ПМТФ, № 4, 1966

# РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЛАМИНАРНОЙ СТРУИ ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ В ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

*К. Е. Джаугаштин*

*(Ленинград)*

Распространение плоской ламинарной струи несжимаемой проводящей жидкости в однородном магнитном поле при магнитных числах Рейнольдса, много меньших единицы, рассматривалось в нескольких работах [1-4]. В этих работах исследовалось течение свободной струи в поперечном магнитном поле при малых значениях параметра магнитного взаимодействия. В статье [1,2] путем разложения в ряд по малому параметру взаимодействия вблизи обычного (безмагнитного) решения струи были получены уравнения для первых приближений. Интегрирование уравнений нулевого и первого приближений произведено в работе [3]. Аналогичное решение получено в той же работе и для турбулентной струи при выборе коэффициента турбулентного обмена по схеме Прандтля. Что касается решения, полученного в работе [4], то оно обладает тем недостатком, что в нем осталась не определенной константа интегрирования, связывающая полученные автомодельные профили скорости с реальными.

В настоящей работе дается приближенное решение той же динамической задачи о распространении свободной плоской струи в однородном поле, не связанное с предположением о малости параметра взаимодействия. Для этой цели используется интегральный метод решения, распространенный в обычной гидродинамике [5,6]. Решение задачи обобщается на случай конечного значения параметра Холла.

1. Пусть из бесконечно тонкой щели, расположенной в точке 0, в направлении оси $x$ бьет струя проводящей жидкости в пространство, заполненное той же, но неподвижной жидкостью (фиг. 1). Будем считать, что область распространения струи находится во внешнем безграничном однородном магнитном поле напряженностью $H_0$, ориентированном вдоль оси $y$, а магнитное число Рейнольдса $R_m \ll 1$.

В рассматриваемом случае уравнения движения и неразрывности, а также граничные условия имеют вид

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \sigma\frac{\mu^2 H_0^2}{\rho}u, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0, \qquad u = \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = \pm\infty \tag{1.2}$$

Следуя интегральному методу решения, профиль скорости будем искать в виде полинома четвертой степени

$$u = a_0 + a_2 y^2 + a_4 y^4 \tag{1.3}$$

где нечетные члены опущены вследствие симметрии.

Для определения коэффициентов полинома (1.3) потребуем, чтобы выполнялись граничные условия

$$\begin{gathered}\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\sigma\mu^2 H_0^2}{\rho}u_m = u_m\frac{du_m}{dx} \quad \text{при } y = 0 \\ u = \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = \pm\infty\end{gathered} \tag{1.4}$$

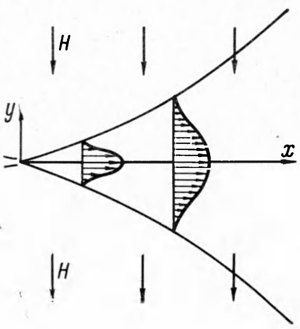
Условие при $y = 0$ получено из исходного уравнения (1.1), $u_m$ — значение скорости на оси струи $[u_m = u(x, 0)]$, $\delta$ — условная ширина струи.

Определив постоянные $a_0$, $a_2$, $a_4$ и подставив в соотношение (2.3), найдем выражение для искомого профиля скорости

$$u = -\frac{\delta^2}{4}\left(\frac{du_m}{dX} + N\right) u_m F(\varphi), \qquad F(\varphi) = 1 - 2\varphi^2 + \varphi^4 \tag{1.5}$$

$$\varphi = \frac{y}{\delta}, \qquad X = x\nu, \qquad N = \frac{\sigma\mu^2 H_0^2}{\rho\nu}$$

Для определения значения скорости на оси струи $u_m$ и толщины струи $\delta$ нужно иметь два уравнения. Первое из них получим из выражения для скорости (1.5) на оси струи




Фиг. 1

$$1 = -\frac{\delta^2}{4}\left(\frac{du_m}{dX} + N\right) \tag{1.6}$$

Второе уравнение получим из исходных уравнений (1.1), интегрируя их поперек струи

$$\frac{d}{dx}(u_m^2\delta) + \frac{21}{16} N u_m \delta = 0 \tag{1.7}$$

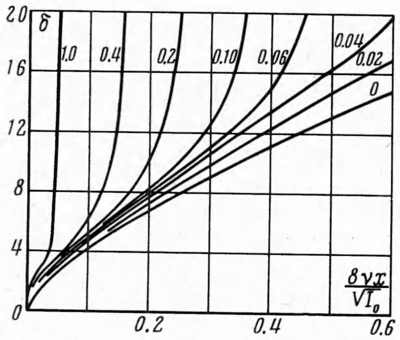
Из системы уравнений (1.6) и (1.7) получим выражение для максимальной скорости

$$u_m = \delta\left(\frac{11}{16}N + \frac{8}{\delta^2}\right)\frac{dX}{d\delta} \tag{1.8}$$

Эффективная толщина струи $\delta$ определяется из уравнения

$$\delta\left(8 + \frac{11}{16}N\delta^2\right)\frac{d^2\delta}{dX^2} + \left(4 - \frac{27}{16}N\delta^2\right)\left(\frac{d\delta}{dX}\right)^2 = 0 \tag{1.9}$$

при граничном условии $\delta = 0$ для $x = 0$. Интегрируя уравнение (1.9), найдем выражение для толщины струи




Фиг. 2

$$\int_0^\delta \frac{\sqrt{\delta}\, d\delta}{(1 + {}^{11}/_{128} N\delta^2)^{65/44}} = C\nu x \tag{1.10}$$

Для определения постоянной интегрирования $C$ проинтегрируем уравнение (1.7), при этом получим

$$u_m^2\delta + \frac{21}{16} N \int_0^x u_m \delta\, dx = \mathrm{const} = I_0/k$$

$$\left(k = \int_{-1}^{1} F^2\, d\varphi = \frac{128}{315}\right) \tag{1.11}$$

Константа интегрирования принята равной $I_0$ из условия, что член $u_m^2\delta k$ при $x = 0$ определяет начальный импульс струи $I_0$.

Используя соотношение (1.10) и (1.11), определим постоянную $C$:

$$C = 8\sqrt{k} / \sqrt{I_0} \tag{1.12}$$

Полученные соотношения позволяют определить продольную ($u$) и поперечную ($v$) составляющие скорости, используя равенства (1.8) и уравнение неразрывности.

Как видно из выражения для толщины струи $\delta$ при значении параметра магнитного взаимодействия, отличном от нуля ($N \neq 0$) развитие струи заканчивается на некотором конечном расстоянии от источника, равном $x \approx 1.35\, N^{-3/4} \sqrt{I_1 / \nu^2}$. Толщина струи при этом принимает бесконечно большое значение (фиг. 2), скорость становится равной нулю. Импульс струи падает вдоль оси $x$, тем сильнее, чем больше значение параметра $N$; расход струи, пропорциональный величине $u_m\delta$ с удалением от источника струи ($u_m\delta = 0$ при $x = 0$) проходит через экстремум, обращаясь снова в нуль при $x \approx 1.35\, N^{-3/4} \sqrt{I_1 / \nu^2}$. При значении $x$, соответствующем максимальному значению расхода, меняет знак поперечная компонента скорости. Следовательно, уменьшение расхода струи связано с вытеснением жидкости из струи в окружающую среду.

Заметим, что в области резкого возрастания толщины струи следовало бы учесть влияние соизмеримости поперечного и продольного компонент скоростей и связанное с искривлением линий тока образование градиента давления. Иными словами, применение к этой области уравнений пограничного слоя требует специального рассмотрения.

2. Для сравнения решения, полученного интегральным методом с точным решением (в рамках теории асимптотического слоя), рассмотрим распространение струи в неоднородном поле.

Примем, как и в работе [7], что магнитное поле изменяется обратно пропорционально ширине струи

$$H = H_0 / \delta \tag{2.1}$$

Из системы уравнений (1.6) и (1.7) с учетом (2.1) получим следующие выражения для искомых величин:

$$u = u_m F(\varphi), \qquad F(\varphi) = 1 - 2\varphi^2 + \varphi^4, \qquad u_m = \frac{1}{C^2}\left(12 + \frac{3}{8}N\right) x^\alpha \tag{2.2}$$

$$\delta = C x^\beta, \quad \alpha = -\frac{4 + N}{12 + {}^3/_8 N}, \quad \beta = \frac{8 \pm {}^{11}/_{16} N}{12 + {}^3/_8 N} \quad \left(N = \frac{\sigma\mu^2 H_0^2}{\rho\nu C^2}\right) \tag{2.3}$$

Для определения постоянной $C$ воспользуемся тем, что интеграл вида

$$\int_{-\delta}^{\delta} u^{-\beta/\alpha}\, dy = D \tag{2.4}$$

не изменяется вдоль оси струи. Из этого условия для $C$ получим (2.5)

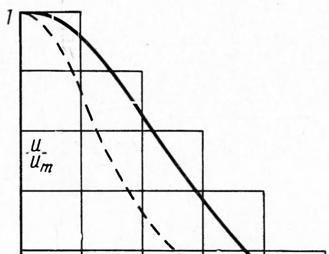
$$C = D^\alpha \left[\left(12 + \frac{3}{8}N\right)\left(\int_{-1}^{1} [F(\varphi)]^{-\beta/\alpha}\, d\varphi\right)\right]^{-\alpha}$$

Приведем аналогичные результаты, полученные из точного решения задачи [7]

$$\alpha = -\frac{1}{3}\left(1 + \frac{N}{2}\right), \qquad \beta = -\frac{2}{3}\left(1 + \frac{N}{8}\right)$$

$$\left(N = \frac{\sigma\mu^2 H_0^2}{\rho\nu b^2}\right) \tag{2.6}$$

$$b = \frac{D^{-\alpha}}{\sqrt{6\nu}}\left(\sqrt{6\nu}\int_{-\infty}^{\infty} (\operatorname{ch}\varphi)^{\frac{2\beta}{\alpha}}\, d\varphi\right)^{-\alpha} \qquad (\varphi = b x^\beta y)$$




Фиг. 3

При сравнении решения, полученного интегральным методом, и точного решения следует учесть различие в формулах, определяющих параметры $N$.

На фиг. 4 приведено сравнение зависимостей констант автомодельности $\alpha$ и $\beta$ от параметра магнитного взаимодействия, где $N$ вычисляется по формуле (2.6). Как видно из фигуры, результаты интегрального метода (сплошная линия), относящиеся к изменению максимальной скорости и толщины струи вдоль оси ее, согласуются с аналогичными результатами точного решения (штриховая линия). Из полученных решений следует, что автомодельное решение струи существует при изменении магнитного параметра $N$ в области $0 \leqslant N < 3.4$. Верхний предел параметра $N = 3.4$ определяется тем, что в рассматриваемом случае расход струи вдоль оси должен возрастать. Константы автомодельности при этом изменяются, соответственно, в пределах

$$-{}^1/_3 \geqslant \alpha > 1, \quad -{}^2/_3 \geqslant \beta > -1$$

Из решений следует также, что для автомодельного растекания струи в магнитном поле необходимо выполнение определенного соотношения между динамической характеристикой струи $D$ и приложенным магнитным полем $H_0$. Физически это обстоятельство, видимо, связано с тем, что при заданных значениях начального импульса струи и параметра, определяющего изменение магнитного поля вдоль оси струи, автомодельное развитие струи осуществится только при одном характерном значении напряженности магнитного поля $H_0$.

При предельном значении параметра $N = 3.4$, $a = \beta = -1$ струя вырождается в течение с постоянным расходом; следовательно, для струи источника расход жидкости равен нулю [4]. Заметим, что именно к этому, на наш взгляд, физически нереальному случаю относится решение в работе [8].

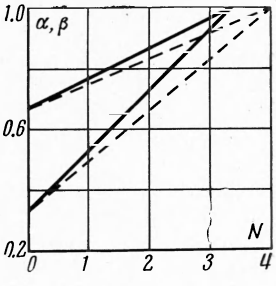
Безразмерные профили скорости в поперечных сечениях приведены на фиг. 3. Из сравнения видно, что распределение скорости по интегральному методу (сплошная линия) заметно отличается от точного решения (штриховая линия). Заметим, что в рассматриваемом случае автомодельный профиль скорости, полученный интегральным методом, имеет тот же вид, что и при чисто гидродинамическом истечении струи.

3. Рассмотрим задачу о распространении струи в однородном магнитном поле с учетом зависимости проводимости от магнитного поля и том же условии $R_m \ll 1$. При конечном значении параметра Холла $\omega\tau$ исходная система уравнений запишется в виде [9,10]

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\sigma\mu^2 H_0^2}{\rho(1+\omega^2\tau^2)}(u - \omega\tau w)$$

$$u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\sigma\mu^2 H_0^2}{\rho(1+\omega^2\tau^2)}(w + \omega\tau u) \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$



Фиг. 4

В дальнейшем членом $\omega\tau w$ в первом уравнении пренебрежем, как это делалось, например, в работах [9,10].

Профили скорости будем отыскивать в виде полиномов

$$u = a_0 + a_2 y^2 + a_4 y^4, \qquad w = b_0 + b_2 y^2 + b_4 y^4 \tag{3.2}$$

Определяя коэффициенты из шести граничных условий

$$u_m\frac{du_m}{dx} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - N^\circ u_m \qquad \text{при } y = 0 \tag{3.3}$$

$$u_m\frac{dw_m}{dx} = \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - N^\circ(w_m - \omega\tau u_m)$$

$$u = w = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \qquad \text{при } y = \delta$$

получим

$$u = -u_m\left(\frac{du_m}{dx} + N^\circ\right)\frac{\delta^2}{4}F(\varphi), \qquad F(\varphi) = 1 - 2\varphi^2 + \varphi^4 \tag{3.4}$$

$$w = -\frac{\delta^2}{4}\left[u\frac{du_m}{dx} + N^\circ(w_m + \omega\tau u_m)\right]F(\varphi)$$

Здесь через $N°$ обозначен параметр взаимодействия

$$N° = \frac{\sigma\mu^2 H_0^2}{\rho\nu(1+\omega^2\tau^2)} \tag{3.5}$$

Для определения $u_m$ и $w_m$ имеем следующие уравнения:

$$1 = -\frac{\delta^2}{4}\left(\frac{du_m}{dX} + N°\right), \quad w_m = \frac{\delta^2}{4}\left[u_m\frac{du_m}{dX} + N°(w_m + \omega\tau u_m)\right] \tag{3.6}$$

Решение первого уравнения (3.6) и уравнения (1.7) приведено выше (с заменой $N$ на $N°$). Из системы уравнений (3.6) получим выражение для максимального значения поперечной компоненты скорости

$$w_m = Cu - N\omega\tau u_m \int_0^x \frac{dx}{u} \tag{3.7}$$

Константа интегрирования $C = 0$, так как по условию струя не обладает начальной закруткой относительно оси $y$ ($uw\delta = 0$ при $x = 0$).

Вычисляя интеграл в выражении (3.7), определим

$$w_m = -{}^8/_{11}\omega\tau u_m \ln(1 + {}^{11}/_{64}N\delta^2) \tag{3.8}$$

Полученное решение показывает, что в струе возникает движение, поперечное к плоскости течения. С увеличением $\omega\tau$ скорость бокового течения возрастает. Однако, начиная с некоторого значения $\omega\tau$, дальнейшее ее увеличение приводит к уменьшению скорости поперечного движения вплоть до $w \to 0$ при $\omega\tau \to \infty$. Продольная компонента скорости $u$ уменьшается с ростом $\omega\tau$, стремясь при $\omega\tau \to \infty$ к предельному распределению скорости для истечения непроводящей жидкости (случай $N = 0$).

Полученные решения для распространения струи проводящей жидкости при отсутствии магнитного поля ($N = 0$) переходят в соответствующие решения для чисто гидродинамического истечения.

Следует отметить, что применение интегрального метода к рассмотренной задаче содержится в работе Э. В. Щербины [11].

Поступила 9 IX 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Pai S. I., Laminar Jet. Mixing of Electrically Conducting Fluid in a transverse magnetic field. J. Aeronaut. Science 1959, vol. 26, No. 4.
2. Toba K., Laminar Jet Mixing of an Electrically Conducting Eluid in the presence magnetic field. J. Aeronaut. Science 1961, vol. 28, No. 8.
3. Peskin R. L. Hydromagnetic Free Jet. Phys. Fluids, 1963, vol. 6, No. 5.
4. M. R. Moreau. Jet libre plan, Laminare, d'un fluide incopressible, en presence d'un champ magnetique transversal. C. r. Acad. sci., 1963, vol. 256, No. 23.
5. Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой. Физматгиз, 1962.
6. Гиневский А. С. Турбулентные неизотермические струйные течения сжимаемого газа. Промышл. аэродинамика, 1962, вып. 23.
7. Джаугаштин К. Е. Распространение плоской струи проводящей жидкости. Инж. физ. ж., 1965, т. 8, № 5.
8. Страхович К. И., Соковишин Ю. А. Истечение ламинарной струи проводящего газа в пространство с магнитным полем. Инж.-физ. ж., 1962, т. 5, № 10.
9. Любимов Г. А. Магнитогидродинамический пограничный слой в среде с анизотропной проводимостью при малых магнитных числах Рейнольдса. ПММ, 1962, т. 26, вып. 6.
10. Губанов А. И., Пушкарев О. Е. Вязкий пограничный слой в магнитной гидродинамике при конечном $v\tau$, Ж. техн. физ., 1962, т. 32, № 6.
11. Щербина Э. В. Интегральные методы в теории струй электропроводящей жидкости. «Магнитная гидродинамика», 1965, № 3.