УДК 517.958+536.421

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ ДАРСИ — СТЕФАНА О ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДАХ В НАСЫЩЕННОМ ПОРИСТОМ ГРУНТЕ

С. А. Саженков

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
Национальный университет науки и технологий, 46000 Равалпинди, Пакистан
E-mail: sazhenkovs@yahoo.com

Рассматривается задача Коши для модели Дарси — Стефана, описывающей процесс замерзания (протаивания) насыщенного пористого грунта с учетом фильтрации жидкой фазы. Модель включает закон Дарси, уравнение несжимаемости в жидкой фазе, условие неподвижности твердой фазы, уравнение баланса энергии в системе пористый грунт — насыщающая сплошная среда, а также условие Стефана и условие непрерывности нормальных компонент поля скоростей на межфазной границе. Методом кинетического уравнения доказано существование обобщенных решений задачи, удовлетворяющих дополнительному условию неубывания энтропии в термомеханической системе (т. е. второму закону термодинамики).

Ключевые слова: фильтрация в пористом грунте, закон Дарси, задача Стефана, замерзание, протаивание, энтропия, кинетическое уравнение.

Введение. Математическое моделирование явлений замерзания (протаивания) грунтов с учетом конвекции жидкой насыщающей фазы необходимо для научного обеспечения многих технологических процессов в промышленности и сельском хозяйстве [1]. Большинство предлагаемых моделей сочетает постановку задачи Стефана для описания фазовых превращений в сплошной среде и закон Дарси для описания динамики фильтрации вязких сплошных сред через несжимаемый пористый грунт. Для описания процессов замерзания (оттаивания) вязкой жидкости в неподвижном пористом грунте с одинаковыми значениями плотности в жидкой и замерзшей фазах и с учетом силы плавучести, нелинейно зависящей от температуры, в работе [2] предложена многомерная модель Дарси — Стефана достаточно общего вида. Там же для этой модели рассмотрена начально-краевая задача и доказано существование слабого обобщенного решения. (Доказательство проводилось классическими методами теории эллиптических и параболических уравнений второго порядка.) При этом искомыми функциями являлись скорость фильтрации, градиент давления и температура, а удельная внутренняя энергия выражалась через температуру, что соответствует формулировке задачи Стефана в [3, гл. 5, § 9].

В настоящей работе сформулирована и исследована задача Коши с периодическими начальными данными для указанной выше модели Дарси — Стефана, пояснен физический

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 07-01-00309) и в рамках Национальной исследовательской программы для университетов Комиссии по высшему образованию Пакистана (проект “Современный анализ анизотропной диффузии и распространения акустических волн в пористой среде”).

смысл и определены границы области применимости модели. Изучение задачи Дарси — Стефана проводилось в терминах неизвестной удельной внутренней энергии, а не температуры, что существенно усложняет математическую постановку, поскольку при таком выборе искомой функции уравнение баланса энергии является уравнением вырожденного параболически-гиперболического типа, причем вырождение происходит на отрезке значений удельной внутренней энергии. Введено определение энтропийного решения задачи Дарси — Стефана, которое является более ограничительным, чем стандартное определение слабого обобщенного решения. Установлено, что всякое возможное энтропийное решение удовлетворяет второму закону термодинамики, постулирующему неотрицательное производство энтропии. С физической точки зрения в этом заключается преимущество энтропийного решения перед стандартным слабым обобщенным решением. Сформулирована теорема о существовании энтропийного решения, доказательство которой основано на положениях теории Антонцева — Монахова [4, гл. 5] и методе кинетического уравнения, позволяющем интерпретировать исходную энтропийную постановку в терминах линейного уравнения типа уравнения Больцмана в кинетической теории газов.

1. Постановка задачи Дарси — Стефана. Рассмотрим термомеханическую систему, состоящую из неподвижного теплопроводного пористого грунта и сплошной среды, полностью заполняющей поры. При этом насыщающая сплошная среда может находиться в жидком или твердом состоянии и совершать фазовые переходы между этими состояниями. Пористый скелет, т. е. грунт, фазовых переходов не претерпевает.

Для описания системы используется стандартный макроскопический подход (см., например, уравнения (10.7.13)–(10.7.22) в [5]), суть которого состоит в том, что на поровом уровне математическая модель, представляющая собой совокупность систем классических уравнений для описания динамики скелета и насыщающего порового компонента, а также системы соотношений на поверхностях пор, заменяется осредненной системой уравнений, описывающей динамику "гомогенизированной" сплошной среды, по термомеханическим свойствам отличной как от твердого скелета, так и от среды, насыщающей поры. Области, занимаемые твердым скелетом и поровым компонентом, не различаются, а коэффициентами гомогенной модели являются величины, несущие информацию об обоих компонентах термомеханической системы. Эти величины будем называть эффективными коэффициентами.

С учетом ряда дополнительных и упрощающих предположений наиболее общая модель сводится к следующей формулировке задачи Дарси — Стефана.

Предполагается, что в каждый момент времени $t \in [0, T]$ (T — произвольно заданная положительная постоянная) гомогенизированная сплошная среда заполняет плоскость $\mathbb{R}^2$ или трехмерное пространство $\mathbb{R}^3$. Часть сплошной среды, температура которой $\theta < 0$, занимает некоторую область $Y(t) := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d\colon \theta(\boldsymbol{x}, t) < 0\}$ ($d = 2, 3$), другая часть, температура которой $\theta > 0$, занимает область $W(t) := \mathbb{R}^d \setminus \overline{Y(t)} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d\colon \theta(\boldsymbol{x}, t) > 0\}$. В области $Y(t)$ поровая среда находится в твердом (замерзшем) состоянии, а в области $W(t)$ — в жидком (растаявшем). Расположение областей $Y(t)$ и $W(t)$ и межфазной границы $\Gamma(t) = \overline{Y(t)} \cap \overline{W(t)} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d\colon \theta(\boldsymbol{x}, t) = 0\}$ неизвестно.

Требуется найти распределение удельной внутренней энергии $e = e(\boldsymbol{x}, t)$, поле скоростей фильтрации $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$ и распределение давлений $p_* = p_*(\boldsymbol{x}, t)$, удовлетворяющие следующим уравнениям и условиям:

— уравнению баланса энергии

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \operatorname{div}_x(\boldsymbol{v} e) = \Delta_x \theta, \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \setminus \Gamma(t), \quad t \in (0, T); \tag{1a}$$

— термодинамическому уравнению состояния сплошной среды

$$\theta = \begin{cases} \theta_s(e), & e < 0, \\ 0, & 0 \leqslant e \leqslant l, \\ \theta_l(e), & e > l \end{cases} \tag{1б}$$

(функции θ_s и θ_l заданы таким образом, что $\theta = \theta(e)$ обладает ограниченной второй производной, является нестрого монотонно возрастающей, причем $0 < \theta_s'(e), \theta_l'(e) < +\infty$ $\forall\, e \in \mathbb{R} \setminus [0, l]$);

— условию неподвижности замерзшей фазы

$$\boldsymbol{v} = 0, \qquad \boldsymbol{x} \in Y(t), \quad t \in (0, T); \tag{1в}$$

— уравнению неразрывности (условию несжимаемости) и закону фильтрации Дарси при $\theta \geqslant 0$:

$$\operatorname{div}_x \boldsymbol{v} = 0, \qquad \boldsymbol{x} \in \overline{W(t)}, \quad t \in (0, T); \tag{1г}$$

$$\boldsymbol{v} = -\nabla_x p_* + \boldsymbol{g}(\theta), \qquad \boldsymbol{x} \in \overline{W(t)}, \quad t \in (0, T); \tag{1д}$$

— уравнениям баланса массы и тепла на межфазной границе $\Gamma(t)$ [6, § II.3]:

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = 0, \quad [\nabla_x \theta]_s^l \cdot \boldsymbol{n} = l\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}, \qquad \boldsymbol{x} \in \Gamma(t), \quad t \in (0, T) \tag{1е}$$

(второе условие также называется условием Стефана);

— ограниченным периодическим начальным данным для распределения удельной внутренней энергии:

$$e(\boldsymbol{x}, 0) = e_0(\boldsymbol{x}) \quad (|e_0(\boldsymbol{x})| \leqslant c_0 = \text{const}), \qquad e_0(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{k}_i) = e_0(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d; \tag{1ж}$$

— условиям пространственной периодичности

$$e(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{k}_i, t) = e(\boldsymbol{x}, t), \quad \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{k}_i, t) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t), \qquad (\boldsymbol{x}, t) \in \mathbb{R}^d \times [0, T]. \tag{1з}$$

В уравнениях (1а)–(1з) $\boldsymbol{k}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant d)$ — единичные орты стандартного декартова базиса в $\mathbb{R}^d$; θ — температура сплошной среды, постоянная при значениях удельной внутренней энергии из целого невырожденного интервала $[0, l]$, что представляет собой фазовый переход в поровом компоненте; $\theta = 0$ — температура протаивания (замерзания); $e = l$ — скрытая удельная теплота таяния; $\boldsymbol{g} \in C^2(\mathbb{R})$ — плавучесть, которая в общем случае может являться нелинейной функцией температуры [7]; $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор нормали к $\Gamma(t)$, направленный в сторону $Y(t)$; $\boldsymbol{V}$ — скорость перемещения $\Gamma(t)$; $[\nabla_x \theta]_s^l = (\nabla_x \theta)^l - (\nabla_x \theta)_s$ — скачок градиента температуры $\nabla_x \theta$ через границу $\Gamma(t)$; $(\nabla_x \theta)^l$, $(\nabla_x \theta)_s$ — предельные значения $\nabla_x \theta$ на $\Gamma(t)$ в областях $W(t)$ и $Y(t)$ соответственно.

Следует отметить, что модель Дарси — Стефана (1а)–(1е) является однотемпературной, т. е. в каждой точке пространственного континуума твердый скелет и поровый компонент имеют одну и ту же температуру θ, и перенос тепла в пространстве описывается одним уравнением баланса энергии (1а). Наиболее общая модель фильтрации жидкости через пористые грунты (см., например, уравнения (10.7.13)–(10.7.22) в [5]) является двухтемпературной и содержит два уравнения баланса энергии — для скелета грунта и для насыщающей жидкости. В ряде случаев, прежде всего при малых числах Рейнольдса (т. е. для достаточно медленных фильтрационных течений), различием между температурами скелета грунта и поровой среды можно пренебречь [5. С. 646–647], поскольку в малых пространственных объемах время приблизительного выравнивания температуры в скелете и поровой среде по сравнению со временем притока тепла за счет фильтрационных потоков незначительно. В частности, таким случаем является процесс природного промерзания (оттаивания) грунтов. Следовательно, уравнения баланса энергии для двух температур редуцируются к одному уравнению баланса энергии для одной температуры, т. е. к уравнению (1а). Заметим, что в (1а) коэффициенты являются осредненными (эффективными), т. е. зависящими от коэффициентов теплоемкости, теплопроводности, плотностей и удельных объемов как порового компонента, так и твердого скелета. (Для упрощения расчетов коэффициенты в конвективных членах положим равными единице.)

2. Понятие энтропийного решения. Теорема существования энтропийных решений. Для того чтобы сформулировать понятие энтропийного решения задачи Дарси — Стефана, для линейных пространств периодических функций введем следующие обозначения: $Q = \Omega \times (0,T)$; $\Omega := [0,1)^d$ — пространственный период; $L^p \subset L^p_{loc}(\mathbb{R}^d)$, $H^{s,p} \subset H^{s,p}_{loc}(\mathbb{R}^d)$ — банаховы пространства, состоящие из 1-периодических функций и снабженные нормами $\|u\|_{L^p} = \|u\|_{L^p(\Omega)}$, $\|u\|_{H^{s,p}} = \|u\|_{H^{s,p}(\Omega)}$; для целого $m \geqslant 0$ C^m — замкнутое подпространство 1-периодических по $\boldsymbol{x}$ функций из $C^m(\mathbb{R}^d)$.

Введем понятие энтропийного решения задачи Дарси — Стефана.

Определение. Энтропийным решением задачи Дарси — Стефана назовем пару функций (e, p_*), если эти функции удовлетворяют следующим условиям и соотношениям:

1) условию регулярности

$$e \in L^\infty(Q), \quad \theta(e), H(e) \in L^2(0,T;H^{1,2}), \quad p_* \in L^2(0,T;H^{2,2}) \tag{2а}$$

$\Big(H(e) \overset{def}{=} \int\limits^{e} \sqrt{\theta'(\lambda)}\,d\lambda\Big)$;

2) интегральному неравенству

$$\int\limits_Q \big\{\varphi(e)\,\partial_t\zeta + \varphi^+(e)[-\nabla_x p_* + \boldsymbol{g}(\theta(e))]\cdot\nabla_x\zeta + w(e)\,\Delta_x\zeta - \varphi''(e)|\nabla_x H(e)|^2\zeta\big\}\,d\boldsymbol{x}\,dt +$$
$$+ \int\limits_\Omega \varphi(e_0)\zeta(\boldsymbol{x},0)\,d\boldsymbol{x} \geqslant 0 \tag{2б}$$

(φ, φ^+, w — произвольные функции, такие что

$$\varphi \in C^2_{loc}(\mathbb{R}), \quad \varphi''(e) \geqslant 0, \quad \varphi^+(e) = \int\limits^{e} I_{\lambda\geqslant 0}\varphi'(\lambda)\,d\lambda, \quad w(e) = \int\limits^{e} \varphi'(\lambda)\theta'(\lambda)\,d\lambda, \tag{2в}$$

$\zeta \in C^2_{loc}(\mathbb{R}^d \times [0,T])$ — произвольная неотрицательная 1-периодическая по $\boldsymbol{x}$ функция, обращающаяся в нуль в окрестности $\{t = T\}$);

3) уравнению

$$\Delta_x p_* = \operatorname{div}_x\{\boldsymbol{g}(\theta(e))\} \quad \text{п.в. в } Q. \tag{2г}$$

Заметим, что если энтропийное решение построено, то вектор скорости можно восстановить по формуле

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t) = I_{e(x,t)\geqslant 0}\big[-\nabla_x p_*(\boldsymbol{x},t) + \boldsymbol{g}(\theta(e(\boldsymbol{x},t)))\big]. \tag{3}$$

Несмотря на то что в определении энтропийного решения распределение давления p_* отыскивается во всем периоде Ω, с физической точки зрения имеют смысл только значения при $\boldsymbol{x} \in \Omega \setminus Y(t)$. С учетом уравнения состояния (1б) формула (3) хорошо согласуется с (1в) и (1д).

В формулах (2в), (3) и далее через $I_{\lambda\geqslant s}$ обозначается функция Хевисайда переменной λ со скачком в точке $\lambda = s$:

$$I_{\lambda\geqslant s} \overset{def}{=} \begin{cases} 1, & \lambda \geqslant s, \\ 0, & \lambda < s. \end{cases}$$

С учетом уравнений (1г), (3) и начального условия (1ж) интегральное неравенство (2б) в смысле теории распределений эквивалентно неравенству

$$\frac{\partial \varphi(e)}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla_x \varphi(e) - \Delta_x w(e) \leqslant -\varphi''(e)|\nabla_x H(e)|^2 \quad \text{в } D'(Q). \tag{4}$$

В предположении, что $\varphi(e) = \pm e$, во всем пространстве Q в смысле распределений выполняется уравнение баланса энергии (1а). Согласно [6, § II.3] уравнение (1а), заданное во всем пространстве Q, формально выполняется в каждой из областей $\{(\boldsymbol{x}, t) \in Q\colon \boldsymbol{x} \in Y(t), t \geqslant 0\}$ и $\{(\boldsymbol{x}, t) \in Q\colon \boldsymbol{x} \in W(t), t \geqslant 0\}$, а на межфазной поверхности $\Gamma(t)$ выполняется условие Стефана (т. е. второе уравнение в (1е)). В силу этого, а также условий регулярности (2а) любое возможное энтропийное решение задачи Дарси — Стефана, определенное условиями (2а)–(2г), является слабым решением задачи Дарси — Стефана, т. е. удовлетворяет уравнениям системы (1а)–(1з), но при этом уравнению (1а) — в слабом смысле, а условиям (1е) — в смысле следов. Однако выбор $\varphi(e) = \pm e$ является частным случаем, поэтому интегральное неравенство (2б) (а следовательно, дифференциальное неравенство (4)) является более ограничительным, чем уравнение баланса энергии. По сути, в случае гладких и выпуклых $\varphi(e)$, не равных e и $-e$, неравенство (4) представляет собой дополнение к формулировке задачи Дарси — Стефана.

Поясним физическую мотивировку данного дополнения. Интегрируя неравенство (4) по $\boldsymbol{x}$ и t на $\Omega \times (0, \tau)$, с учетом соленоидальности $\boldsymbol{v}$, 1-периодичности $\boldsymbol{v}$ и e по $\boldsymbol{x}$, а также формулы Грина для любого $\tau > 0$ получаем

$$\int_\Omega \varphi(e(\boldsymbol{x}, \tau))\, d\boldsymbol{x} + \int_0^\tau \int_\Omega \varphi''(e)|\nabla_x H(e)|^2\, d\boldsymbol{x}\, dt \leqslant \int_\Omega \varphi(e_0(\boldsymbol{x}))\, d\boldsymbol{x} \quad \forall \varphi \in C^2(\mathbb{R}),\ \varphi'' \geqslant 0. \tag{5}$$

Требуя для рассматриваемой задачи выполнения аксиомы состояния жидкостей и газов [8, ч. II, § 8], т. е. постулируя основное термодинамическое тождество $\theta_{abs}\, dS = de$ (рассматриваемая среда является несжимаемой однопараметрической; $p_* d(1/\rho) \equiv 0$; ρ — постоянная плотность), удельную энтропию S как функцию удельной внутренней энергии представим в виде

$$S(e) = \int^e \frac{d\lambda}{\theta(\lambda) + \theta_{dif}}. \tag{6}$$

В (6) и в основном термодинамическом тождестве θ_{abs} — абсолютная температура; θ_{dif} — разность между нулевым значением температуры по шкале θ и абсолютным нулем, т. е. $\theta_{abs}(e) = \theta(e) + \theta_{dif}$. Дважды дифференцируя (6) по e, в силу уравнения состояния (1б) находим, что при любых $e \in \mathbb{R}$ $S''(e) \leqslant 0$. Следовательно, в неравенствах (2б), (4), (5) можно положить $\varphi(e) = -S(e)$. Тогда из (5) следует, что для любого $\tau > 0$

$$\int_\Omega S(e(\boldsymbol{x}, \tau))\, d\boldsymbol{x} \geqslant \int_\Omega S(e_0(\boldsymbol{x}))\, d\boldsymbol{x}.$$

Это неравенство представляет собой второй закон термодинамики: производство энтропии неотрицательно.

Из сказанного выше также следует, что если не требовать выполнения аксиомы состояния жидкостей и газов, то в рассматриваемой термомеханической системе в качестве энтропии можно использовать любую функцию $S(e) = -\varphi(e)$, где φ — гладкая и выпуклая функция. Тогда выполнение второго закона термодинамики гарантируется неравенством (4) (неравенством (2б) в определении энтропийного решения), которое будем называть энтропийным неравенством.

Следует отметить, что в математической теории нелинейных законов сохранения (см., например, [9, 10]) энтропией называется выпуклая функция φ, а не противоположная по знаку функция $S = -\varphi$, как принято в термодинамике.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *При любых начальных данных $e_0 \in L^\infty$, таких что $-c_0 \leqslant e_0(\boldsymbol{x}) \leqslant c_0$ п. в. в $\mathbb{R}^d$, задача Дарси — Стефана имеет по меньшей мере одно энтропийное решение.*

Доказательство теоремы 1 приводится в пп. **3–5**.

3. Параболическая аппроксимация задачи Дарси — Стефана. Частичная компактность приближенных решений. Наряду с задачей Дарси — Стефана рассмотрим ее параболическую аппроксимацию

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla_x e^+ = \Delta_x \theta(e) + \varepsilon \Delta_x e, \qquad (\boldsymbol{x}, t) \in \mathbb{R}^d \times (0, T); \tag{7а}$$

$$\boldsymbol{u} = -\nabla_x p_* + \boldsymbol{g}(\theta(e)), \quad \operatorname{div}_x \boldsymbol{u} = 0, \qquad (\boldsymbol{x}, t) \in \mathbb{R}^d \times (0, T); \tag{7б}$$

$$e(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{k}_i, t) = e(\boldsymbol{x}, t), \quad \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{k}_i, t) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t), \qquad (\boldsymbol{x}, t) \in \mathbb{R}^d \times (0, T) \tag{7в}$$

с начальными данными (1ж) (в (7а) $e^+ = I_{e \geqslant 0}\, e$).

Согласно теории фильтрации несмешивающихся жидкостей [4, гл. 5] при произвольном фиксированном $\varepsilon > 0$ существует единственное гладкое решение $(e_\varepsilon, p_{*\varepsilon}, \boldsymbol{u}_\varepsilon)$ задачи (7а)–(7в), (1ж) (давление $p_{*\varepsilon}$ определяется с точностью до постоянного слагаемого, которое может быть зафиксировано стандартным требованием, например $\displaystyle\int_\Omega p_{*\varepsilon}(\boldsymbol{x}, t)\, d\boldsymbol{x} = 0$).

Из принципа максимума и энергетических оценок получаем

$$-c_0 \leqslant e_\varepsilon(\boldsymbol{x}, t) \leqslant c_0 \qquad \text{в} \quad \mathbb{R}^d \times (0, T); \tag{8а}$$

$$\|\nabla_x \theta(e_\varepsilon)\|^2_{L^2(Q)} + \|\nabla_x H(e_\varepsilon)\|^2_{L^2(Q)} + \varepsilon \|\nabla_x e_\varepsilon\|^2_{L^2(Q)} + \|\nabla_x p_{*\varepsilon}\|^2_{L^2(Q)} \leqslant c_1(Q), \tag{8б}$$

где постоянная c_1 не зависит от ε.

Из неравенств (8) следует существование последовательности решений e_ε, $p_{*\varepsilon}$, $\boldsymbol{u}_\varepsilon$ задачи (7а)–(7в), (1ж) и пяти функций e, p_*, $\boldsymbol{u}$, θ_*, H_*, таких что при $\varepsilon \searrow 0$ имеют место предельные соотношения

$$e_\varepsilon \to e \qquad *\text{-слабо в} \quad L^\infty(Q); \tag{9}$$

$$\boldsymbol{u}_\varepsilon \to \boldsymbol{u}, \quad \nabla_x p_{*\varepsilon} \to \nabla_x p_* \qquad \text{слабо в} \quad L^2(Q); \tag{10}$$

$$\nabla_x \theta(e_\varepsilon) \to \nabla_x \theta_*, \quad \nabla_x H(e_\varepsilon) \to \nabla_x H_* \qquad \text{слабо в} \quad L^2(Q). \tag{11}$$

Поскольку задача Дарси — Стефана нелинейна, для предельного перехода в приближенных уравнениях необходимо доказать сильную сходимость какой-либо подпоследовательности приближенных решений. Для этого докажем предкомпактность семейств $\{\nabla_x p_{*\varepsilon}\}_{\varepsilon>0}$ и $\{\boldsymbol{u}_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$.

Предложение 1. *Для любого ограниченного множества $K \subset \mathbb{R}^d_x$ с достаточно гладкой границей существует постоянная $c_2(K)$, такая что*

$$\|\nabla_x p_{*\varepsilon}\|_{L^2(0,T;H^{1,2}(K))} + \|\partial_t \nabla_x p_{*\varepsilon}\|_{L^2(0,T;H^{-1,2}(K))} + \\ + \|\boldsymbol{u}_\varepsilon\|_{L^2(0,T;H^{1,2}(K))} + \|\partial_t \boldsymbol{u}_\varepsilon\|_{L^2(0,T;H^{-1,2}(K))} \leqslant c_2(K). \tag{12}$$

В $L^2_{loc}(\mathbb{R}^d_x \times (0, T))$ семейства $\{\nabla_x p_{*\varepsilon}\}_{\varepsilon>0}$ и $\{\boldsymbol{u}_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ относительно компактны.

Доказательство основано на применении стандартной техники построения априорных оценок решений параболических и эллиптических уравнений [3, 11].

Пусть K — произвольное ограниченное подмножество $\mathbb{R}^d_x$ с достаточно гладкой границей. Из уравнений (7б) следует уравнение (2г), из которого в силу неравенств (8) и равномерной ограниченности $\boldsymbol{g}'_\theta(\theta(e_\varepsilon))$ в свою очередь следует

$$\|\Delta_x p_{*\varepsilon}\|_{L^2(K\times(0,T))} \leqslant c_3(K) \tag{13}$$

(здесь и далее в доказательстве предложения постоянные $c_j(K)$ ($j = 3, 4, \ldots, 9$) не зависят от ε). Из оценок (8), (13) и второго основного неравенства для эллиптических операторов [11, гл. II, § 6] вытекает оценка

$$\|p_{*\varepsilon}\|_{L^2(0,T;H^{2,2}(K))} \leqslant c_4(K). \tag{14}$$

Умножая (7а) на функцию $g'_{i\theta}(\theta(e_\varepsilon))\theta'(e_\varepsilon)$ ($1 \leqslant i \leqslant d$) и проводя несложные технические преобразования, получаем

$$\begin{aligned} \partial_t g_i(\theta(e_\varepsilon)) = -\operatorname{div}_x(\boldsymbol{u}h_i(e_\varepsilon)) + \Delta_x r_i(e_\varepsilon) + \varepsilon\Delta_x g_i(\theta(e_\varepsilon)) - \theta'(e_\varepsilon)g''_{i\theta\theta}(\theta(e_\varepsilon))|\nabla_x\theta(e_\varepsilon)|^2 - {}\\ - g'_{i\theta}(\theta(e_\varepsilon))\theta''(e_\varepsilon)|\nabla_x H(e_\varepsilon)|^2 - \varepsilon g''_{i\theta\theta}(\theta(e_\varepsilon))|\nabla_x\theta(e_\varepsilon)|^2 - \varepsilon g'_{i\theta}(\theta(e_\varepsilon))\theta''(e_\varepsilon)|\nabla_x e_\varepsilon|^2, \end{aligned} \tag{15}$$

где $h'_i(e_\varepsilon) = I_{e_\varepsilon\geqslant l}\, g'_{i\theta}(\theta(e_\varepsilon))\theta'(e_\varepsilon)$ и $r'_i(e_\varepsilon) = g'_{i\theta}(\theta(e_\varepsilon))(\theta'(e_\varepsilon))^2$. Умножая обе части равенства (15) на произвольную функцию $\varphi \in L^2(0,T;C^1_0(K))$, интегрируя его по $K\times(0,T)$, а в правой части — по частям, выводим

$$\begin{aligned} \int\limits_{K\times(0,T)} \big(\partial_t g_i(\theta(e_\varepsilon))\big)\varphi\,d\boldsymbol{x}\,dt = \int\limits_{K\times(0,T)} \boldsymbol{u}h_i(e_\varepsilon)\cdot\nabla_x\varphi\,d\boldsymbol{x}\,dt - {}\\ - \int\limits_{K\times(0,T)} g'_{i\theta}(\theta(e_\varepsilon))\theta'(e_\varepsilon)\nabla_x\theta(e_\varepsilon)\cdot\nabla_x\varphi\,d\boldsymbol{x}\,dt - \varepsilon \int\limits_{K\times(0,T)} g'_{i\theta}(\theta(e_\varepsilon))\theta'(e_\varepsilon)\nabla_x e_\varepsilon\cdot\nabla_x\varphi\,d\boldsymbol{x}\,dt - {}\\ - \int\limits_{K\times(0,T)} g''_{i\theta\theta}(\theta(e_\varepsilon))\theta'(e_\varepsilon)|\nabla_x\theta(e_\varepsilon)|^2\,d\boldsymbol{x}\,dt - \int\limits_{K\times(0,T)} g'_{i\theta}(\theta(e_\varepsilon))\theta''(e_\varepsilon)|\nabla_x H(e_\varepsilon)|^2\,d\boldsymbol{x}\,dt - {}\\ - \varepsilon\int\limits_{K\times(0,T)} g''_{i\theta\theta}(\theta(e_\varepsilon))|\nabla_x\theta(e_\varepsilon)|^2\,d\boldsymbol{x}\,dt - \varepsilon\int\limits_{K\times(0,T)} g'_{i\theta}(\theta(e_\varepsilon))\theta''(e_\varepsilon)|\nabla_x e_\varepsilon|^2\,d\boldsymbol{x}\,dt. \end{aligned}$$

Применяя в правой части неравенство Коши, в силу оценок (8) получаем

$$\Big|\int\limits_{K\times(0,T)} \big(\partial_t g_i(\theta(e_\varepsilon))\big)\varphi\,d\boldsymbol{x}\,dt\Big| \leqslant c_5(K)\|\varphi\|_{L^2(0,T;H^{1,2}(K))},$$

откуда следует

$$\|\partial_t g_i(\theta(e_\varepsilon))\|_{L^2(0,T;H^{-1,2}(K))} \leqslant c_6(K) \qquad (1 \leqslant i \leqslant d). \tag{16}$$

В силу свойств эллиптических операторов [11, гл. II] из неравенства (16) и равенства $\partial_t\Delta_x p_{*\varepsilon} = \partial_t \operatorname{div}_x \boldsymbol{g}(\theta(e_\varepsilon))$ следует оценка

$$\|\partial_t\nabla_x p_{*\varepsilon}\|_{L^2(0,T;H^{-1,2}(K))} \leqslant c_7(K). \tag{17}$$

Из уравнения (7б), оценки (14), включения $\nabla_x\boldsymbol{g}(\theta(e_\varepsilon)) \in L^2(K\times(0,T))$, уравнения $\partial_t\boldsymbol{u}_\varepsilon = -\partial_t\nabla_x p_{*\varepsilon} + \partial_t\boldsymbol{g}(\theta(e_\varepsilon))$ и оценок (16), (17) следуют неравенства

$$\|\boldsymbol{u}_\varepsilon\|_{L^2(0,T;H^{1,2}(K))} \leqslant c_8(K), \qquad \|\partial_t\boldsymbol{u}_\varepsilon\|_{L^2(0,T;H^{-1,2}(K))} \leqslant c_9(K). \tag{18}$$

Таким образом, оценка (12) является следствием оценок (14), (17) и (18). Следует отметить, что в силу (12) и результата о компактности из [12] имеет место относительная компактность семейств $\{\nabla_x p_{*\varepsilon}\}_{\varepsilon>0}$ и $\{\boldsymbol{u}_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$.

4. Кинетическая формулировка, ассоциированная с задачей Дарси — Стефана. 4.1. *Предварительные сведения.* В настоящей работе обоснование компактности подпоследовательностей приближенных решений и доказательство разрешимости задачи Дарси — Стефана базируется на построении кинетического уравнения, ассоциированного с задачей и являющегося инструментом метода кинетического уравнения. Этот метод разработан с целью изучения широкого спектра прикладных задач, например краевых задач для системы уравнений изоэнтропической газовой динамики, квазилинейных законов сохранения первого и второго порядков и моделей двухфазной фильтрации в волокнистых структурах [9, 13, 14]. Метод кинетического уравнения позволяет сводить квазилинейные уравнения к линейным скалярным уравнениям, решениями которых являются функции "распределений", содержащие дополнительные "кинетические" переменные.

Поскольку кинетическая формулировка, ассоциированная с задачей Дарси — Стефана, конструируется аналогично [13, 14] и включает понятие о мерозначных отображениях, соответствующих слабо сходящимся последовательностям приближенных решений, введем некоторые определения и обозначения, касающиеся мерозначных отображений: $\mathrm{Prob}\,(\mathbb{R}^n)$ — множество вероятностных мер в $\mathbb{R}^n$, т. е. неотрицательных мер Радона с единичной нормой; $\mathbb{M}(\mathbb{R}^n)$ — пространство конечных мер Радона над $\mathbb{R}^n$. Норма в $\mathbb{M}(\mathbb{R}^n)$ вводится стандартно [10, п. 1.2.8]. Отображение μ: $\mathbb{R}^d_x \times (0,T) \mapsto \mathbb{M}(\mathbb{R}^n)$ называется ограниченным $*$-слабо измеримым и 1-периодическим по $\boldsymbol{x}$, если для любого $F \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d_x \times (0,T); C_0(\mathbb{R}^n))$ функция $(\boldsymbol{x},t) \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n_p} F(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{p})\,d\mu_{x,t}(\boldsymbol{p})$ является измеримой и при $1 \leqslant i \leqslant d$ имеет место равенство

$$\int_{\mathbb{R}^n_p} F(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{p})\,d\mu_{x+k_i,t}(\boldsymbol{p}) = \int_{\mathbb{R}^n_p} F(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{k}_i,t,\boldsymbol{p})\,d\mu_{x,t}(\boldsymbol{p}).$$

Здесь $\mu_{x,t} = \mu(\boldsymbol{x},t)$ — стандартное обозначение, т. е. меры $\mu_{x,t}$ являются параметризованными с параметрами $\boldsymbol{x}$ и t. Следуя определению 2.7 в [10, гл. 3], линейное пространство, состоящее из описанных выше мерозначных отображений μ, обозначим через $L^\infty_w(\mathbb{R}^d_x \times (0,T); \mathbb{M}(\mathbb{R}^n))$ и введем в нем норму

$$\|\mu\|_{L^\infty_w(\mathbb{R}^d_x\times(0,T);\mathbb{M}(\mathbb{R}^n))} = \operatorname*{ess\,sup}_{(x,t)\in\mathbb{R}^d_x\times(0,T)} \|\mu_{x,t}\|_{\mathbb{M}(\mathbb{R}^n)}.$$

4.2. *Понятие кинетической формулировки.* Из предельных соотношений (9), (11) и теорем Тартара (теорема 2.3 в [10, гл. 3]) и Болла (теорема 2.1 в [10, гл. 4]) следует существование подпоследовательности $\{e_\varepsilon\}_{\varepsilon\to0}$ и 1-периодических по $\boldsymbol{x}$ мерозначных функций $\nu \in L^\infty_w(\mathbb{R}^d_x \times (0,T);\,\mathrm{Prob}\,(\mathbb{R}_\lambda))$ и $\sigma \in L^\infty_w(\mathbb{R}^d_x \times (0,T);\,\mathrm{Prob}\,(\mathbb{R}_\lambda \times \mathbb{R}^d_q))$, таких что

$$\varphi(e_\varepsilon) \underset{\varepsilon\searrow0}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}_\lambda} \varphi(\lambda)\,d\nu_{x,t}(\lambda) \qquad *\text{-слабо в} \quad L^\infty(\mathbb{R}^d_x \times (0,T)) \tag{19}$$

для любой функции $\varphi \in C(\mathbb{R}_\lambda)$ и

$$\psi(e_\varepsilon, \nabla_x H(e_\varepsilon)) \underset{\varepsilon\searrow0}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}_\lambda\times\mathbb{R}^d_q} \psi(\lambda,\boldsymbol{q})\,d\sigma_{x,t}(\lambda,\boldsymbol{q}) \qquad *\text{-слабо в} \quad L^\infty(\mathbb{R}^d_x \times (0,T)) \tag{20}$$

для любой функции $\psi \in C(\mathbb{R}_\lambda \times \mathbb{R}^d_q)$, удовлетворяющей условию $|\psi(\lambda, \boldsymbol{q})| \leqslant c(1 + |\lambda| + |\boldsymbol{q}|)^r$, $0 \leqslant r < 2$. Меры $\nu_{x,t}$, $\sigma_{x,t}$ называются мерами Янга, ассоциированными со слабо сходящимися подпоследовательностями $\{e_\varepsilon\}$ и $\{e_\varepsilon, \nabla_x H(e_\varepsilon)\}$ соответственно.

Введем функцию распределения меры $\nu_{x,t}$

$$f(\boldsymbol{x}, t, \lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}_s} I_{\lambda \geqslant s} \, d\nu_{x,t}(s) \tag{21}$$

и параметризованную функцию Хевисайда

$$f_\varepsilon(\boldsymbol{x}, t, \lambda) = I_{\lambda \geqslant e_\varepsilon(x,t)}, \tag{22}$$

которая является функцией распределения параметризованной меры $\gamma_{e_\varepsilon(x,t)}$ — меры Дирака на $\mathbb{R}_\lambda$, сосредоточенной в точке $\lambda = e_\varepsilon(\boldsymbol{x}, t)$. В силу (19) и очевидного представления

$$\varphi(e_\varepsilon(\boldsymbol{x}, t)) = -\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi'(\lambda) f_\varepsilon(\boldsymbol{x}, t, \lambda) \, d\lambda \qquad \forall \varphi \in C^1_0(\mathbb{R})$$

имеет место предельное соотношение

$$f_\varepsilon \underset{\varepsilon \searrow 0}{\longrightarrow} f \qquad *\text{-слабо в} \quad L^\infty((0,T) \times \mathbb{R}_\lambda; L^\infty). \tag{23}$$

В силу предложения 1 существует еще одна подпоследовательность из $\{e_\varepsilon, \boldsymbol{u}_\varepsilon, p_{*\varepsilon}\}$, такая что

$$\boldsymbol{u}_\varepsilon \underset{\varepsilon \searrow 0}{\longrightarrow} \boldsymbol{u}, \quad \nabla_x p_{*\varepsilon} \underset{\varepsilon \searrow 0}{\longrightarrow} \nabla_x p_* \qquad \text{сильно в} \quad L^2(Q). \tag{24}$$

Далее, параметризованную меру Радона на $\mathbb{R}_\lambda$ и меру Радона на $Q \times \mathbb{R}_\lambda$, определяемые формулами

$$d_\lambda \chi_\varepsilon(\boldsymbol{x}, t, \lambda) = |\nabla_x H(e_\varepsilon)|^2 d\gamma_{e_\varepsilon(x,t)}(\lambda) \qquad \text{при п.в.} \quad (\boldsymbol{x}, t) \in \mathbb{R}^d_x \times (0,T); \tag{25}$$

$$dM_\varepsilon(\boldsymbol{x}, t, \lambda) = \varepsilon |\nabla_x e_\varepsilon|^2 \, d\gamma_{e_\varepsilon(x,t)}(\lambda) \, d\boldsymbol{x} \, dt, \tag{26}$$

обозначим через $d_\lambda \chi_\varepsilon(\,\cdot\,, \,\cdot\,, \lambda)$ и M_ε соответственно. В силу оценок (8), определения меры Янга $\sigma_{x,t}$ и лемм 9, 10 в [13] справедливо следующее утверждение.

Предложение 2. *Существует подпоследовательность из $\{e_\varepsilon\}$, такая что:*

1) *функция*

$$\chi(\boldsymbol{x}, t, \lambda) := \int\limits_{(-\infty, \lambda] \times \mathbb{R}^d_q} |\boldsymbol{q}|^2 \, d\sigma_{x,t}(s, \boldsymbol{q}) \tag{27}$$

определена при п.в. $(\boldsymbol{x}, t) \in \mathbb{R}^d \times (0,T)$, 1-периодична по $\boldsymbol{x}$, непрерывна справа по λ и имеет конечный предел при $\lambda \to \infty$ для п.в. $(\boldsymbol{x}, t) \in \mathbb{R}^d \times (0,T)$;

2) *носитель меры Стильтьеса $d_\lambda \chi(\,\cdot\,, \,\cdot\,, \lambda)$ принадлежит отрезку $[-c_0, c_0]$ при п.в. $(\boldsymbol{x}, t) \in \mathbb{R}^d \times (0,T)$, а $*$-слабо измеримое отображение $(\boldsymbol{x}, t) \mapsto d_\lambda \chi(\boldsymbol{x}, t, \lambda)$ принадлежит пространству $L^1_w(Q; \mathbb{M}(\mathbb{R}_\lambda))$ и связано с последовательностью $*$-слабо измеримых отображений $\{(\boldsymbol{x}, t) \mapsto d_\lambda \chi_\varepsilon(\boldsymbol{x}, t, \lambda)\}_{\varepsilon \to 0}$ предельным соотношением*

$$d_\lambda \chi_\varepsilon \underset{\varepsilon \searrow 0}{\longrightarrow} d_\lambda \chi \qquad *\text{-слабо в} \quad L^1_w(Q; \mathbb{M}(\mathbb{R}_\lambda)); \tag{28}$$

3) *существует неотрицательная 1-периодическая по $\boldsymbol{x}$ мера $M \in \mathbb{M}(Q \times \mathbb{R}_\lambda)$, связанная с последовательностью мер $\{M_\varepsilon\}_{\varepsilon \to 0}$ предельным соотношением*

$$M_\varepsilon \underset{\varepsilon \searrow 0}{\longrightarrow} M \qquad *\text{-слабо в} \quad \mathbb{M}(Q \times \mathbb{R}_\lambda). \tag{29}$$

В формулировке 2 предложения 2 через $L^1_w(Q;\mathbb{M}(\mathbb{R}_\lambda))$ обозначено пространство $*$-слабо измеримых отображений μ: $Q \mapsto \mathbb{M}(\mathbb{R}_\lambda)$, таких что для любого $F \in L^\infty(Q;C_0(\mathbb{R}_\lambda))$ интеграл $\displaystyle\int\limits_Q \Big|\int\limits_{\mathbb{R}_\lambda} F(\boldsymbol{x},t,\lambda)\,d\nu_{x,t}(\lambda)\Big|\,d\boldsymbol{x}\,dt$ конечен. Соответственно предельное соотношение (28) понимается в смысле сходимости интегралов

$$\int\limits_Q\int\limits_{\mathbb{R}_\lambda} F(\boldsymbol{x},t,\lambda)\,d_\lambda\chi_\varepsilon(\boldsymbol{x},t,\lambda)\,d\boldsymbol{x}\,dt \underset{\varepsilon\searrow 0}{\longrightarrow} \int\limits_Q\int\limits_{\mathbb{R}_\lambda} F(\boldsymbol{x},t,\lambda)\,d_\lambda\chi(\boldsymbol{x},t,\lambda)\,d\boldsymbol{x}\,dt$$

$$\forall F \in L^\infty(Q;C_0(\mathbb{R}_\lambda)).$$

Используя установленные предельные соотношения (23), (24), (28), (29), можно перейти к пределу при $\varepsilon \searrow 0$ (выбирая при необходимости подпоследовательность) в уравнениях аппроксимирующей задачи (7а)–(7в), (1ж). Следуя теореме 5 в [13], выводим предельную постановку (называемую кинетической формулировкой задачи Дарси — Стефана) и одновременно — теорему о разрешимости этой постановки.

Теорема 2. *Пусть* $(e_\varepsilon,\boldsymbol{u}_\varepsilon,p_{*\varepsilon})$ *— решение задачи* (7а)–(7в), (1ж), *а функция распределения* f_ε *и меры* $d_\lambda\chi_\varepsilon$ *и* M_ε *заданы формулами* (22), (25), (26). *Существует последовательность малых параметров* $\varepsilon = \varepsilon_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, *такая что при* $k \to \infty$ *последовательность* $\{f_{\varepsilon_k},\boldsymbol{u}_{\varepsilon_k},p_{*\varepsilon_k},d_\lambda\chi_{\varepsilon_k},M_{\varepsilon_k}\}_{k=1,2,\dots}$ *сходится к пяти функциям и мерам* f, $\boldsymbol{u}$, p_*, $d_\lambda\chi$, M, *причем эти функции и меры служат решением рассмотренной ниже задачи K* (*сходимость* $(f_{\varepsilon_k},\boldsymbol{u}_{\varepsilon_k},p_{*\varepsilon_k},d_\lambda\chi_{\varepsilon_k},M_{\varepsilon_k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} (f,\boldsymbol{u},p_*,d_\lambda\chi,M)$ *понимается в смысле предельных соотношений* (23), (24), (28), (29)).

Задача K (кинетическая формулировка задачи Дарси — Стефана). При заданной начальной функции распределения $f_0(\boldsymbol{x},\lambda) = I_{\lambda\geqslant e_0(x)}$, где e_0 задана условием (1ж), требуется отыскать функцию распределения $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d\times(0,T)\times\mathbb{R}_\lambda)$, векторное поле $\boldsymbol{u} \in L^2(0,T;H^{1,2})$, функцию давления $p_* \in L^2(0,T;H^{2,2})$, кинетическую меру параболической диссипации $d_\lambda\chi \in L^1_w(Q;\mathbb{M}(\mathbb{R}_\lambda))$ и кинетическую энтропийную меру дефекта $M \in \mathbb{M}(Q\times\mathbb{R}_\lambda)$, удовлетворяющие следующим требованиям.

1. Функция $f(\boldsymbol{x},t,\lambda)$ 1-периодична по $\boldsymbol{x}$, монотонна и непрерывна справа по $\lambda \in \mathbb{R}$. При этом

$$f(\boldsymbol{x},t,\lambda) = 0 \quad \text{при} \quad \lambda < -c_0, \qquad f(\boldsymbol{x},t,\lambda) = 1 \quad \text{при} \quad \lambda \geqslant c_0.$$

В частности, $0 \leqslant f \leqslant 1$ п. в. в $Q\times\mathbb{R}_\lambda$. Следовательно, мера Стильтьеса $\nu_{x,t} = d_\lambda f(\boldsymbol{x},t,\lambda)$ является вероятностной мерой на $\mathbb{R}_\lambda$ и $\operatorname{spt}\nu_{x,t} \subset [-c_0,c_0]$.

2. $*$-Слабо измеримое отображение $(\boldsymbol{x},t) \mapsto d_\lambda\chi(\boldsymbol{x},t,\lambda)$ неотрицательно и 1-периодично по $\boldsymbol{x}$, носитель меры $d_\lambda\chi(\,\cdot\,,\,\cdot\,,\lambda)$ принадлежит отрезку $[-c_0,c_0] \subset \mathbb{R}_\lambda$ при п.в. $(\boldsymbol{x},t) \in \mathbb{R}^d_x\times(0,T)$.

3. Существует $*$-слабо измеримое отображение $\sigma \in L^\infty_w(\mathbb{R}^d_x\times(0,T);\operatorname{Prob}(\mathbb{R}_\lambda\times\mathbb{R}^d_q))$, такое что:

— его проекция на пространство переменной λ совпадает с $d_\lambda f$:

$$\int\limits_{\mathbb{R}_\lambda} \zeta(\lambda)\,d_\lambda f(\boldsymbol{x},t,\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}_\lambda\times\mathbb{R}^d_q} \zeta(\lambda)\,d\sigma_{x,t}(\lambda,\boldsymbol{q}) \quad \forall\zeta\in C(\mathbb{R}_\lambda) \quad \text{при п.в.} \quad (\boldsymbol{x},t)\in\mathbb{R}^d_x\times(0,T);$$

— посредством интеграла (27) отображение порождает кинетическую меру параболической диссипации $d_\lambda\chi$;

— отображение связано с f дополнительным соотношением

$$\sqrt{\theta'(\lambda)}\,\nabla_x f(\boldsymbol{x},t,\lambda) = -\int\limits_{\mathbb{R}^d_q} \boldsymbol{q}\,d\sigma_{x,t}(\lambda,\boldsymbol{q}),$$

понимаемым в смысле распределений.

4. Кинетическая энтропийная мера дефекта M неотрицательна и 1-периодична по $\boldsymbol{x}$.

5. Функции и меры f, $\boldsymbol{u}$, p_*, $d_\lambda\chi$, M удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial f}{\partial t} + I_{\lambda\geqslant 0}\,\boldsymbol{u}\cdot\nabla_x f - \theta'(\lambda)\,\Delta_x f + \frac{\partial}{\partial\lambda}\,(d_\lambda\chi + M) = 0, \quad (\boldsymbol{x},t,\lambda)\in Q\times\mathbb{R}_\lambda; \tag{30а}$$

$$\big[\boldsymbol{u} + \nabla_x p_* - \boldsymbol{g}(\theta(\lambda))\big]\,\frac{\partial f}{\partial\lambda} = 0, \qquad (\boldsymbol{x},t,\lambda)\in Q\times\mathbb{R}_\lambda; \tag{30б}$$

$$\mathrm{div}_x\,\boldsymbol{u} = 0, \qquad (\boldsymbol{x},t)\in Q \tag{30в}$$

и начальным условиям

$$f(\boldsymbol{x},0,\lambda) = f_0(\boldsymbol{x},\lambda), \qquad (\boldsymbol{x},\lambda)\in\Omega\times\mathbb{R}_\lambda. \tag{30г}$$

Параметризованные меры $\nu_{x,t}$, $\sigma_{x,t}$ в пп. 1, 3 формулировки задачи К в процессе предельного перехода при $\varepsilon_k\to 0$ следуют из предельных соотношений (19), (20) как меры Янга, ассоциированные с последовательностями $\{e_{\varepsilon_k}\}$ и $\{e_{\varepsilon_k},\nabla_x H(e_{\varepsilon_k})\}$ соответственно.

Уравнение (30в) выполняется почти всюду в Q. Начальные условия (30г) понимаются в смысле слабого следа. Уравнения (30а), (30б) понимаются в смысле распределений и с учетом (30в), (30г) могут быть представлены в виде системы интегральных равенств

$$\int\limits_{Q\times\mathbb{R}_\lambda} \big(\partial_t\zeta + I_{\lambda\geqslant 0}\,\boldsymbol{u}\cdot\nabla_x\zeta + \theta'(\lambda)\,\Delta_x\zeta\big) f(\boldsymbol{x},t,\lambda)\,d\boldsymbol{x}\,dt\,d\lambda + \int\limits_{Q\times\mathbb{R}_\lambda} \partial_\lambda\zeta\,dM +$$
$$+\int\limits_Q\Big(\int\limits_{\mathbb{R}_\lambda}\partial_\lambda\zeta\,d_\lambda\chi(\boldsymbol{x},t,\lambda)\Big)\,d\boldsymbol{x}\,dt + \int\limits_{\Omega\times\mathbb{R}_\lambda}\zeta(\boldsymbol{x},0,\lambda) f_0(\boldsymbol{x},\lambda)\,d\boldsymbol{x}\,d\lambda = 0; \tag{31}$$

$$\int\limits_{Q\times\mathbb{R}_\lambda}\Big\{\big[\boldsymbol{u}+\nabla_x p_* - \boldsymbol{g}(\theta(\lambda))\big]\cdot\partial_\lambda\boldsymbol{\eta} - \partial_\lambda\boldsymbol{g}(\theta(\lambda))\cdot\boldsymbol{\eta}\Big\} f(\boldsymbol{x},t,\lambda)\,d\boldsymbol{x}\,dt\,d\lambda = 0. \tag{32}$$

В (31), (32) $\zeta(\boldsymbol{x},t,\lambda)$ — произвольная пробная 1-периодическая по $\boldsymbol{x}$ гладкая функция, обращающаяся в нуль в окрестности плоскости $\{t = T\}$ и при достаточно больших λ; $\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x},t,\lambda)$ — произвольная пробная 1-периодическая по $\boldsymbol{x}$ гладкая вектор-функция, обращающаяся в нуль при достаточно больших λ.

5. Разрешимость задачи Дарси — Стефана. Кинетические уравнения вида (30а) с входящими в них функциями и мерами, удовлетворяющими условиям типа требований пп. 1–4 формулировки задачи К, детально изучены в работах [13, 15]. Для уравнения (30а) из этих работ следует два утверждения, являющихся ключевыми в доказательстве разрешимости задачи Дарси — Стефана.

Предложение 3. *Для любой гладкой и выпуклой на отрезке* $[0,1]$ *функции* Φ *существует борелевская мера* $\Lambda_\Phi \in C(Q\times\mathbb{R}_\lambda)^*$ *с носителем, принадлежащим полосе* $-c_0\leqslant\lambda\leqslant c_0$, *такая что выполняется ренормализованное интегральное неравенство*

$$\int\limits_{Q\times\mathbb{R}_\lambda} \Phi(f)\big\{\partial_t\zeta + I_{\lambda\geqslant 0}\,\boldsymbol{u}\cdot\nabla_x\zeta + \theta'(\lambda)\,\Delta_x\zeta\big\}\,d\boldsymbol{x}\,dt\,d\lambda +$$

$$+ \int\limits_{\Omega\times\mathbb{R}_\lambda} \Phi(f_0)\zeta(\boldsymbol{x},0,\lambda)\,d\boldsymbol{x}\,d\lambda - \int\limits_{Q\times\mathbb{R}_\lambda} \partial_\lambda\zeta\,d\Lambda_\Phi(\boldsymbol{x},t,\lambda) \leqslant 0, \qquad (33)$$

где $\zeta(\boldsymbol{x},t,\lambda)$ — произвольная пробная неотрицательная гладкая 1-периодическая по $\boldsymbol{x}$ функция, в окрестности плоскости $\{t=T\}$ и при достаточно больших $|\lambda|$ обращающаяся в нуль.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 6 в [13].

С учетом начального условия $f(\boldsymbol{x},0,t) = f_0(\boldsymbol{x},\lambda)$ неравенство (33) в смысле распределений эквивалентно ренормализованному неравенству

$$\frac{\partial\Phi(f)}{\partial t} + I_{\lambda\geqslant 0}\boldsymbol{u}\cdot\nabla_x\Phi(f) - \theta'(\lambda)\,\Delta_x\Phi(f) \geqslant -\frac{\partial\Lambda_\Phi}{\partial\lambda}, \qquad (\boldsymbol{x},t,\lambda)\in Q\times\mathbb{R}_\lambda.$$

Предложение 4. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Решения задачи К удовлетворяют уравнению*

$$f(\boldsymbol{x},t,\lambda)(1-f(\boldsymbol{x},t,\lambda)) = 0 \quad \text{п. в. в} \quad \mathbb{R}^d_x\times(0,T)\times\mathbb{R}_\lambda,$$

т. е. функция распределения f принимает только значения 0 и 1.

2. *Функция распределения $f(\boldsymbol{x},t,\lambda)$ имеет структуру функции Хевисайда переменной λ, т. е. существует функция $e_* = e_*(\boldsymbol{x},t)$, такая что $e_*\in L^\infty(0,T;L^\infty)$, $-c_0\leqslant e_*\leqslant c_0$ п. в. в $\mathbb{R}^d_x\times(0,T)$, и*

$$f(\boldsymbol{x},t,\lambda) = I_{\lambda\geqslant e_*(x,t)}. \qquad (34)$$

Доказательство п. 1 аналогично доказательствам в [13, п. 5] и [15] и основано на выборе пробных функций в (33) в виде $\Phi(f) = f(f-1)$ и $\zeta(\boldsymbol{x},t,\lambda) = \zeta_1(\lambda)\zeta_2(t)$, где ζ_1 неотрицательна и равна единице на отрезке $[-c_0,c_0]$, а ζ_2 неотрицательна, обращается в нуль при $t=T$ и строго убывает при $t\in[0,T)$.

Представление (34) следует из п. 1 предложения 4, а также из того, что f удовлетворяет требованиям (1) формулировки задачи К.

Вернемся к доказательству теоремы 1. В силу (21) из представления (34) следует, что мера Янга $\nu_{x,t}$ является параметризованной мерой Дирака, сосредоточенной в точке $\lambda = e_*(\boldsymbol{x},t)$. Согласно теории мер Янга (теорема 2.31 в [10, гл. 3]) это означает, что e_* совпадает почти всюду в $\mathbb{R}^d_x\times(0,T)$ с e (предельной функцией в соотношении (9)) и

$$e_\varepsilon \to e \quad \text{сильно в} \quad L^2_{loc}(\mathbb{R}^d_x\times(0,T)). \qquad (35)$$

Таким образом, сильная предкомпактность семейства приближенных решений $\{e_\varepsilon, p_{*\varepsilon}, \boldsymbol{u}_\varepsilon\}$ доказана.

Подставляя представление (34) (в котором, как сказано выше, $e_* = e$ п. в. в Q) и пробные функции вида $\zeta(\boldsymbol{x},t,\lambda) := \varphi(\lambda)\zeta_0(\boldsymbol{x},t)$ и $\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x},t,\lambda) = \eta_1(\lambda)\boldsymbol{\eta}_2(\boldsymbol{x},t)$ в интегральные равенства (30а) и (30б) и интегрируя по λ с учетом неотрицательности меры M и конструкции меры $d_\lambda\chi$, приходим к выводу, что пара функций (e,p_*), полученных в результате предельных переходов (35), (24), является энтропийным решением задачи Дарси — Стефана в смысле определения энтропийного решения. Также следует отметить, что в силу равенств (30б), (34) $\boldsymbol{u} = -\nabla_x p_* + \boldsymbol{g}(\theta(e))$ п. в. в $\mathbb{R}^d_x\times(0,T)$. В частности, отсюда следует, что в задаче Дарси — Стефана вектор скорости $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$ восстанавливается по формуле $\boldsymbol{v} = I_{e\geqslant 0}\boldsymbol{u}$. Теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Васильев В. И.** Тепломассоперенос в промерзающих и протаивающих грунтах / В. И. Васильев, А. М. Максимов, Е. Е. Петров, Г. Г. Цыпкин. М.: Наука, 1996.
2. **Rodrigues J. F., Urbano J. M.** On a Darcy — Stefan problem arising in freezing and thawing of saturated porous media // Contin. Mech. Thermodyn. 1999. V. 11, N 3. P. 181–191.
3. **Ладыженская О. А.** Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева. М.: Наука, 1967.
4. **Антонцев С. Н.** Краевые задачи механики неоднородных жидкостей / С. Н. Антонцев, А. В. Кажихов, В. Н. Монахов. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1983.
5. **Bear J.** Dynamics of fluids in porous media. N. Y.: Dover Publ. Inc., 1988.
6. **Жермен П.** Курс механики сплошных сред. М.: Высш. шк., 1983. Т. 1.
7. **Straughan B.** Mathematical aspects of penetrative convection // Pitman Res. Notes Math. Ser. 288. N. Y.: Longman, 1993.
8. **Овсянников Л. В.** Введение в механику сплошных сред. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1977.
9. **Perthame B.** Kinetic formulations of conservation laws. Oxford: Oxford Univ. Press, 2002.
10. **Malek J.** Weak and measure-valued solutions to evolutionary PDEs / J. Malek, J. Nečas, M. Rokyta, M. Ružička. L.: Chapman and Hall, 1996.
11. **Ладыженская О. А.** Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
12. **Simon J.** Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$ // Ann. Mat. Pura Appl. 1987. V. 146. P. 65–96.
13. **Plotnikov P. I., Sazhenkov S. A.** Kinetic formulation for the Graetz — Nusselt ultra-parabolic equation // J. Math. Anal. Appl. 2005. V. 304. P. 703–724.
14. **Plotnikov P. I.** Ultraparabolic Muskat equations. Covilhã (Portugal), 2000. (Prepr. / Univ. Beira Interior; N 6).
15. **Плотников П. И., Саженков С. А.** Задача Коши для ультрапараболического уравнения Гратца — Нуссельта // Докл. РАН. 2005. Т. 401, № 4. С. 455–458.

Поступила в редакцию 27/VI 2007 г.,
в окончательном варианте — 23/VIII 2007 г.