ПМТФ, № 5, 1973

УДК 533.6.011.8

О ВЫВОДЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ СЛАБО РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА ОКОЛО СИЛЬНО НАГРЕТЫХ ТЕЛ ИЗ УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА

В. Я. Рудяк

(Новосибирск)

Рассматриваются движения слабо разреженного газа ($K \ll 1$, где K — число Кнудсена) около сильно нагретых тел. В предположении, что возникающая при контакте с сильно нагретым телом, характерная макроскопическая скорость движения газа порядка или много больше скорости набегающего потока методом Гильберта [1] из уравнения Больцмана выводятся соответствующие уравнения гидродинамики. Проводится качественное исследование области применимости полученных уравнений.

В работе [2] исследовался класс течений сплошной среды, в которых характерное изменение энтальпии много больше характерной кинетической энергии. Для описания таких течений уравнения Навье — Стокса с граничными условиями прилипания оказываются недостаточными, ибо уже в первом, основном, приближении необходимо, учитывать часть барнеттовских членов и скольжение. Авторы [2] предлагают использовать упрощенные уравнения Барнетта с условием крипа, причем барнеттовские члены оказываются того же порядка, что и инерционные и навье-стоксовские члены. С другой стороны, известно, что уравнения Барнетта выводятся в предположении о малости дополнительных членов по сравнению с навье-стоксовскими и эйлеровскими. Это делает желательным получение уравнений, описывающих рассматриваемый класс течений, непосредственно из уравнения Больцмана.

1. Как показано в [3], движение газа около сильно нагретых тел следует классифицировать в зависимости от значений параметра

$$w = u_\infty / u_0 \tag{1.1}$$

где u_0 — характерная скорость макроскопического движения газа, возникающая при контакте с сильно нагретым телом, а u_∞ — скорость набегающего потока.

Простые оценки показывают, что $u_0 \sim \varepsilon\nu/L$, ν — кинематический коэффициент вязкости, L — характерный линейный размер обтекаемого тела, $\varepsilon \sim \Delta T/T \leqslant o\ (1)$, ΔT — характерный перепад температуры.

При $w \gg 1$ движение газа описывается обычными уравнениями Навье — Стокса [3].

Интерес представляют течения сплошной среды при $w \sim 1$ и $w \ll 1$. Характерная скорость движения в этом случае оказывается порядка величины u_0, а число Рейнольдса можно оценить следующим образом:

$$\mathrm{Re} = u_0 L/\nu \sim \varepsilon \tag{1.2}$$

Кроме того, $\varepsilon \gg M_\infty{}^2$, M_∞ — число Маха набегающего потока. Уравнение Больцмана для рассматриваемого класса течений имеет обычный вид [4]

$$\mathrm{K}\ (\partial f/\partial t + \xi_i\, \partial f/\partial x_i) = J\ (f, f) \tag{1.3}$$

Решение уравнения (1.3) ищем в форме

$$f = {}^{(0)} + \mathrm{K} f^{(1)} + \mathrm{K}^2 f^{(2)} + \ldots \tag{1.4}$$

Подставляя (1.4) в (1.3) и собирая члены при одинаковых степенях K, получим рекуррентную систему уравнений

$$J(f^{(0)}, f^{(0)}) = 0$$

$$(1.5)\qquad 2J(f^{(1)}, f^{(0)}) = \frac{\partial f^{(0)}}{\partial t} + \xi_i \frac{\partial f^{(0)}}{\partial x_i}$$

$$2J(f^{(2)}, f^{(0)}) = \frac{\partial f^{(1)}}{\partial t} + \xi_i \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x_i} - J(f^{(1)}, f^{(1)})$$

. . . .

Первые пять моментов функции распределения определим следующим образом:

$$(1.6)\qquad \rho = \rho^{(0)} + K\rho^{(1)} + K^2\rho^{(2)} + \ldots$$

$$u_i = Ku_i^{(1)} + K^2u_i^{(2)} + \ldots$$

$$p = p^{(0)} + Kp^{(1)} + K^2p^{(2)} + \ldots$$

Функция распределения нулевого приближения является локально-максвелловской, причем

$$(1.7)\qquad \rho^{(0)} = \int f^{(0)}\, d\xi, \qquad \rho^{(0)}u_i^{(0)} = \int \xi_i f^{(0)}\, d\xi = 0, \qquad 3p^{(0)} = \int \xi^2 f^{(0)}\, d\xi$$

Для разрешимости следующего интегрального уравнения системы (1.5) должно быть выполнено условие

$$(1.8)\qquad \int \left(\frac{\partial f^{(0)}}{\partial t} + \xi_i \frac{\partial f^{(0)}}{\partial x_i} \right) \psi_r\, d\xi = 0$$

$$(r = 0, 1, 2, 3, 4; \quad \psi_0 = 1; \ \psi_i = \xi_i; \ i = 1, 2, 3; \ \psi_4 = \xi^2)$$

Отсюда с учетом (1.7) получаем

$$(1.9)\qquad \frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial p^{(0)}}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_i} = 0$$

Решение интегрального уравнения, определяющего $f^{(1)}$, ищем при помощи известной методики [5]

$$(1.10)\qquad f^{(1)} = -\frac{1}{\rho^{(0)}} f^{(0)} (2RT^{(0)})^{1/2} A(\xi)\, \xi_i \frac{\partial \ln T^{(0)}}{\partial x_i} + \sum_{r=0}^{4} f^{(0)} \gamma_r^{(1)} \psi_r$$

$$\left(T^{(0)} = \frac{p^{(0)}}{\rho^{(0)} R} \right)$$

где R — газовая постоянная, $\gamma_r^{(1)}$ — некоторые функции от x и t, $r = 0$, 1, 2, 3, 4.

В частности, для максвелловских молекул

$$A(\xi) = \frac{3\mu^{(0)}}{2RT^{(0)}} \left(\xi^2 - \frac{5}{2} \right)$$

где $\mu^{(0)}$ — коэффициент вязкости нулевого приближения, так что $\mu^{(0)} \sim T^{(0)}$.

Из условия разрешимости интегрального уравнения для функции распределения второго приближения получим систему уравнений, которой должны удовлетворять $\rho^{(1)}, u_i^{(1)}, p^{(1)}$

$$\frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial \rho^{(0)} u_i^{(1)}}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial t} + \frac{1}{\rho^{(0)}} \frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_i} = 0, \tag{1.11}$$

$$\frac{\partial p^{(1)}}{\partial t} + \frac{5}{2} p^{(0)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_i} + \frac{\partial q_i^{(1)}}{\partial x_i} = 0$$

Здесь вектор теплового потока первого приближения $q_i^{(1)}$ вычисляется по функции распределения (1.10)

$$q_i^{(1)} = -\lambda^{(0)} \partial T^{(0)} / \partial x_i \tag{1.12}$$

где $\lambda^{(0)}$ — коэффициент теплопроводности нулевого приближения.

Условия разрешимости интегрального уравнения для $f^{(3)}$ приводят к системе уравнений

$$\frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho^{(1)} u_i^{(1)} + \rho^{(0)} u_i^{(2)}) = 0 \tag{1.13}$$

$$\rho^{(0)} \frac{\partial u_r^{(2)}}{\partial t} + \rho^{(0)} u_i^{(1)} \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial x_i} - \frac{\rho^{(1)}}{\rho^{(0)}} \frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_r} + \frac{\partial p^{(2)}}{\partial x_r} + \frac{\partial p_{ri}^{(2)}}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial p^{(2)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (p^{(0)} u_i^{(2)} + p^{(1)} u_i^{(1)}) + \frac{2}{3} p^{(0)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_i} +$$

$$+ \frac{2}{3} p^{(1)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_i} + \frac{2}{3} \frac{\partial q_i^{(2)}}{\partial x_i} = 0$$

Тензор напряжений $p_{ij}^{(2)}$ и вектор потока тепла $q_i^{(2)}$ второго приближения определяются по функции $f^{(2)}$. Интегральное уравнение для $f^{(2)}$ решается методом разложения по полиномам Сонина [6]. В результате находим

$$p_{ij}^{(2)} = -2\mu^{(0)} \left\langle \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_j} \right\rangle + K_1 \frac{\mu^{(0)2}}{\rho^{(0)} T^{(0)}} \left\langle \frac{\partial^2 T^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} \right\rangle + \tag{1.14}$$

$$+ K_2 \frac{\mu^{(0)2}}{\rho^{(0)} T^{(0)}} \left\langle \frac{\partial T^{(0)}}{\partial x_i} \frac{\partial T^{(0)}}{\partial x_j} \right\rangle$$

$$q_i^{(2)} = -\lambda^{(1)} \frac{\partial T^{(0)}}{\partial x_i} - \lambda^{(0)} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial x_i}$$

$$\langle A_{ij} \rangle = {}^1/_2 (A_{ij} + A_{ji}) - {}^1/_3 \delta_{ij} A_{KK}$$

Для максвелловских молекул $\lambda^{(1)} = \lambda^{(0)} T^{(1)} / T^{(0)}$; K_1, K_2 — постоянные.

В частном случае стационарного движения газа уравнения (1.9), (1.11) и (1.13) сводятся к системе уравнений

$$\frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial \rho^{(0)} u_i^{(1)}}{\partial x_i} = 0 \tag{1.15}$$

$$\frac{5}{2} p^{(0)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_i} + \frac{\partial q_i^{(1)}}{\partial x_i} = 0$$

$$\rho^{(0)} u_r^{(1)} + \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_r} + \frac{\partial p^{(2)}}{\partial x_i} + \frac{\partial p_{ir}^{(2)}}{\partial x_r} = 0$$

Так как скорость скольжения, вызванная температурным градиентом на стенке, основного порядка величины, то в качестве граничных условий на стенке для системы (1.15) следует принять условие крипа

$$u_{\tau}^{(1)}\big|_{n=0} = \beta \frac{\mu^{(0)}}{\rho^{(0)} T^{(0)}} \frac{\partial T^{(0)}}{\partial x_{\tau}}\bigg|_{n=0} \tag{1.16}$$

где n, τ — нормаль и касательная к поверхности, β — постоянная. Скорость скольжения, вызванная поперечным градиентом скорости, и температурный скачок на поверхности более высокого порядка малости (по числу Кнудсена) по сравнению с основной скоростью и температурой соответственно.

Далее, так же как и в работе [2], можно показать, что характерный перепад $P_{ij}^{(2)}$ ($P_{ij}^{(2)} = p_{ij}^{(2)} + p^{(2)}\delta_{ij}$) поперек слоя Кнудсена порядка K^3, а перепад $q_i^{(1)}$ — порядка K^2, характерные же изменения этих величин в потоке оказываются порядка K^2 и K соответственно. Поэтому изменением $P_{ij}^{(2)}$ и $q_i^{(1)}$ в слое Кнудсена можно пренебречь.

2. Решения системы уравнений (1.15) в общем случае отличны от решений упрощенных уравнений Барнетта, которые используются в работе [2].

Рассмотрим, например, движение несжимаемого газа. В этом случае в силу того, что $\partial p^{(0)}/\partial x_i = 0$, члены в $p_{ij}^{(2)}$, связанные с градиентами температуры, становятся равными нулю и уравнение импульса системы (1.15) переходит в уравнение Навье — Стокса. Вместе с тем при решении этой же задачи методом Чепмена — Энскога, т. е. с помощью уравнений Барнетта, члены, связанные с градиентами температуры, остаются, более того, в ряде задач они оказываются наибольшими.

Решения системы (1.15) будут отличаться от решений уравнений Барнетта для задачи о движении газа около неравномерно нагретого тела при $\varepsilon \sim 1$ и больших градиентах температуры стенки, $\nabla T_w \sim 1$. Если же $\varepsilon \sim 1$, но $\nabla T_w \ll 1$, то решение системы уравнений (1.15) и уравнений Барнетта приводит к одинаковым результатам.

Методы Гильберта и Чепмена — Энскога также при изучении течений газа около равномерно нагретых тел, когда температура стенки мало отличается от температуры набегающего потока, приводят к одинаковым результатам.

Таким образом, метод Гильберта приводит к таким же результатам, что и метод Чепмена — Энскога в случае малых градиентов температуры.

Обычно предполагается [4], что в методе Гильберта число граничных условий в соответствующих гидродинамических уравнениях не зависит от порядка приближения и является тем же самым, что и для уравнений Эйлера, тогда как в методе Чепмена — Энскога число этих граничных условий может увеличиваться с ростом числа приближений. При исследовании данной задачи оба эти предположения не подтверждаются. Вследствие вырожденности задачи для решения упрощенных уравнений Барнетта требуется такое же число граничных условий, что и для уравнений Навье — Стокса. С другой стороны, уравнения Эйлера в методе Гильберта не дают никакой конкретизации течения. При использовании же второго приближения (система (1.15)) требуется такое же число граничных условий, что и в методе Чепмена — Энскога.

Автор благодарит В. В. Струминского и В. Н. Жигулева за обсуждение работы.

Поступила 4 I 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hilbert D.* Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1912.
2. *Галкин В. С., Коган М. Н., Фридлендер О. Г.* О некоторых кинетических эффектах в течениях сплошной среды. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 3.
3. *Жигулев В. Н.* К вопросу о движении газа около сильно нагретых тел. ПМТФ, 1972, № 4.
4. *Grad H.* Principles of the kinetic theory of gases. Handbuch der Physik, Bd 12. Berlin, Springer — Verlag, 1958. (Рус. перев.: Термодинамика газов. М., «Машиностроение», 1970.)
5. *Чепмен С., Каулинг Т.* Математическая теория неоднородных газов. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
6. *Burnett D.* The distribution of molecular velocities and the mean motion in a nonuniform gas. Proc. London Math. Soc., Ser. 3, 1935, vol. 40, pt 5.