующую задачу на собственные значения:

$$\begin{aligned} 2\pi i Q \varphi + \frac{d\varphi}{dx} &= \gamma \psi, \\ \left(C_0(x) + C_1(x) \frac{d}{dx} + C_2(x) \frac{d^2}{dx^2} + C_3(x) \frac{d^3}{dx^3} \right) \psi + \left(D_0(x) + D_1(x) \frac{d}{dx} \right) \varphi &= \gamma \varphi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_0(x) &= G_3(x) + 2\pi i Q G_4(x) - (2\pi i Q)^3 G_5(x), & C_1(x) &= G_4(x) - 3(2\pi i Q)^2 G_5(x), \\
C_2(x) &= -3(2\pi i Q) G_5(x), & C_3(x) &= -G_5(x), & D_0(x) &= G_1(x) + (2\pi i Q) G_2(x), \\
D_1(x) &= G_2(x), & G_1(x) &= \frac{12}{5} \frac{d}{dx} \frac{1}{H_b} + \frac{3}{\varepsilon \operatorname{Re} H_b^2}, & G_2(x) &= \frac{12}{5} \frac{1}{H_b}, & G_4(x) &= -\frac{6}{5} \frac{1}{H_b^2}, \\
G_3(x) &= -\frac{6}{5} \frac{d}{dx} \frac{1}{H_b^2} - \frac{3}{\varepsilon \operatorname{Re}} \left(1 + \frac{2}{H_b^3}\right) - \varepsilon^2 \operatorname{We} \frac{d^3 h_0}{dx^3}, & G_5(x) &= \varepsilon^2 \operatorname{We} H_b.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Здесь коэффициенты и собственные функции являются периодическими по координате x :

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \sum_{n=-N/2+1}^{N/2-1} \varphi_n \exp(2\pi i n x), & \psi(x) &= \sum_{n=-N/2+1}^{N/2-1} \psi_n \exp(2\pi i n x), \\
C(x) &= \sum_{n=-N/2+1}^{N/2-1} C_n \exp(2\pi i n x).
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Число гармоник N в (2.7) соответствует числу гармоник в разложении основного решения. Подставляя (2.7) в уравнения (2.6), получаем задачу на определение собственных значений для комплексной матрицы общего вида (размером $2(N-1) \times 2(N-1)$), которая решалась численно. Для исследования устойчивости решения $H_b(x)$ необходимо проанализировать $2(N-1)$ собственных чисел для каждого значения параметра Q в диапазоне $[0, 1]$. Решение устойчиво, если для всех значений $Q \in [0, 1]$ вещественные части всех $2(N-1)$ собственных чисел больше или равны нулю. В этом случае все возмущения свободной поверхности затухают (или не нарастают) во времени.

Следует выделить возмущения (2.5) со значениями параметра $Q = 0$. Такие возмущения имеют тот же период, что и исходное решение. Неустойчивость по отношению к такому классу возмущений означает невозможность реализации безволнового режима стекания по гофрированной поверхности. Режимы, неустойчивые по отношению к возмущениям с конечными Q , могут наблюдаться на некоторых участках до тех пор, пока не разовьются неустойчивые возмущения.

При нулевом значении амплитуды гофрирования ($A = 0$) задача (2.6) переходит в известную задачу об устойчивости решения Нуссельта при стекании пленки вдоль гладкой стенки. В этом случае параметр L не имеет физического смысла (только масштаб) и все возмущения с длиной волны L/Q больше определенной (λ_*) нарастают во времени:

$$\frac{L}{Q} > \lambda_* = 2\pi H_0 \sqrt{\frac{\operatorname{We}}{3}} = 2\pi \left(\frac{3\nu^2}{g}\right)^{1/3} \left(\frac{\operatorname{Fi}}{9}\right)^{1/6} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{Re}}}, \quad Q \in [0, 1]. \tag{2.8}$$

В данной работе расчеты проводились для двух жидкостей: азота на линии насыщения ($\operatorname{Fi} = 1,231 \cdot 10^{11}$, $(3\nu^2/g)^{1/3} = 0,0216$ мм, $\lambda_* = 6,65; 2,71; 2,35$ мм при $\operatorname{Re} = 1, 6, 8$ соответственно) и водоглицериновой смеси [3] ($\operatorname{Fi} = 7,249 \cdot 10^6$, $(3\nu^2/g)^{1/3} = 0,251$ мм, $\lambda_* = 15,225; 8,790; 3,400$ мм при $\operatorname{Re} = 1, 3, 20$ соответственно).

2.3. Волновые режимы стекания пленки по гофрированной поверхности. Из вида возмущений в (2.5) следует, что в общем случае имеется два несоизмеримых периода в направлении x . Первый период соответствует периоду гофрирования стенки L , второй период равен L/Q . При малых значениях Q имеем “длинномодулированные” возмущения. Возмущения с $\operatorname{Real} \gamma = 0$ являются нейтральными. При таких значениях параметров от исходного решения ответвляется волновой режим. Новое решение представляется в виде двойного ряда Фурье:

$$H(\xi, x) = \sum_{n=-N/2+1}^{N/2-1} \sum_{m=-M/2+1}^{M/2-1} H_{nm} \exp(2\pi i n \xi) \exp(2\pi i m x),$$

$$q(\xi, x) = \sum_{n=-N/2+1}^{N/2-1} \sum_{m=-M/2+1}^{M/2-1} q_{nm} \exp(2\pi i n \xi) \exp(2\pi i m x), \quad (2.9)$$

$$(H_{-n,-m})^* = H_{nm}, \quad (q_{-n,-m})^* = q_{nm}, \quad \xi = x - ct.$$

Здесь фазовая скорость c является собственным числом нелинейной задачи. Для расчета ответвляющихся волновых режимов имеем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} -Qc \frac{\partial q}{\partial \xi} + \frac{6}{5} \frac{\partial}{\partial x} \frac{q^2}{H} + \frac{6}{5} Q \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{q^2}{H} = \frac{3}{\varepsilon \text{Re}} \left(H - \frac{q}{H^2} \right) + \varepsilon^2 \text{We} H \left(\frac{\partial^3 H}{\partial x^3} + 3Q \frac{\partial^3 H}{\partial x^2 \partial \xi} + \right. \\ \left. + 3Q^2 \frac{\partial^3 H}{\partial x \partial \xi^2} + Q^3 \frac{\partial^3 H}{\partial \xi^3} + \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{d^3 f}{dx^3} \right), \quad (2.10) \\ -Qc \frac{\partial H}{\partial \xi} + \frac{\partial q}{\partial x} + Q \frac{\partial q}{\partial \xi} = 0. \end{aligned}$$

Фазу одной из гармоник в (2.9) можно считать известной (например, $H_{10} = 0$). Так как уравнения (2.10) симметричны относительно преобразования $\xi \rightarrow \xi + \text{const}$, имеется произвол в выборе начала отсчета. Это обстоятельство позволяет определять неизвестную фазовую скорость c наряду с остальными гармониками. Из второго уравнения в (2.10) и условия нормировки следует

$$q_{nm} = \begin{cases} nQcH_{nm}/(nQ + m), & n \neq 0, \\ 0, & n = 0, m \neq 0, \\ 1, & n = 0, m = 0. \end{cases}$$

Таким образом, задача сводится к нахождению неизвестных гармоник H_{nm} и фазовой скорости c и решается численно методом Ньютона. Отметим, что двоякопериодические волновые решения в случае стекания вдоль гладкой стенки получены в [6].

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

3.1. Безволновые решения в случае стекания пленки по гофрированной поверхности. Сопоставление интегрального подхода с решениями уравнений Навье — Стокса. Результаты расчетов по уравнениям Навье — Стокса и интегральной модели для двух жидкостей представлены на рис. 1. В случае фиксированного периода гофрирования рассчитывались поля скоростей (2.1) и форма свободной поверхности $h(x)$ при различных значениях амплитуды волнистости. Форма гофрирования во всех расчетах задавалась следующим образом: $f(x) = 0,5(1 - \cos(2\pi x))$. Отметим, что рассматриваемые параметры гофрирования близки к соответствующим характеристикам мелкой текстуры для элементов промышленной насадки Sulzer 500Y [16]. Расчеты основных характеристик свободной поверхности ($\langle H \rangle$ — средняя толщина пленки, H_{\max} и H_{\min} — максимальное и минимальное значения локальной толщины пленки) проводились для маловязкой жидкости (азот на линии насыщения при атмосферном давлении) и водоглицеринового раствора [3] при $\text{Re} = 5, 20$. На рис. 2 для случая стекания пленки по гладкой поверхности ($A = 0$) представлены решения уравнений Навье — Стокса для стационарно бегущих волн и соответствующие решения интегральной модели (2.3). Расчеты формы свободной поверхности проведены для двух жидкостей и двух типов волн [3, 5].

Результаты сравнения решений уравнений Навье — Стокса и соответствующих решений уравнений (2.3) для двух предельных случаев позволяют сделать вывод о пригодности интегрального подхода для анализа волнообразования при стекании вдоль гофрированной поверхности.

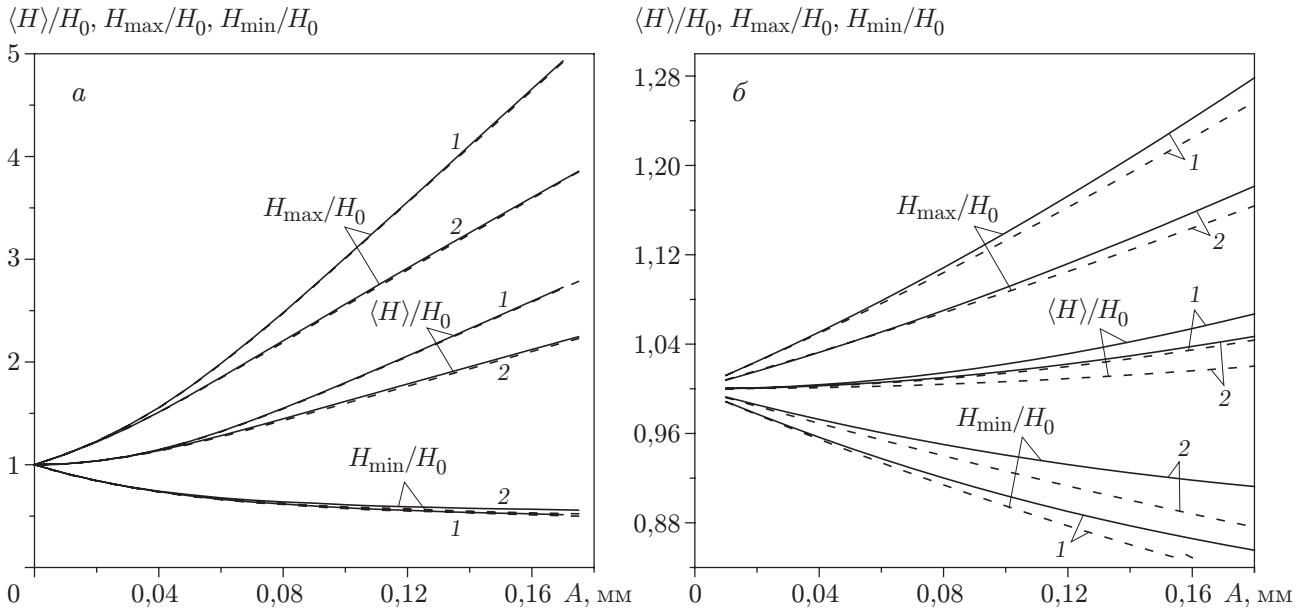


Рис. 1. Стеkanie пленки жидкого азота (а) и водоглицериновой пленки (б) по волнистой поверхности с периодом гофрирования $L = 1,57$ мм: сплошные линии — расчет по уравнению Навье — Стокса, штриховые — расчет по интегральной модели; 1 — $Re = 5$, 2 — $Re = 20$

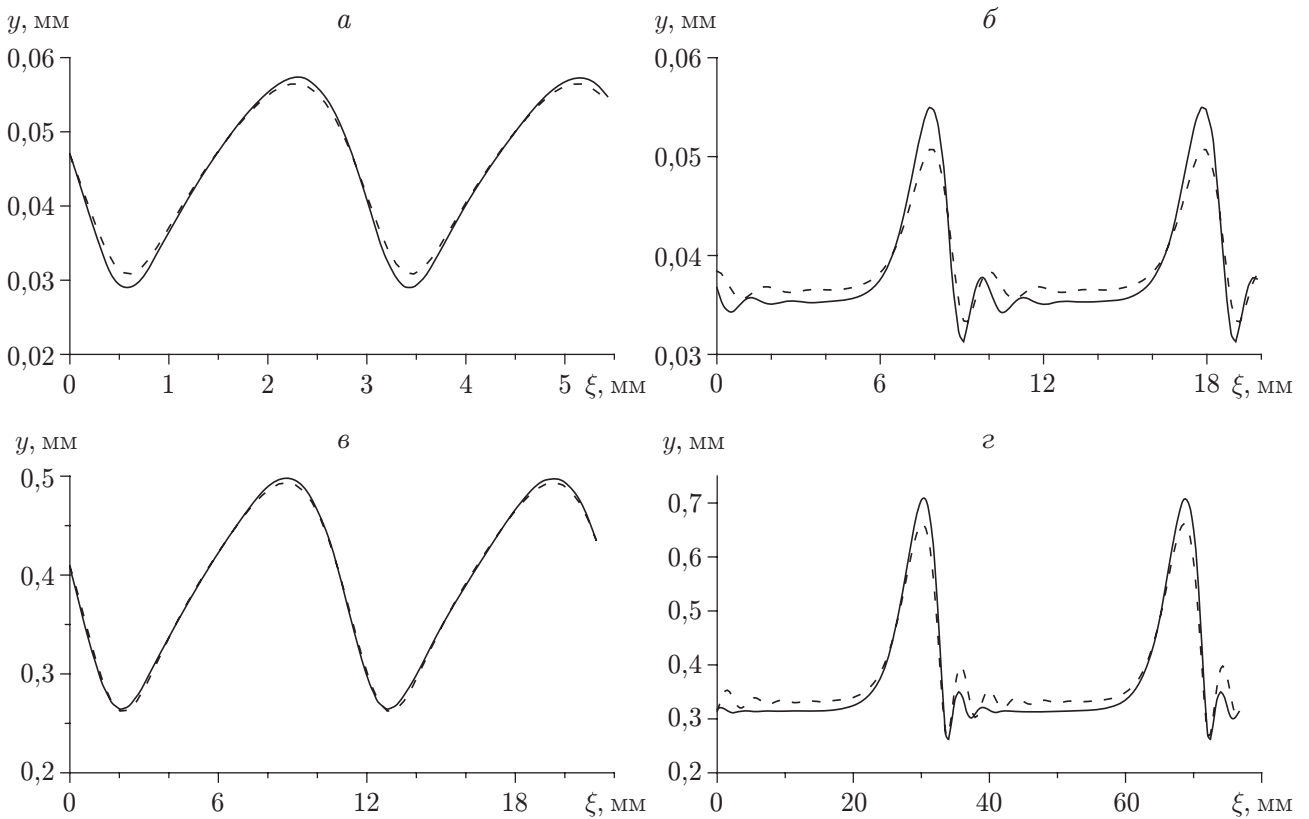


Рис. 2. Волновое стекание пленки жидкого азота (а, б) и водоглицериновой пленки (в, г) по гладкой поверхности: а — $Re = 10$, $\lambda = 2,85$ мм; б — $Re = 6$, $\lambda = 10$ мм; в — $Re = 4,2$, $\lambda = 10,8$ мм; г — $Re = 4,2$, $\lambda = 38,5$ мм; сплошные линии — расчет по уравнению Навье — Стокса, штриховые — расчет по интегральной модели

3.2. Линейная устойчивость течения пленки по гофрированной поверхности по отношению к возмущениям свободной поверхности. Результаты расчетов линейной устойчивости приведены на рис. 3–6. При достаточно небольших числах Рейнольдса существуют параметры гофрирования, при которых течение пленки устойчиво по отношению к произвольным возмущениям свободной поверхности (варьировались значения $Q \in [0, 1]$ в (2.5)). Например, на рис. 3, *а* при $Re = 1$ область таких параметров в случае стекания пленки жидкого азота находится между линиями 1 и 1'. Аналогичные области для водоглицериновой пленки приведены на рис. 3, *б*. Отметим, что при стекании пленки вдоль гладкой стенки при всех значениях числа Рейнольдса существуют неустойчивые возмущения свободной поверхности.

В некотором смысле гофрированность стенки оказывает стабилизирующее влияние на развитие возмущений свободной поверхности. На рис. 4 приведены линии потери устойчивости по отношению к возмущениям свободной поверхности с периодом, равным пери-

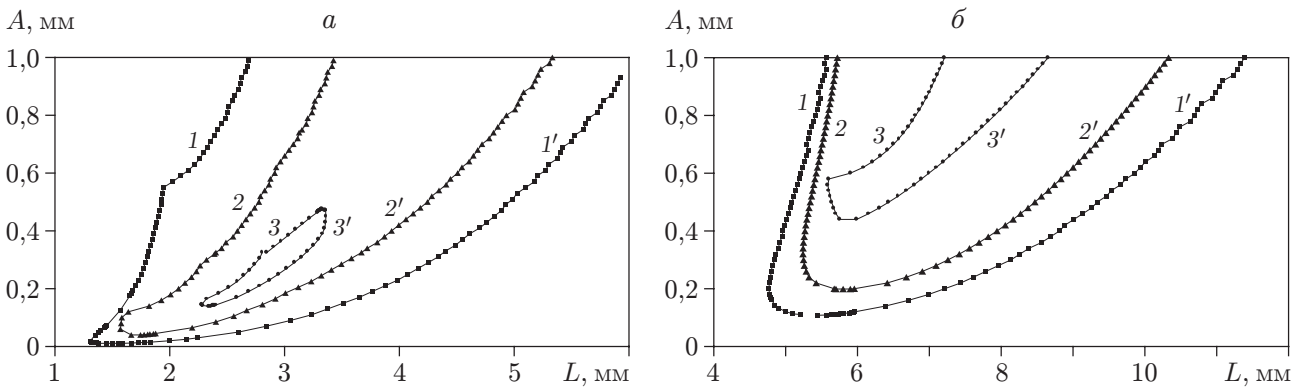


Рис. 3. Параметры гофрирования, при которых стекание пленки вдоль волнистой стенки устойчиво по отношению к любым линейным возмущениям свободной поверхности (области между соответствующими линиями):

а — жидкий азот: 1, 1' — $Re = 1$; 2, 2' — $Re = 5$; 3, 3' — $Re = 8$; *б* — водоглицериновый раствор: 1, 1' — $Re = 0,5$; 2, 2' — $Re = 1$; 3, 3' — $Re = 3$

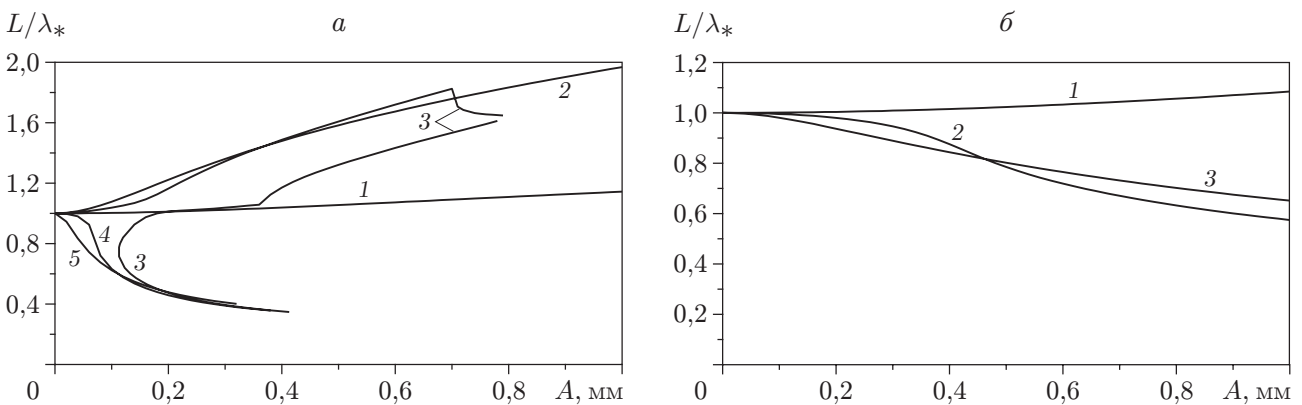


Рис. 4. Параметры гофрирования, при которых стекание вдоль волнистой стенки устойчиво по отношению к возмущениям с периодом, равным периоду гофрирования (области ниже и между соответствующими линиями):

а — жидкий азот: 1 — $Re = 1$, $\lambda_* = 6,65$ мм; 2 — $Re = 6$, $\lambda_* = 2,71$ мм; 3 — $Re = 8$, $\lambda_* = 2,35$ мм; 4 — $Re = 10$, $\lambda_* = 2,1$ мм; 5 — $Re = 20$, $\lambda_* = 1,49$ мм; *б* — водоглицериновая смесь: 1 — $Re = 3$, $\lambda_* = 8,79$ мм; 2 — $Re = 5$, $\lambda_* = 6,81$ мм; 3 — $Re = 20$, $\lambda_* = 3,4$ мм

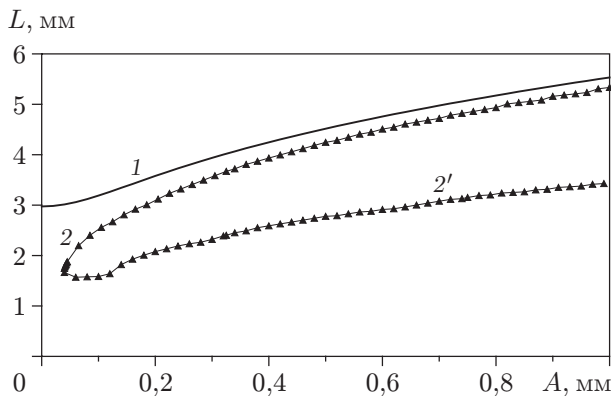


Рис. 5

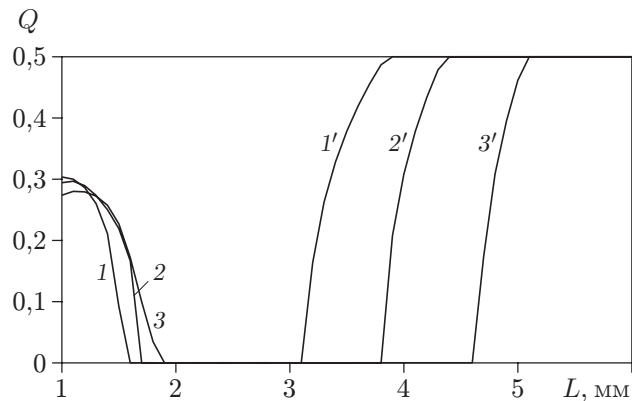


Рис. 6

Рис. 5. Параметры гофрирования, при которых стекание пленки жидкого азота вдоль волнистой стенки при $Re = 5$ устойчиво по отношению к возмущениям с периодом, равным периоду гофрирования (область ниже линии 1), и к любым линейным возмущениям свободной поверхности (область между линиями 2 и 2')

Рис. 6. Стеkanie пленки жидкого азота по волнистой стенке при $Re = 1$:

1, 1' — $A = 0,1$ мм; 2, 2' — $A = 0,2$ мм; 3, 3' — $A = 0,4$ мм; области ниже линий — области неустойчивых возмущений

оду гофрирования ($Q = 0$ в (2.5)). На данных линиях вещественная часть одной пары комплексно-сопряженных собственных значений обращается в нуль. Отметим, что безволновые решения, неустойчивые по отношению к возмущениям с $Q = 0$, не могут наблюдаться в экспериментах. На рис. 4,а параметры гофрирования для таких решений в случае стекания пленки жидкого азота соответствуют областям выше линий 1–5. Здесь период гофрирования отнесен к длине волны нейтрального возмущения (2.8) при стекании вдоль гладкой стенки. Аналогичные результаты в случае стекания водоглицериновых пленок приведены на рис. 4,б. На рис. 5 показаны области параметров гофрирования, в которых соответствующие безволновые решения устойчивы по отношению к возмущениям с периодом, равным периоду гофрирования (ниже линии 1), и область, где безволновые решения устойчивы по отношению к произвольным возмущениям свободной поверхности (область, ограниченная линиями 2, 2'). Результаты расчетов, представленные на рис. 5, соответствуют стеканию пленки жидкого азота при $Re = 5$. В областях между линиями 1 и 2 и ниже линии 2' неустойчивыми являются возмущения с конечными значениями параметра Q в (2.5). На рис. 6 показаны такие значения Q (в области, расположенной ниже соответствующих линий) для трех значений амплитуды гофрирования.

Проведенный анализ позволяет сделать следующие выводы. Существуют параметры гофрирования, при которых безволновое решение (аналог решения Нуссельта при стекании пленки вдоль гладкой стенки) может быть неустойчивым по отношению к возмущениям той же периодичности и не наблюдается на каком-либо участке течения (в отличие от решения Нуссельта, которое реализуется на начальном участке). В то же время существуют параметры гофрирования, при которых безволновое решение устойчиво по отношению к произвольным возмущениям свободной поверхности при небольших числах Рейнольдса (в этом случае имеет место стабилизирующее влияние волнистости стенки). При других значениях параметров гофрирования и числа Рейнольдса безволновое решение неустойчиво по отношению к возмущениям с конечными Q и может наблюдаться только на начальном участке (аналогично решению Нуссельта в случае стекания пленки вдоль гладкой стенки).

3.3. Расчеты волновых режимов стекания пленки по гофрированной поверхности. Для описания нелинейных волновых режимов стекания пленки вдоль гладкой стенки в рамках уравнений (2.3) достаточно одного внешнего параметра $Re/Fi^{1/11}$. При каждом значении такого параметра существует множество различных однопараметрических семейств стационарно бегущих решений [5]. Внутренним параметром для каждого семейства является длина волны λ (или волновое число $\alpha = 2\pi/\lambda$). Каждое такое семейство решений существует в некотором диапазоне длин волн (как правило, $0 < \alpha < \alpha_*$) и сложным образом сочетается с другими семействами. Условие устойчивости по отношению к возмущениям с тем же периодом существенно уменьшает число возможных семейств решений, так как в большинстве из них отсутствуют режимы, устойчивые к такому классу возмущений. Особыми в смысле устойчивости являются два семейства решений. Первое из них (см. рис. 2, *a, в*) ответвляется от тривиального решения $H(x) = 1$. Второе семейство решений ответвляется от первого (см. рис. 2, *б, г*).

При анализе волновых режимов стекания пленки вдоль гофрированной поверхности появляются новые внешние параметры — период L и амплитуда гофрирования A . Период L/Q в (2.9) является внутренним параметром аналогично длине волны λ в случае волнового течения пленки вдоль гладкой стенки. Таким образом, с учетом количества внешних параметров мы имеем существенно более сложный случай (например, волновое течение вдоль гладкой стенки со всеми возможными решениями является лишь простым предельным случаем этой задачи). Тем не менее результаты проведенных расчетов дают более “простую” картину волн при стекании вдоль гофрированной поверхности. В данной работе рассматривается случай волнового стекания пленки жидкого азота. При значительных амплитудах гофрирования не обнаружено различных семейств волновых решений. Расчеты начинались с малых амплитуд гофрирования (в качестве начального приближения при решении уравнения (2.10) взяты соответствующие волновые решения в случае стекания пленки вдоль гладкой стенки). На рис. 7 представлены характерные мгновенные профили волновой свободной поверхности при различной амплитуде гофрирования (отметим, что в выбранных координатах по оси x период гофрирования равен

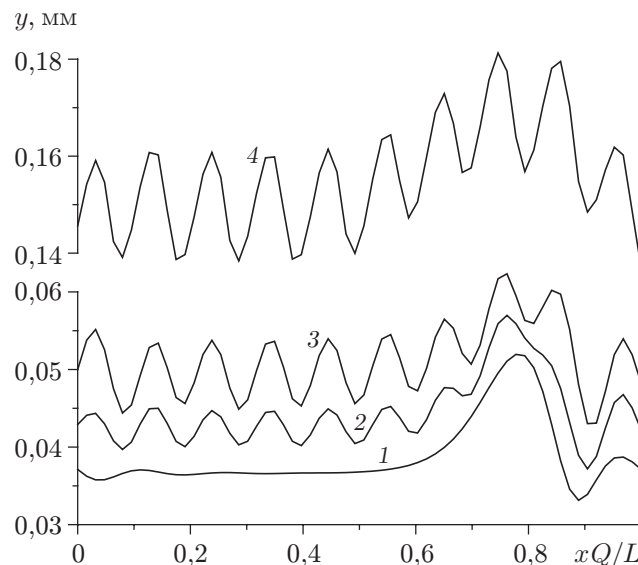


Рис. 7. Волновое стекание пленки жидкого азота по волнистой стенке при $Re = 6$, $L = 1,2$ мм, $Q = 0,1035$:
 1 — $A = 0$; 2 — $A = 0,1$ мм; 3 — $A = 0,2$ мм; 4 — $A = 0,135$ мм

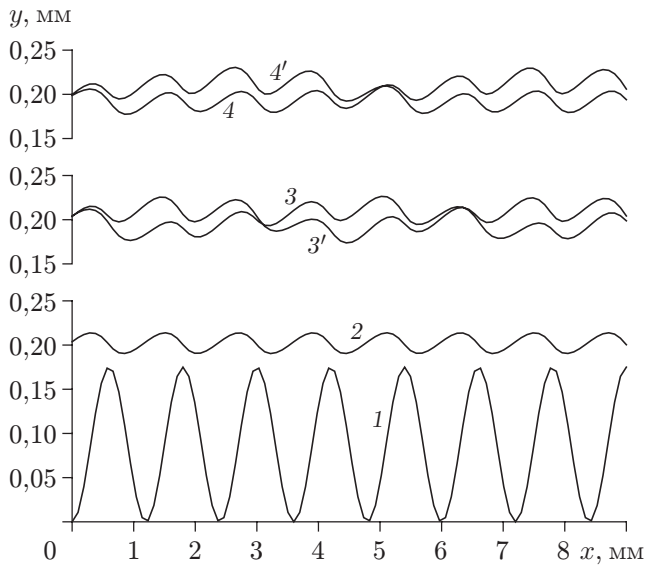


Рис. 8

Рис. 8. Волновое стекание пленки жидкого азота по волнистой стенке при $Re = 10$, $A = 0,175$ мм, $L = 1,2$ мм:

1 — профиль гофрированной стенки; 2 — безволновое решение; 3, 3' — “длинные” волны при $Q = 0,12$ (3 — $t = 0$, 3' — $t = T/2$); 4, 4' — “короткие” волны при $Q = 0$ (4 — $t = 0$, 4' — $t = T/2$)

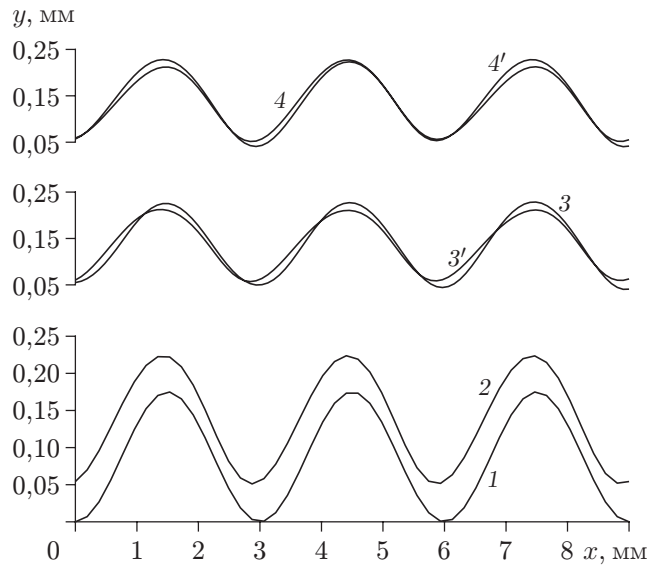


Рис. 9

Рис. 9. Волновое стекание пленки жидкого азота по волнистой стенке при $Re = 10$, $A = 0,175$ мм, $L = 3$ мм:

1 — профиль гофрированной стенки; 2 — безволновое решение; 3, 3' — “короткие” волны при $Q = 1$ (3 — $t = 0$, 3' — $t = T/2$); 4, 4' — “длинные” волны при $Q = 0,5$ (4 — $t = 0$, 4' — $t = T/2$)

значению Q). Расчеты начинались с решений для “длинных” волн второго семейства. Аналогичные расчеты выполнены при других значениях Re , L , Q и начинались с различных волновых решений для малой амплитуды гофрирования (в том числе с решений для “коротких” волн первого семейства). В одних случаях удавалось получить решения для больших амплитуд гофрирования ($A \approx 0,2$ мм), в других случаях решение вырождалось в безволновое решение, а иногда происходило слияние с другими волновыми решениями (например, начатыми при малых амплитудах гофрирования с решений для волн других семейств). Помимо амплитуды гофрирования в расчетах варьировались и другие параметры. В этом случае также могли происходить слияния различных решений и вырождения в безволновые решения. Таким образом, один и тот же набор параметров (Re , A , L , Q) можно было получить различными способами, обходя бифуркационные точки. При значительных амплитудах гофрирования не обнаружено различных семейств решений. В этом смысле картина волн упрощается. На рис. 8, 9 при фиксированных значениях амплитуды гофрирования, периода гофрирования и числа Рейнольдса показаны волновые решения при различных значениях Q (“длинные” и “короткие” волны).

Проведенный анализ позволяет сделать вывод о существенном влиянии волнистости стенки на общую картину нелинейных волн на свободной поверхности. При значительных амплитудах гофрирования исчезает неоднозначность семейств волновых решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Nusselt W.** Die Oberflächenkondensation des Wasserdampfes // Z. VDI. 1916. Bd 60. S. 541–546.
2. **Шкадов В. Я.** Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1967. № 1. С. 43–51.
3. **Алексеенко С. В.** Волновое течение пленок жидкости / С. В. Алексеенко, В. Е. Накоряков, Б. Г. Покусаев. Новосибирск: Наука. Сиб. издат. фирма, 1992.
4. **Chang H.-C.** Wave evolution on a falling film // Annu. Rev. Fluid Mech. 1994. V. 26. P. 103–136.
5. **Трифонов Ю. Я., Цвелодуб О. Ю.** О ветвлении стационарно бегущих волновых режимов вязкой пленки жидкости // ПМТФ. 1988. № 4. С. 55–60.
6. **Трифонов Ю. Я.** Двухпериодические и квазипериодические волновые режимы в стекающей по наклонной плоскости пленке жидкости, их устойчивость и бифуркации // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1992. № 4. С. 98–107.
7. **Vlachogiannis M., Bontozoglou V.** Observations of solitary wave dynamics of film flows // J. Fluid Mech. 2001. V. 435. P. 191–215.
8. **Zhao L., Cerro R. L.** Experimental characterization of viscous film flows over complex surfaces // Intern. J. Multiphase Flow. 1992. V. 6. P. 495–516.
9. **Wang C. Y.** Liquid film flowing slowly down a wavy incline // AIChE J. 1981. V. 27. P. 207–212.
10. **Kang F., Chen K.** Gravity-driven two-layer flow down a slightly wavy periodic incline at low Reynolds numbers // Intern. J. Multiphase Flow. 1995. V. 3. P. 501–513.
11. **Pozrikidis C.** The flow of a liquid film along a periodic wall // J. Fluid Mech. 1988. V. 188. P. 275–300.
12. **Shetty S., Cerro R. L.** Flow of a thin film over a periodic surface // Intern. J. Multiphase Flow. 1993. V. 6. P. 1013–1027.
13. **Bontozoglou V., Papapolymerou G.** Laminar film flow down a wavy incline // Intern. J. Multiphase Flow. 1997. V. 1. P. 69–79.
14. **Trifonov Yu. Ya.** Viscous liquid film flows over a periodic surface // Intern. J. Multiphase Flow. 1998. V. 24. P. 1139–1161.
15. **Трифонов Ю. Я.** Стеkanie вязких пленок по волнистым поверхностям // ПМТФ. 2004. Т. 45, № 3. С. 97–110.
16. **Fair J. R., Bravo J. R.** Distillation columns containing structure packing // Chem. Engng Progr. 1990. V. 86. P. 19–29.
17. **Vlachogiannis M., Bontozoglou V.** Experiments on laminar film flow along a periodic wall // J. Fluid Mech. 2002. V. 457. P. 133–156.

*Поступила в редакцию 9/XII 2005 г.,
в окончательном варианте — 7/III 2006 г.*
